

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЯДРА  ${}^9\text{Be}$

Баяхметов О.С.

Евразийский национальный университет  
им. Л.Н. Гумилева, Астана, e-mail: olzhik1992@mail.ru

Согласно проведенным исследованиям в настоящее время очень актуальным является изучение взаимодействия  $\alpha$ -частиц и нуклонов с ядром  ${}^9\text{Be}$  для разнообразных приложений, в частности для проблемы управляемого термоядерного синтеза и в атомной технике. В работе описано исследование мультикласстерной  $(2\alpha+n)$ -модели ядра  ${}^9\text{Be}$  с вычислением его статистических характеристик.

Трехчастичная  $(2\alpha+n)$ -модель ядра  ${}^9\text{Be}$

Для описания ядра  ${}^9\text{Be}$  используется трехчастичная модель  $2\alpha+n$  (см.рис.1) с тремя парными  $\alpha n$  и  $\alpha\alpha$  – взаимодействиями, включающими состояния, запрещенные принципом Паули.

Волновая функция ядра  ${}^9\text{Be}$

Базисная волновая функция относительно координат Якоби (см.рис.1) [1]:

$$\Psi^{JM_J}(\vec{x}_1, \vec{y}_1) = \sum_{ij} C_{ij}^{\lambda\lambda} x_1^\lambda y_1^i \exp\{-\alpha_i x_1^2 - \beta_j y_1^2\} \times \sum_{\mu m} C_{\lambda\mu m}^{LM_L} Y_{\lambda\mu}(\hat{x}_1) Y_{lm}(\hat{y}_1) \sum_{M_L M_S} C_{LM_L M_S}^{JM_J} \mathcal{X}_{SM_S}, \quad (1)$$

где  $C_{\lambda\mu m}^{LM_L}$ ,  $C_{LM_L M_S}^{JM_J}$  – коэффициенты Клебша-Гордана;

$Y_{\lambda\mu}(\hat{x}_1) Y_{lm}(\hat{y}_1)$  – сферические функции относительных координат;

$\mathcal{X}_{SM_S}$  – спиновая функция системы;

$\lambda, l$  – относительные орбитальные моменты ( в координатах Якоби);

$\sum_{ij} C_{ij}^{\lambda\lambda} x_1^\lambda y_1^i \exp\{-\alpha_i x_1^2 - \beta_j y_1^2\}$  – радиальная часть волновой функции ( Гауссоида).

$$Y_{\lambda l}^{LM_L}(\vec{x}_1, \vec{y}_1) = \sum_{\mu m} C_{\lambda\mu m}^{LM_L} Y_{\lambda\mu}(\hat{x}_1) Y_{lm}(\hat{y}_1) \quad (2)$$

Формула (2) выражает угловую часть волновой функции (1).

Волновая функция допускает чисто алгебраическую пересвязку к другому набору координат Якоби. В частности, преобразование радиально-угловой части базисной волновой функции (1) от набора 1 к набору 2 (см.рис.1) имеет вид:

$$x_1^\lambda y_1^i Y_{\lambda l}^{LM_L}(\hat{x}_1, \hat{y}_1) \exp\{-\alpha^{(\lambda)} x_1^2 - \beta^{(l)} y_1^2\} = \sum_{L_1 L_2} \sum_{j_1 j_2} A_{\lambda l j_1 j_2}^{L_1 L_2 Q} x_2^{L_1+L_2} y_2^{\lambda+l-L_1-L_2} Y_{j_1 j_2}^{LM_L}(\hat{x}_2, \hat{y}_2) \times \exp\{-\alpha^{(\alpha)} x_2^2 - \beta^{(\beta)} y_2^2 - \gamma^{(\lambda l)}(\vec{x}_2, \vec{y}_2)\}, \quad (3)$$

где алгебраический коэффициент  $A_{\lambda l j_1 j_2}^{L_1 L_2 Q}$  определяется по формуле:

$$A_{\lambda l j_1 j_2}^{L_1 L_2 Q} = (-1)^{\lambda+l} \cdot (Q_{11})^{L_1} \cdot (Q_{12})^{\lambda-L_1} \cdot (Q_{21})^{L_2} \cdot (Q_{22})^{l-L_2} \cdot \left[ \frac{[\lambda][l][L_1][L_2][\lambda-L_1][l-L_2][j_1][j_2]}{[L_1][L_2][\lambda-L_1][l-L_2]} \right] \times \langle L_1 0 L_2 0 | j_1 0 \rangle \langle (\lambda-L_1) 0 (l-L_2) 0 | j_2 0 \rangle \begin{Bmatrix} L_1 & \lambda-L_1 & \lambda \\ L_2 & l-L_2 & l \\ j_1 & j_2 & L \end{Bmatrix}$$

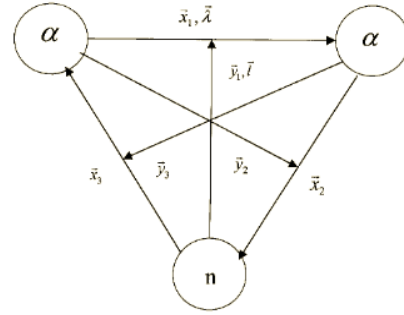


Рис.1. Выбор наборов внутренних координат Якоби.

Статистические характеристики

В данном параграфе мы покажем выводы статистических характеристик основного состояния для ядра  ${}^9\text{Be}$  в трехтельной модели, для чего сначала выразим все операторы, записанные в одночастичных координатах, через относительные координаты, – координаты Якоби.

Среднеквадратичный зарядовый радиус

Среднеквадратичный зарядовый радиус  $\langle r_{ch}^2 \rangle$  определяется следующим выражением [2]:

$$\langle r_{ch}^2 \rangle = \frac{1}{Ze} \int r^2 \rho_{ch}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (4)$$

Здесь  $Ze$ - заряд ядра. Одночастичная зарядовая плотность  $\rho_{ch}(\vec{r})$  имеет следующий вид:

$$\rho_{ch}(\vec{r}) = \left\langle \Psi_{JM_J}^{tot} \left| \sum_{k=1}^A \hat{e}_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) \right| \Psi_{JM_J}^{tot} \right\rangle,$$

Для вычисления  $\langle r_{ch}^2 \rangle$  в  $2\alpha+n$  – модели нужно перейти от одночастичных координат  $\vec{r}_k$  к новым:

$$\vec{r}_k = \vec{R}_c(i) + \vec{r}_k(i), \quad (5)$$

где  $i=1$  для  $k=1-4$  и  $i=2$  для  $k=5-8$ .  $\vec{R}_c(i)$  – координаты центра масс частицы относительно всего ядра,  $\vec{r}_k(i)$  – координаты  $k$ -го нуклона частицы относительно ее центра масс. Координаты центра масс частиц выражаются через координаты:

$$\vec{R}_c(1) = \frac{1}{2} \vec{x}_1 + \frac{1}{9} \vec{y}_1, \quad \vec{R}_c(2) = \frac{1}{2} \vec{x}_1 + \frac{1}{9} \vec{y}_1,$$

После несложных вычислений для  $\langle r_{ch}^2 \rangle$  получим

$$\langle r_{ch}^2 \rangle = \frac{2Z_\alpha}{Ze} \left[ \langle r_{ch}^2(\alpha) \rangle + \frac{1}{4} \langle x_1^2 \rangle + \frac{1}{81} \langle y_1^2 \rangle \right], \quad (6)$$

где матричные элементы для и могут быть легко найдены:

$$\langle x_1^2 \rangle = \sum_{ij\lambda l} C_{ij}^{(\lambda l)} C_{i'j'}^{(\lambda l')} I(x_1^4, a) I(y_1^2, \beta) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{ll'} \delta_{SS'},$$

$$\langle y_1^2 \rangle = \sum_{ij\lambda l} C_{ij}^{(\lambda l)} C_{i'j'}^{(\lambda l')} I(x_1^4, a) I(y_1^2, \beta) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{ll'} \delta_{SS'},$$

Здесь использованы следующие обозначения для радиальных интегралов:

$$I(x_1^n, a) = \int x_1^{\lambda+\lambda'+n} \exp\{-a_{ii'}^{(\lambda\lambda')} x_1^2\} dx_1,$$

$$I(y_1^n, \beta) = \int y_1^{l+l'+n} \exp\{-\beta_{jj'}^{(ll')} y_1^2\} dy_1,$$

$$a_{ii'}^{(\lambda\lambda')} = a_i^{(\lambda)} + a_{i'}^{(\lambda')}, \quad \beta_{jj'}^{(ll')} = \beta_j^{(l)} + \beta_{j'}^{(l')}.$$

**Магнитный момент**

Оператор магнитного момента  $\hat{\mu}$  системы состоящей из трех частиц, имеет вид [2]:

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^3 \left[ \hat{\mu}(i) + \mu_0 m_N \frac{\hat{z}_i \hat{l}_i}{m_i} \right],$$

где  $\mu_0$  – ядерный магнетон Бора,  $\hat{\mu}(i)$  – оператор внутреннего магнитного момента  $i$ -й частицы,  $\hat{l}$  – оператор орбитального момента  $i$ -й частицы массой  $m_i$ ;  $m_N$  – масса нуклона. Перейдем от моментов  $\hat{l}_i$  к моментам  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{l}$ :

$$\hat{\mu} = 2\mu_n \hat{S} + \frac{1}{2} (\hat{\lambda} + \hat{l}) \quad (7)$$

Перепишем выражение (7) для  $\hat{\mu}$  в другом виде, для простоты опустим знак оператора  $\hat{\cdot}$ :

$$\bar{\mu} = 2\mu_n \bar{J} + \left( \frac{1}{2} - 2\mu_n \right) \bar{L} - \frac{4}{9} \bar{I}$$

Магнитным моментом ядра  $\mu$  называется величина:

$$\mu = \langle \Psi_{JM_J}^{tot} | \mu_z | \Psi_{JM_J}^{tot} \rangle.$$

При расчете магнитного момента воспользуемся следующей формулой:

$$\langle \Psi_{JM_J}^{tot} | A_z | \Psi_{JM_J}^{tot} \rangle = \frac{M_J}{J(J+1)} \langle \Psi_{JM_J}^{tot} | \bar{A} \cdot \bar{J} | \Psi_{JM_J}^{tot} \rangle > \delta_{M_J M_J},$$

$$\text{а также } \bar{L} \cdot \bar{J} = \frac{1}{2} (\bar{J}^2 + \bar{L}^2 - \bar{S}^2).$$

Учтя это, мы получим  $\mu = M_1 + M_2$ , где

$$M_1 = \frac{1}{J+1} \sum_{ij\lambda l} C_{ij}^{(\lambda l)} C_{ij'}^{(\lambda' l')} I(x_1^2, \alpha) I(y_1^2, \beta) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{l l'} \delta_{L L'} \delta_{S S'} \times \\ \times \left[ \left( \frac{1}{4} + \mu_n \right) J(J+1) + \left( \frac{1}{4} - \mu_n \right) \{ L(L+1) - S(S+1) \} \right]. \quad (8)$$

Член  $M_1$  можно представить через веса  $P_k$  компонента  $\mathcal{Y}_k$ :

$$M_1 = \sum_{k=1}^m \left[ \left( \frac{1}{4} + \mu_n \right) J + \left( \frac{1}{4} - \mu_n \right) \frac{L_k(L_k+1) - S_k(S_k+1)}{J+1} \right] \cdot P_k,$$

где  $m$  – число учитываемых конфигураций. А второй член выражении для магнитного момента равен:

$$M_2 = \sum_{ij\lambda l} C_{ij}^{(\lambda l)} C_{ij'}^{(\lambda' l')} I(x_1^2, \alpha) \times \\ \times I(y_1^2, \beta) \langle (\lambda' l') L' S' : J | [Y_{\hat{e}_1}(\hat{x}_1) \otimes Y_{\hat{e}_2}(\hat{y}_1)]^2 | (\lambda l) L S : J \rangle.$$

**Квадрупольный момент**

Квадрупольный момент ядра  $Q$  определяется следующим выражением [2]:

$$Q = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \cdot \frac{1}{2} \langle \Psi_{JM_J}^{tot} | \sum_{k=1}^A \hat{e}_k Y_{20}(\vec{r}_k) | \Psi_{JM_J}^{tot} \rangle, \quad (9)$$

где  $Y_{20}(\vec{r}_k) = r_k^2 Y_{20}(\hat{r}_k)$  – пространственная сферическая гармоника. Снова переходя от одночастичных координат  $\vec{r}_k$  к новым, согласно соотношению  $\vec{r}_k = \vec{R}_c(i) + \vec{r}_k(i)$  и используя следующую формулу (10):

$$Y_{lm}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \sum_{l_1 m_1, l_2 m_2} \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | lm \rangle \delta_{l_1+l_2, l} \sqrt{\frac{4\pi [l]!}{[l_1]! [l_2]!}} Y_{l_1 m_1}(\vec{r}_1) Y_{l_2 m_2}(\vec{r}_2),$$

получаем:

$$Q = 32\sqrt{6} Z_\alpha \frac{\langle JJ20 | JJ \rangle}{\sqrt{[J]}} \sum_{ij\lambda l} C_{ij}^{(\lambda l)} C_{ij'}^{(\lambda' l')} \times \\ \times \sum_{\hat{e}_1 \hat{e}_2} \delta_{\hat{e}_1 + \hat{e}_2, 2} \left( \frac{1}{2} \right)^{\hat{e}_1} \left( \frac{1}{9} \right)^{\hat{e}_2} \frac{[1 + (-1)^{\hat{e}_1}]}{2\sqrt{[\hat{e}_2]!} [\hat{e}_2]!} I(x_1^{\hat{e}_1-2}, \alpha) I(y_1^{\hat{e}_2-2}, \beta) \times \\ \times \langle (\lambda' l') L' S' : J | [Y_{\hat{e}_1}(\hat{x}_1) \otimes Y_{\hat{e}_2}(\hat{y}_1)]^2 | (\lambda l) L S : J \rangle. \quad (11)$$

В формуле (11) для приведенного матричного элемента использованы стандартные обозначения.

**Октупольный момент**

Октупольный момент ядра  $\Omega$  называется величина [2]:

$$\Omega = -\sqrt{\frac{4\pi}{7}} \frac{\langle JJ30 | JJ \rangle}{\sqrt{2J+1}} \langle \Psi_{JM_J}^{tot} | \hat{M}_{30} | \Psi_{JM_J}^{tot} \rangle, \quad (12)$$

где  $\hat{M}_{30}$  – оператор октупольного момента – состоит из двух частей:

$$\hat{M}_{30} = \hat{M}_{30}(\sigma) + \hat{M}_{30}(I).$$

Спиновая часть оператора октупольного момента

$$\hat{M}_{30}(\sigma) = \sqrt{21} \mu_0 \sum_{k=1}^A g_s(k) [Y_2(\vec{r}_k) \times \hat{S}_k]_{30}.$$

Здесь  $Y_{20}(\vec{r}_k) = r_k^2 Y_{20}(\hat{r}_k)$  – пространственная сферическая гармоника, ядерный магнетон Бора. Спиновое гиромагнитное соотношение равно:

$$\frac{1}{2} g_s(k) = \begin{cases} \mu_p = 2.79 & \text{для протона,} \\ \mu_n = -1.91 & \text{для нейтрона.} \end{cases}$$

Орбитальная часть оператора октупольного момента:

$$\hat{M}_{30}(I) = \frac{\sqrt{21}}{2} \mu_0 \sum_{k=1}^A \hat{e}_k [Y_2(\vec{r}_k) \times \hat{l}_k]_{30}.$$

Матричный элемент от спиновой части равен:

$$\langle \Psi_{JM_J}^{tot} | \hat{M}_{30}(\sigma) | \Psi_{JM_J}^{tot} \rangle = \frac{128}{81} \sqrt{21} \mu_0 \mu_n \frac{\langle JJ30 | JJ \rangle}{\sqrt{[J]}} \sum_{ij\lambda l} C_{ij}^{(\lambda l)} C_{ij'}^{(\lambda' l')} \times \\ \times I(x_1^2, \alpha) I(y_1^4, \beta) \langle (\lambda' l') L' S' : J | [Y_2(\hat{r}_k) \times \hat{S}]_3 | (\lambda l) L S : J \rangle.$$

Орбитальную часть матричного элемента от оператора преобразуем к виду

$$\hat{M}_{30}(I) = \frac{25}{162} \sqrt{21} \mu_0 \frac{Z_\alpha m_N}{m_a} \left\{ [Y_2(\hat{y}_2) \times \hat{l}(\hat{y}_2)]_{30} + [Y_2(\hat{y}_3) \times \hat{l}(\hat{y}_3)]_{30} \right\}.$$

Волновая функция (1) допускает чисто алгебраическую пересвязку к другому набору координат Якоби, что мы и используем при расчете матричного элемента от орбитальной части оператора октупольного момента. При преобразовании функции от набора координат 1 к набору 2 (см.рис. 1), где двумерная гауссоида преобразуется:

$$\exp \{ -a_i^{(\lambda)} x_1^2 - \beta_j^{(l)} y_1^2 \} =$$

$$= \exp \{ -\mu_q^{(\lambda)} x_q^2 - \nu_q^{(\lambda)} y_q^2 - \rho_q^{(\lambda)} (\vec{x}_q \cdot \vec{y}_q) \}$$

Аналогичным образом преобразуется гауссоида

$$\exp \{ -a_i^{(\lambda)} x_1^2 - \beta_j^{(l)} y_1^2 \}.$$

Для того чтобы исключить перекрестный член  $\rho^{yy'}(\bar{x}_q, \bar{y}_q)(\rho^{y'y} + \rho^{y'})$  в экспоненте, совершаем еще одно преобразование координат Якоби. В результате этого преобразования получаем:

$$\exp\{-\mu_q^{yy'} x_q^2 - \nu_q^{yy'} y_q^2 - \rho_q^{yy'}(\bar{x}_q, \bar{y}_q)\} = \exp\{-\mu_q^{yy'} x'^2 - \omega_q^{yy'} y'^2\},$$

Учитывая формулы для матричного элемента от орбитальной части оператора, получаем:

$$\langle \Psi_{JJ}^{tot} | \hat{M}_{30}(l) | \Psi_{JJ}^{tot} \rangle = \frac{25}{81} \sqrt{21} \mu_0 \frac{Z_a m_N}{m_a} \frac{\langle JJ30 | JJ \rangle}{\sqrt{[J]}} \sum_{\substack{ij\lambda \\ i'j'\lambda'}} C_{ij}^{(\lambda)} C_{i'j'}^{(\lambda')} \times$$

$$\times \sum_{l_1=0}^{\lambda} \sum_{l_2=0}^l \sum_{j_1, j_2} \sum_{l_3=0}^{\lambda'} \sum_{l_4=0}^{l'} \sum_{j_3, j_4} \frac{[1 + (-1)^{\lambda+\lambda'+n}]}{2} A_{j_1 j_2}^{L_1 L_2 Q_2} A_{j_3 j_4}^{L_3 L_4 Q_2} \times$$

$$\times J(\mu x') J(\omega y') \langle j_3 j_4 | L'S' : J \parallel [Y_2(\hat{y}) \times \hat{l}(\hat{y})]_3 \parallel (j_1 j_2) | LS : J \rangle,$$

где радиальные интегралы  $J(\mu x')$  и  $J(\omega y')$  равны:

$$J(\mu x') = \int_0^{\infty} x'^{m+2} \exp(-\mu_2^{yy'} x'^2) dx',$$

$$J(\omega y') = \int_0^{\infty} y'^{m-n+2} \exp(-\omega_2^{yy'} y'^2) dy',$$

$$n = L_1 + L_2 + L_3 + L_4, \quad m = \lambda + \lambda' + l + l'.$$

**Список литературы**

1. Кукулин В.И. и др. Изучение структуры и свойств ядер с  $A=9(^9Be-^9B)$  в рамках мультикластерной динамической модели  $2\alpha + N$  // Ядерная физика. – 1994. – Т.57, №11. – С. 1964-1980.  
 2. Бор О., Моттelson Б. Структура атомного ядра. – М.: Мир, 1971. – Т.1. – С. 321-335.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ИЗОКЛИН ПРИ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

Веретеников А.С., Потапов Д.Н.

Самарская государственная сельскохозяйственная академия, Усть-Кинельский, e-mail: Plot.02@mail.ru

Дифференциальное уравнение первого порядка  $\dot{y} = f(x, y)$  имеет общее решение  $y = y(x, C)$ , которое определяет собой семейство интегральных кривых на плоскости  $xOy$ .

Если переменные  $x$  и  $y$  правой части дифференциального уравнения рассматривать как координаты точки  $M(x, y)$  плоскости  $xOy$ , то производная  $y'$  выражает угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке  $M(x, y)$ . Таким образом, дифференциальное уравнение  $\dot{y} = f(x, y)$  определяет в каждой точке плоскости  $xOy$ , принадлежащей области существования функции  $f(x, y)$ , направление интегральной кривой, проходящей через эту точку, или определяет поле направлений на плоскости  $xOy$ .

Изображая направление в каждой точке области существования функции  $f(x, y)$  маленькой стрелкой, выходящей из этой точки, можно построить поле направлений дифференциального уравнения, которое дает приближенное представление о расположении интегральных кривых этого уравнения.

Изоклинами дифференциального уравнения  $\dot{y} = f(x, y)$  называются геометрические места точек плоскости  $xOy$ , в которых интегральные кривые уравнения имеют одно и то же направление. Уравнение  $f(x, y) = k$  является уравнением изоклины, соответствующей за-

данному направлению  $y' = k$ , где  $k$  – параметр. Придавая  $k$  близкие числовые значения, получается достаточно густая сеть изоклин – семейство изоклин, с помощью которых можно приближенно построить интегральные кривые дифференциального уравнения. Нулевая изоклина  $f(x, y) = 0$  дает уравнение линий, на которых могут находиться точки максимума и минимума интегральных кривых. Точки пересечения двух или нескольких изоклин могут быть особыми точками дифференциального уравнения, т.е. такими точками, в которых правая часть уравнения  $\dot{y} = f(x, y)$  не определена.

Метод изоклин состоит в следующем:

1. Строится достаточно густая сетка изоклин для различных значений  $k$  и на каждой изоклине изображаются небольшие отрезки с наклоном  $k$ .

2. Начиная из точки  $(x_0, y_0)$ , поводится линия, которая, будет пересекать каждую изоклину под углом, заданным полем направлений. Полученная таким образом кривая и будет приближенным изображением (эскизом) интегральной кривой уравнения, проходящей через точку  $(x_0, y_0)$ .

Пусть дано уравнение  $y' = y - x^2$  и требуется построить поле направлений и интегральные кривые, определяемые этим уравнением.

Сначала строятся графики изоклин. Уравнение семейства изоклин данного уравнения  $y - x^2 = k$  или  $y = x^2 + k$ . Изоклина представляют собой семейство квадратичных парабол с осями, совпадающими с осью  $Ox$ . Меняя параметр  $k$ , получается семейство графиков изоклин, на них строится поле направлений.

При  $k=0$  получается изоклина  $y = x^2$ , во всех точках которой направление поля параллельно оси  $Ox$  (Рис. 1).

При  $k=1$  получается изоклина  $y = x^2 + 1$ , во всех точках которой направление поля образует с осью  $Ox$  угол  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

При  $k=-1$  получается изоклина  $y = x^2 - 1$ , во всех точках которой направление поля образует с осью  $Ox$  угол  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ .

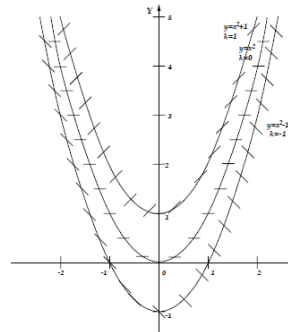


Рис. 1. Поле направлений уравнения  $y' = y - x^2$ .

Задается определенная точка  $(x_0, y_0)$  и поводится линия, которая, будет пересекать каждую изоклину под углом, заданным полем направлений. На рис. 2 показаны интегральные кривые, касающиеся поля направлений.

Метод изоклин как метод приближенного решения задачи Коши устарел. В его в основе лежит алгоритм изображения фрагмента поля направления, а современные компьютеры могут мгновенно и как угодно подробно нарисовать поле направлений, и достаточно точно изобразить интегральную кривую.