КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Калмыков Р.К., Камалетдинова Э. В.
(Научный руководитель: доцент, к.п.н. Солощенко М.Ю.)
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета (453100, Стерлитамак, Ленина 47а), e-mail: strbsu.ru

Изучение вероятностно-статистического материала продиктовано самой жизнью. Теория вероятностей в средней школе – это признание обществом необходимости формирования современного мировоззрения. Необходимость формирования вероятностного мышления обусловлена и тем, что вероятностные закономерности универсальны: физика, химия, биология, математика, весь комплекс социально-экономических наук развивается на базе вероятностно-статистической математики. В соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами в программу по математике за курс основной (средней) школы включаются элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей. Основы комбинаторики очень важны для оценки вероятностей случайных событий, т.к. именно они позволяют подсчитать принципиально возможное количество различных вариантов развития событий. В связи с чем, настоящая статья посвящена обучению учащихся решению комбинаторных задач.

Ключевые слова: теория вероятностей, комбинаторика, размещение, перестановки, сочетание.

COMBINATORY TASKS IN A SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

Kalmykov R.K., Kamaletdinova E.V.
(Research supervisor: associate professor Soloshchenko M. Yu.)
Sterlitamak branch of the Bashkir state university (453100, Sterlitamak, Lenina 47a), e-mail: strbsu.ru

Studying of probabilistic and statistical material is dictated by the life. The probability theory at high school is a recognition of need of formation of modern outlook by society. Need of formation of probabilistic thinking is caused also by that probabilistic regularities are universal: the physics, chemistry, biology, mathematics, all complex of social and economic sciences develops on the basis of probabilistic and statistical mathematics. According to Federal state educational standards the program in mathematics for a basic course (average) school joins elements of combination theory, statistics and probability theory. Fundamentals of combination theory are very important for an assessment of probabilities of casual events since they allow to count essentially possible quantity of various options of succession of events. In this connection, the present article is devoted to training of pupils in the solution of combinatory tasks.

Keywords: probability theory, combination theory, placement, shifts, combination.

В настоящее время теория вероятностей завоевала очень серьезное место в науке и прикладной деятельности. Её идеи, методы и результаты не только используются, но и буквально пронизывают все естественные и технические науки.

В нашу жизнь вошли выборы и референдумы, банковские кредиты и страховые полисы, таблицы занятости и диаграммы социологических опросов. Общество все глубже начинает изучать себя и стремиться сделать прогнозы о себе самом и о явлениях природы, которые требуют представлений о вероятности. Теория вероятностей не обошла и учебные заведения. В соответствии с федеральным компонентом Государственного стандарта образования и программу по математике за курс основной (средней) школы включены элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей. В последние годы в заданиях государственной итоговой аттестации (с настоящего года – обязательный государственный экзамен) и единого государственного экзамена по математике предлагаются задачи по теории вероятностей и комбинаторике. Поэтому при обучении математике необходима специальная подготовка по обучению учащихся решению таких задач.

В связи с чем цель нашего исследования: выделить основные методы и типы комбинаторных задач и подобрать комплекс таких задач.

В науке и практике часто встречаются задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций. Такие задачи получили название комбинаторных задач, а раздел математики, в котором рассматриваются подобные задачи, называют комбинаторикой. Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова combinare, которое означает «соединять, сочетать». Методы комбинаторики находят широкое применение в физике, химии, биологии, экономике, теории вероятностей и других областях науки.

В настоящее время практически во всех учебных пособиях по теории вероятностей выделяют следующие основные методы решения комбинаторных задач: перебор всех возможных вариантов (систематический перебор, перебор с ограничениями), полный граф, дерево вариантов (граф-дерево), таблица вариантов, правила произведения и суммы. Факториал. Перестановки. Размещения. Сочетания. Формулы для подсчёта числа перестановок, размещений и сочетаний. Треугольник Паскаля. Бином Ньютона. Комбинированные задачи.

Проведенный анализ научно-методической литературы [1-5] позволил выделить следующие типы комбинаторных задач:

- задачи, в которых требуется перечислить все решения;
- задачи, состоящие в требовании выделить из всех возможных решений такое, которое удовлетворяет заданному дополнительному требованию;
- задачи, в которых требуется подсчитать число решений.

Процесс навыков подсчета комбинаторных объектов, по мнению Н.Ш. Кремера [4], можно расчленить на три этапа в зависимости от времени обучения и методов подсчета:

- подсчет методом непосредственного перебора;
- подсчет с использованием комбинаторных принципов;
- подсчет с использованием формул комбинаторики.

Для примера приведем несколько задач из составленного нами комплекса.

Операция перебора раскрывает идею комбинирования, служит основой для формирования комбинаторных понятий, поэтому на первом месте должна стоять задача по формированию навыков систематического перебора.

Пример 1. Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека – Сидоров, Петров, Иванов и Шилов, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях. Сколько существует вариантов выбора такой пары?

Составим сначала все пары, в которые входит Сидоров (для краткости будем писать первые буквы фамилий). Получим три пары: СП, СИ, СШ.

Выпишем теперь пары, в которые входит Петров, но не входит Сидоров. Таких пар две: ПИ, ПШ.

Далее составим пары, в которые входит Иванов, но не входит Сидоров и Петров. Такая пара только одна: ИШ.

Других вариантов составления пар нет, так как все пары, в которые входит Шилов, уже составлены.

Итак, мы получили 6 пар: СП, СИ, СШ, ПИ, ПШ, ИШ. Значит, всего существует 6 вариантов выбора тренером пары теннисистов из данной группы.

Способ рассуждений, которым мы воспользовались при решении задачи, называют перебором возможных вариантов.

Пример 2. Три подруги – Юля, Света и Катя – приобрели два билета на показ мод на 1-е и 2-е места первого ряда. Сколько у подруг есть вариантов занять эти два места в зале?

Если на показ мод пойдут Юля и Света, то они могут занять места двумя способами: 1-е место – Юля, 2-е – Света, или наоборот. Аналогично Юля и Катя, Света и Катя. Таким образом, мы получили 6 вариантов: ЮК, КЮ, ЮС, СЮ, КС, СЮ.

Пример 3. При встрече представителей большой восьмерки они обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

Данную задачу возможно решить методом непосредственного перебора, и уже в самом начале заметим, что довольно сложно перебирать все возможные варианты и не запутаться, не говоря уже о записи решения этой задачи. Но, введя определенные обозначения - кодирование, решение будет очень легко представить.

Каждому представителю даем номер от 1 до 8, а рукопожатия закодируем следующим образом: например, число 24 означает что 2-ой представитель пожал руку 4-му. Причем число 35 и 53 означают одно и тоже рукопожатие, и брать будем меньшее из них. Коды рукопожатий мы можем оформить следующей таблицей:

12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,

23, 24, 25, 26, 27, 28,

34, 35, 36, 37, 38,

45, 46, 47, 48,

56, 57, 58,

67, 68,

78.

Таким образом, у нас получилось 1+2+3+4+5+6+7=28 рукопожатий.

Еще одним способом подсчета комбинаторных наборов является использование правила суммы.

Пример 4. Из класса нужно выделить одного дежурного, девочку или мальчика. Сколько существует способов для выбора дежурного, если в классе 20 мальчиков и 18 девочек?

Выбрать одного мальчика из 20 мы можем 20-ю способами, а одну девочку из 18 можно 18-тью способами. Тогда выбрать одного дежурного мальчика или девочку можно (18+20) способами.

Для подсчета вариантов мы использовали здесь *правило суммы*, которое можно сформулировать так: если два действия взаимно исключают друг друга, причем одно из них можно выполнить n способами, а другое – m способами, то какое-либо одно из них можно выполнить $n+m$ способами. В нашем примере действия исключают друг друга, так как мы должны выбрать либо мальчика из одного множества, либо девочку из другого.

Пример 5. Преподаватель хочет назначить троих студентов для уборки аудитории. В группе двадцать семь студентов. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Так как порядок студентов не важен, используем формулу для числа сочетаний (выбор любых 3 элементов из 27):

$$C_{27}^{3} = \frac{27!}{3!\,24!} = \frac{27 * 26 * 25}{1 * 2 * 3} = 2925.$$

Пример 6. В классе из 25 учеников нужно выбрать четырех для научной конференции. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок выбранных четырех учеников не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^{4} способами:

$$C_{25}^{4} = \frac{25 * 24 * 23 * 22}{1 * 2 * 3 * 4} = 12650.$$

В рассмотренных примерах использовали формулу сочетания.

Пример 7. Имеются 3 путевки в санаторий. Сколько вариантов распределения можно составить для 5 претендентов?

Решение. Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е.

$$A_{5}^{3} = 5 * 4 * 3 = 60.$$

Пример 8. Расписание одного дня содержит 6 уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из 12 дисциплин.

Решение. Выбор размещения определяется тем, что при построении расписания необходимо учитывать порядок следования уроков.

$$A_{12}^{6} = \frac{12!}{(12-6)!} = 665280.$$

Примеры 7, 8 решались по формуле размещения.

Пример 9. Сколькими способами семь конфет разных марок можно расставить на прилавке в один ряд?

Решение: эта задача о числе перестановок семи разных конфет. По формуле получаем:

$$P_7 = 7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$$

способов осуществить расстановку конфет.

Пример 10. На библиотечной полке стоят 10 книг, причем 8 - книги разных авторов и еще 2 книги автора. Сколькими способами можно расставить эти книги так, чтобы книги одного автора стояли рядом друг с другом?

Временно объединим три книги одного автора в один объект, всего получим 9 объектов - 8 книг и 1 объект из двух книг. Для них число перестановок будет P_9. Теперь три книги переставим между собой P_2способами. По правилу произведения получаем что число способов расставить книги нужным образом равно:

$$P_9 * P_2 = 9! * 2!$$

При подсчете конечного результата была использована формула перестановки.

Разработанный нами комплекс задач будет полезен, как учителям математики, так и студентам во время прохождения педагогической практики.

Список литературы

1. Андронов А.М., Копытов Е.А., Гринглаз Л.Я. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2004. – 461 с.

2. Бунимович Е.А., Булычев В.А. Вероятность и статистика. 5-9 кл.: пособие для общеобразоват. учреждений. – 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2009. – 159 с.

3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. Изд. 6-е, доп. – М.: Высш. шк., 2008. – 405 с.

4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.

5. Матылыцкий М.А. Теория вероятностей в примерах и задачах: Учеб. пособие. – Гродно: ГрГУ, 2002. – 248 с.