

УДК 517.977 - 51-37

Бифуркация состояния равновесия типа фокус. Вычисление значения первой ляпуновской величины
Максим Геннадьевич Келлер

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

E-mail: kellermg@mail.ru

Данная работа посвящена фазовым портретам простейших систем, а так же бифуркации рождения предельного цикла из состояния равновесия- бифуркации Андронова- Хопфа. В работе рассмотрены все возможные состояния неподвижной точки начала координат, так же каждый случай состояния точки сопровождается фазовым портретом системы. Приведены формулы, позволяющие произвести вычисления ляпуновских величин. Переформулирована бифуркационная теорема Андронова- Хопфа, которая приведена в данной работе в авторской трактовке. Автором была разработана процедура в среде Maple 17, которая, позволяет рассчитывать значение первой ляпуновской величины для систем обыкновенных дифференциальных уравнений третьей степени. Так же был рассмотрен пример расчета первой ляпуновской величины для системы Лоренца. Приведены фазовые портреты системы Лоренца, подтверждающие теоретические положения.

Ключевые слова: Бифуркация, предельный цикл, первая ляпуновская величина, система Лоренца

BIFURCATION OF THE EQUILIBRIUM OF TYPE FOCUS. CALCULATION OF SYSTEMS LYAPUNOV'S STABILITY PARAMETER

Keller Maxim

Saint - Petersburg State Polytechnic University
Saint - Petersburg, Russian Federation

The Andronov-Hopf bifurcation of the birth of a limit cycle from an equilibrium in dynamical systems and phase portraits of elementary systems are considered. This article reviews all possible states of a stationary points at the origin and every case is accompanied by phase portrait. The formulas for the calculation of Lyapunov values are given. The bifurcation theorem reformulated with the author's interpretation is given. A procedure in Maple 17 for calculation of the first Lyapunov value for systems of ordinary differential equations of the third order was created. The calculation example for the Lorenz system is showed. The theoretical conclusions are confirmed by the phase portraits of the Lorenz system given.

The Key Words: Bifurcation, limit cycle, first Lyapunov value, Lorenz system.

Работа посвящена анализу явления бифуркации рождения предельного цикла систем дифференциальных уравнений, при которых состояния равновесия меняют тип устойчивости. В частности рассмотрена бифуркация состояния равновесия типа фокус, при которой происходит появление или исчезновение предельных циклов. Исторически эта тема восходит к трудам А.М.Ляпунова, а так же А. Пуанкаре, который в 1892 г. дал метод исследования устойчивости состояния равновесия с парой чисто мнимых характеристических корней и ввёл величины, получившие впоследствии название ляпуновских. Заслуга открытия бифуркации рождения предельного цикла из состояния равновесия с чисто мнимыми корнями при изменении параметров системы и обнаружение

связи этой бифуркации с ляпуновскими величинами принадлежит А. А. Андронову (1931 и 1937 гг.). Перенесение теории на системы с числом уравнений больших двух было выполнено Н. Н. Баутиным в 1941 году. Большой вклад в развитие теории бифуркации внёс математик Х. Хопф, который в 1942 г. сделал обобщения для размерности больше 2.

Задача о нахождении бифуркации рождения предельного цикла из состояния равновесия сводится к нахождению так называемых "ляпуновских величин". Для нахождения первой ляпуновской величины ($L(0)$) применяются формулы, приведённые в [2]. Для выполнения настоящей работы в среде Maple 17 разработана процедура, позволяющая вычислять эти значения для каждой конкретной системы уравнений.

Фазовые портреты простейших систем. Дана линейная система:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$$

И предположим, что матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ имеет собственные числа λ_1, λ_2 . При этом будем считать, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Если λ_1 и λ_2 одного знака, то неподвижная точка в начале координат плоскости u_1, u_2 (где u_1 и u_2 - собственные вектора) называется узлом. Если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ то все траектории направлены от начало координат (к нему, если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$), то узел называется неустойчивым (устойчивым). Устойчивый узел представлен на рисунке 1. неустойчивый- рисунке 2.

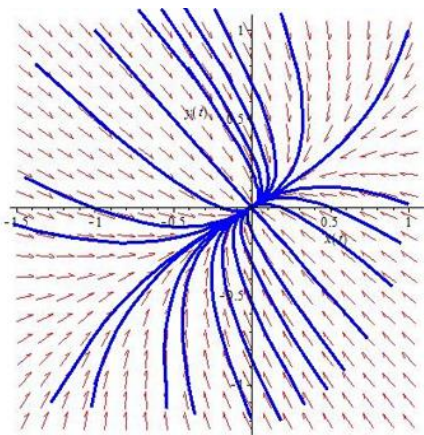


Рис. 1. Устойчивый узел

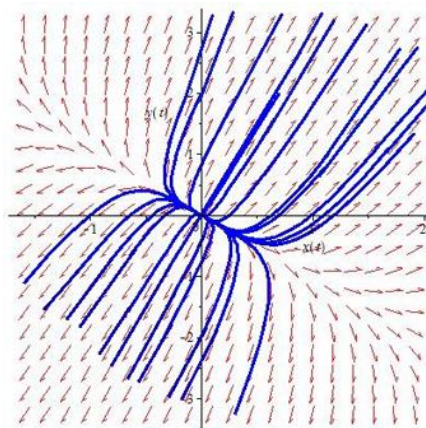


Рис. 2. Неустойчивый узел

Если λ_1 и λ_2 имеют противоположные знаки, то возникает фазовый портрет, изображенный на рисунке 3. Траектории направлены к началу координат (от него), если соответствующее собственное значение отрицательно (положительно). В таком случае начало координат называется седлом или седловой точкой.

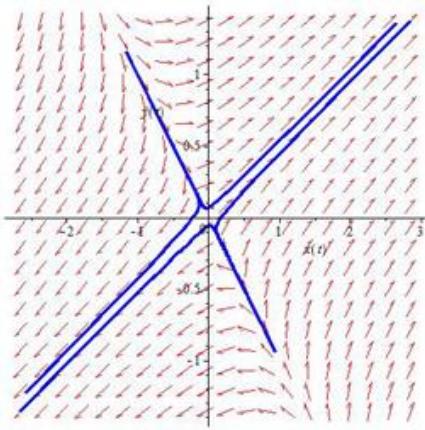


Рис. 3. Седло

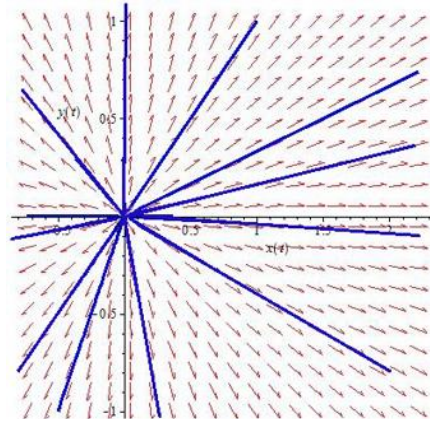


Рис. 4. Неустойчивый дискретный узел

Когда собственные числа имеют равные значения, случай соответствует узлу специального вида, который называется дискретическим узлом. Этот узел устойчив при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 < 0$, неустойчив при $\lambda_0 > 0$.

Все его нетривиальные траектории являются радиальными лучами. Фазовый портрет, соответствующий точке типа дискретический узел, изображен на рисунке 4.

Если матрица не диагональная, т.е. имеет вид $\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$, то фазовый портрет имеет вид, представленный на картинках 5 и 6.

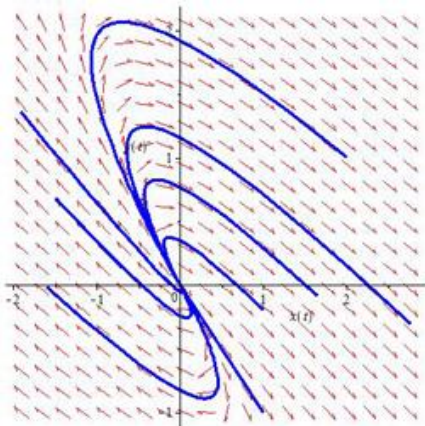


Рис. 5. Вырожденный неустойчивый узел

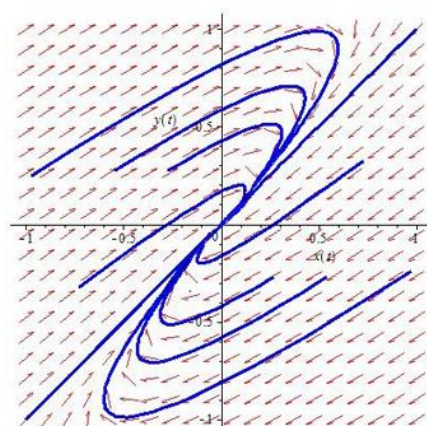


Рис. 6. Вырожденный устойчивый узел

В этом случае начало координат называется вырожденным узлом; он устойчив при $\lambda_0 < 0$ и неустойчив при $\lambda_0 > 0$.

Когда собственные значения комплексные числа, матрица имеет вид $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\beta > 0$. Если $\alpha \neq 0$, то начало координат называется фокусом (неустойчивым при $\alpha > 0$, устойчивым при $\alpha < 0$). Фазовый портрет подобных систем представлен на рисунке 7.

Если $\alpha = 0$, то начало координат называется центром и фазовый портрет состоит из континуума концентрических кругов. Пример фазового портрета подобной системы представлен на рисунке 8. Это единственный случай, когда в линейных системах возникает периодическое решение.

Другой тривиальный случай периодических решений для линейных систем- это неподвижные точки.

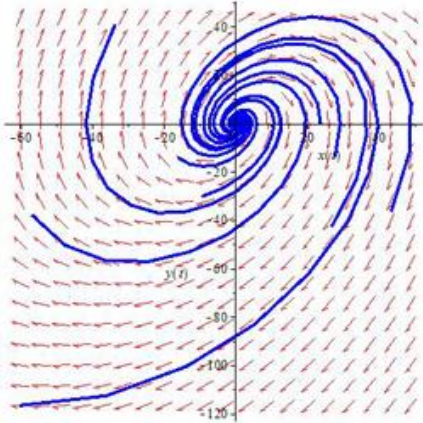


Рис. 7. Неустойчивый фокус

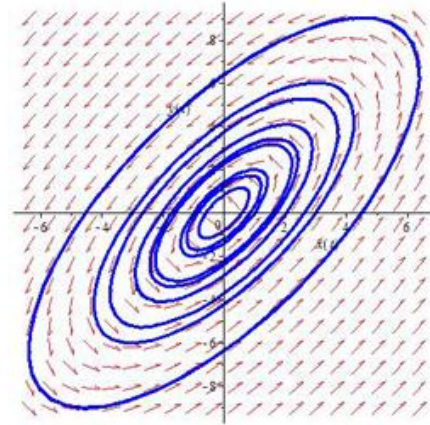


Рис. 8. Центр

Исследование первой ляпуновской величины. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \\ \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}y^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3. \end{cases}$$

Тогда значение первой ляпуновской величины рассчитывается по формуле:

$$L(0) = -\frac{\pi}{4\beta} [3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21})] + \frac{\pi}{4\beta^2} [2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) - a_{11}(a_{02} + a_{20}) + b_{11}(b_{02} + b_{20})].$$

В качестве примера рассмотрим систему из [1]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6y - 6\mu x - 2\mu y^2 + (6 + 2\mu)xy + 3\mu y^2, \\ \frac{dy}{dt} = -6x + 6\mu y - 2x^2 + (2 - 6\mu)xy + 3y^2, \end{cases} \quad (1)$$

Где μ - вещественный параметр, причём $\mu > 0$ и достаточно мало.

При $\mu = 0$ получим систему вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6y + 6xy, \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 2x^2 + 2xy + 3y^2. \end{cases}$$

Рассмотрим состояние равновесия $O(0, 0)$ линейного приближения данной системы. Для подсчёта в среде Maple17 была написана процедура, позволяющая вычислить значение первой ляпуновской по формуле для $L(0)$. Тогда $L(0) = \pi/72$ то есть $O(0, 0)$ при $\mu = 0$ является неустойчивым фокусом. Этот вывод подтверждается фазовым портретом данной системы (рис. 9).

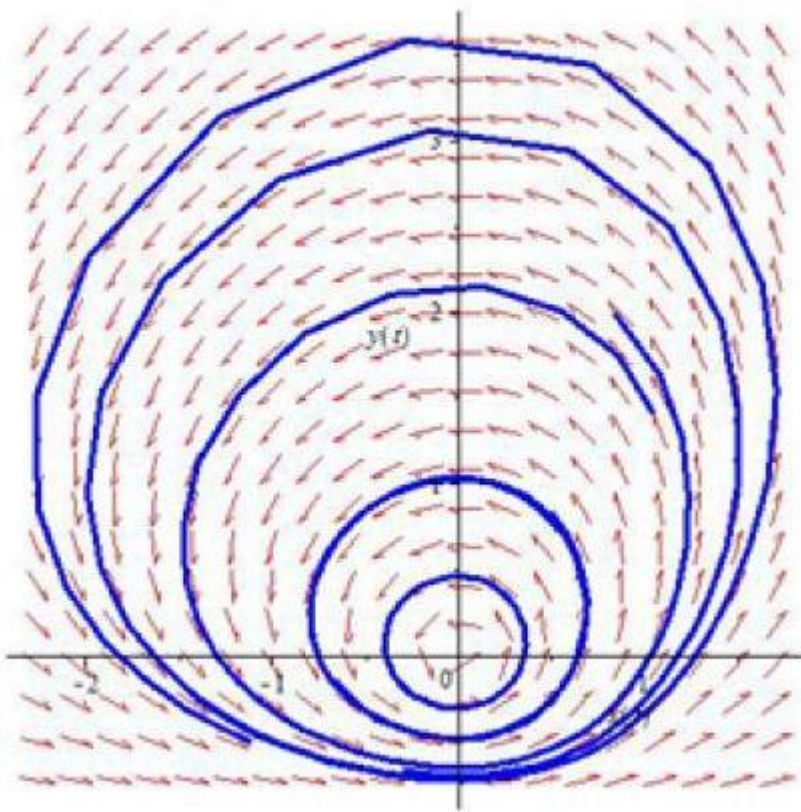


Рис. 9: Фазовый портрет системы (1).

Как и для двумерных систем, для трёхмерных в среде Maple 17 была разработана процедура, позволяющая рассчитать значение первой ляпуновской величины для каждой конкретной системы уравнений.

Аналогично двумерному случаю, определим вид системы дифференциальных уравнений, которая и будет объектом исследования.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha x + Q_1(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} = -\beta z + Q_2(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = \beta y + Q_3(x, y, z). \end{cases} \quad (1)$$

где

$$Q_j(x, y, z) = A_{11}^{(j)}x^2 + A_{22}^{(j)}y^2 + A_{33}^{(j)}z^2 + 2A_{12}^{(j)}xy + 2A_{13}^{(j)}xz + 2A_{23}^{(j)}yz + A_{111}^{(j)}x^3 + A_{222}^{(j)}y^3 + A_{333}^{(j)}z^3 + 3A_{112}^{(j)}x^2y + 3A_{113}^{(j)}x^2z + 3A_{122}^{(j)}xy^2 + A_{223}^{(j)}y^2z + A_{133}^{(j)}xz^2 + 3A_{233}^{(j)}yz^2 + 6A_{123}^{(j)}xyz + \dots$$

Будем говорить, что состояние равновесия системы (1) находится в точке $O(0, 0)$. Это означает, что в данной точке $Q_1(x, y, z) = Q_2(x, y, z) = Q_3(x, y, z) = 0$. Так же следует отметить, что все три функции - гладкие и имеют производные до порядка N включительно.

$$L(0) = \alpha_3 = \frac{\pi}{4\beta^2} \left[2(A_{33}^{(2)}A_{33}^{(3)} - A_{22}^{(2)}A_{22}^{(3)}) + 2A_{23}^{(2)}(A_{22}^{(2)} + A_{33}^{(2)}) - 2A_{23}^{(3)}(A_{22}^{(3)} + A_{33}^{(3)}) + 3\beta(A_{222}^{(2)}A_{333}^{(3)} + A_{233}^{(2)} + A_{233}^{(3)}) \right] + \frac{\pi}{4p\beta(p^2 + 4q)} \left\{ p^2 \left[2A_{22}^{(1)}(3A_{12}^{(2)} + A_{13}^{(3)}) + 2A_{33}^{(1)}(A_{12}^{(2)} + 3A_{13}^{(1)}) + 4A_{23}^{(1)}(A_{13}^{(2)} + A_{12}^{(3)}) \right] + 4p\beta \left[(A_{22}^{(1)} - A_{33}^{(1)})(A_{13}^{(2)} - A_{12}^{(3)}) + 2A_{23}^{(1)}(A_{13}^{(3)} - A_{12}^{(2)}) \right] + 16\beta^2(A_{22}^{(1)} + A_{33}^{(1)})(A_{12}^{(2)} + A_{13}^{(3)}) \right\}.$$

Для дальнейшего исследования автору необходимо было бифуркационная теорема[2, 4]. На основании анализа имеющихся источников автором была предложена собственная трактовка доказательства бифуркационной теоремы, формулировка которой приведена ниже также в авторской редакции.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y + \varphi(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y + \omega(x, y), \end{cases}$$

Наше первое предложение заключается в том, что

$$\alpha(0) = 0, \beta(0) \neq 0. \quad (a)$$

Второе условие состоит в том, что первая ляпуновская величина не равна нулю.

$$L(0) \neq 0. \quad (б)$$

Предложения (а) и (б) означают, что $O(0, 0)$ - нелинейный фокус при $\mu=0$. Устойчивый при $L(0) < 0$ и неустойчивый при $L(0) > 0$.

Третье предположение состоит в условии, что скорость не равна нулю.

$$\alpha'(0) \neq 0. \quad (в)$$

Пусть выполнены предположения (а), (б), (в). Тогда найдётся такое значение параметра $\sigma > 0$ и такая окрестность U точки $(x, y) = (0, 0)$, что

- (I) Если $|\mu| < \sigma$ и $L(0)\alpha'(0)\mu < 0$, то система (1) имеет в точности один предельный цикл внутри окрестности U ;

(II) Если $|\mu| < \sigma$ и $L(0)\alpha'(0)\mu \geq 0$, то система (1) не имеет периодических орбит внутри окрестности U.

Кроме того, предельный цикл, возникающий в случае (I) устойчив (неустойчив) при $L(0) < 0$ ($L(0) > 0$), и стягивается к неподвижной точке, когда $\mu \rightarrow 0$.

В качестве примера рассмотрим модель Лоренца турбулентного движения жидкости. Данная модель описывается системой:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}$$

Где b, r, σ - положительные параметры. Для $r \leq 1$ существует единственное состояние равновесия в начале координат. При возрастании r от значения $r = 1$ из состояния равновесия в начале координат появляются устойчивые состояния равновесия:

$$O_1 \left[b^{\frac{1}{2}}(r - 1)^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{2}}(r - 1)^{\frac{1}{2}}, r - 1 \right]$$

и

$$O_2 \left[-b^{\frac{1}{2}}(r - 1)^{\frac{1}{2}}, -b^{\frac{1}{2}}(r - 1)^{\frac{1}{2}}, r - 1 \right],$$

которые могут поменять устойчивость, когда корни их характеристических уравнений становятся комплексными и их действительные части проходят через ноль.

Пользуясь рассуждениями, приведенными в[3], приходим к выводу, что значение первой ляпуновской величины для данной системы неотрицательно, однако точного значения не приводится.

Для определения точного значения первой ляпуновской величины в среде Maple 17 была разработана процедура, которая, позволила рассчитать эту величину для системы Лоренца при $\sigma = 10$ и $\beta = 8/3$. Получилось, что $L(0) = 10.3764756164464\pi$, что подтверждает результат, описанный в[6].

В случае, когда первая ляпуновская величина положительна, говорят, что граница области опасная. Таким образом, в модели Лоренца граница области устойчивости является опасной.

Для наглядности и подтверждения теоретических выкладок построены фазовые портреты системы Лоренца для значений параметров, для которых было рассчитано значение первой ляпуновской величины. Эти фазовые портреты приведены на рис.10,11.

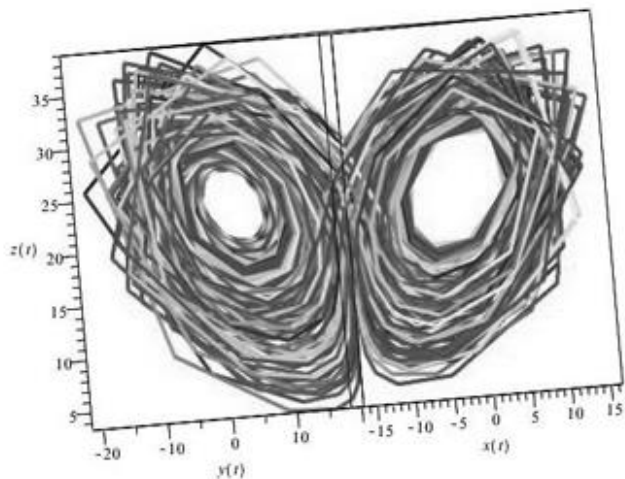


Рис. 10 Фазовый портрет системы Лоренца

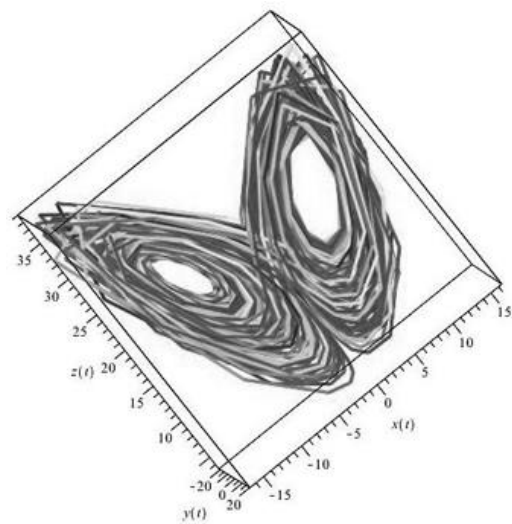


Рис. 11 Фазовый портрет системы Лоренца

Вывод: Формула для вычисления первой ляпуновской величины хорошо известна. С целью облегчения процесса выявления знака данной величины, была составлена процедура, позволяющая точно определить значение первой ляпуновской величины. Удобные сервисы позволяют представлять полученные данные графически как для двумерных систем, так и для трёхмерных.

Полученный результат согласован с результатами других работ и подтверждается средствами качественной теории, а именно, видом фазовых портретов.

Список Литературы:

- [1] Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. С. 56- 62.
- [2] Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш. Н. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. МЦНМО, 2005.
- [3] Гукенхеймер Дж., Ф. Холмс. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Институт компьютерных исследований, 2002. С. 125- 130.
- [4] Марсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения, 1980.
- [5] Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Качественная теория с приложениями. Мир, 1986.