

Рис. 2. Интегральные кривые уравнения $y' = y - x^2$.

Однако, метод изоклин эффективно работает как инструмент исследования поведения решений. Он позволяет изобразить области характерного поведения интегральных кривых и как средство эскизного представления интегральных кривых сохраняет свое значение и в нынешнюю эпоху бурного развития вычислительных машин и вычислительных методов.

Список литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник в 2-х томах. Том 2. – М.: Наука – Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560 с.
2. Пушкарёв Е.А. Дифференциальные уравнения в задачах и примерах: учебно-методическое пособие. – М.: МГИУ, 2007. – 158 с.

ГАУССОВО РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН КАК S-ОБРАЗНОЕ РАНГОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Евсеев Д.А., Шарипова К.В., Гурина Р.В.

Ульяновский государственный университет,
Ульяновск, e-mail: Sharipulya_43@mail.ru

Статистические закономерности являются фундаментальными законами природы. В работе [1] показана:

но: идеальный график рангового распределения (РР) набора чисел случайных величин $W(r)$ из Гауссового распределения представляет собой S-образную кривую, симметричную относительно биссектрисы прямого угла, образующего координатные оси W и r (рис.1). На рис.1,а представлено идеальное Гауссово частотное распределение $f_i = f(W)$ и, соответствующее ему, РР этих же величин $W(r)$ (рис.1, б).

График Гауссового распределения $f(W)$ (рис 1, а) для наглядности повернут на 90 градусов в плоскости рисунка по отношению к графику рис. 1, б [1]. Приведённые графики являются результатом компьютерного моделирования случайных чисел (выборка 10000) с заданным Гауссовым распределением. Среднее значение случайной величины $W = 200$ (математическое ожидание) соответствует точке перегиба на S-образной кривой.

В методологии естественных наук известен способ определения принадлежности эмпирически полученного графика к той или иной математической зависимости. Этот метод идентификации заключается в построении полученной выборки эмпирических физических величин в «координатах спрямления» и приведения исследуемой функции к линейному виду в этих координатах. Этот метод широко используется физиками-экспериментаторами.

Представляет несомненную методологическую значимость нахождение координат спрямления для S-образной кривой РР случайных величин и применение этих координат с целью идентификации S-образного РР с вероятностным распределением случайных величин (Гауссовым распределением), что и составило цель исследования. Цель определила ряд конкретных задач и этапы исследования.

Этапы исследования.

1. Теоретическая часть:
 - определение координат спрямления для S-образной кривой РР;
 - нахождение и описание способа моделирования случайных чисел с заданным распределением вероятности;
2. Практическая часть:
 - Проверка полученных теоретических результатов при помощи компьютерного модельного эксперимента.

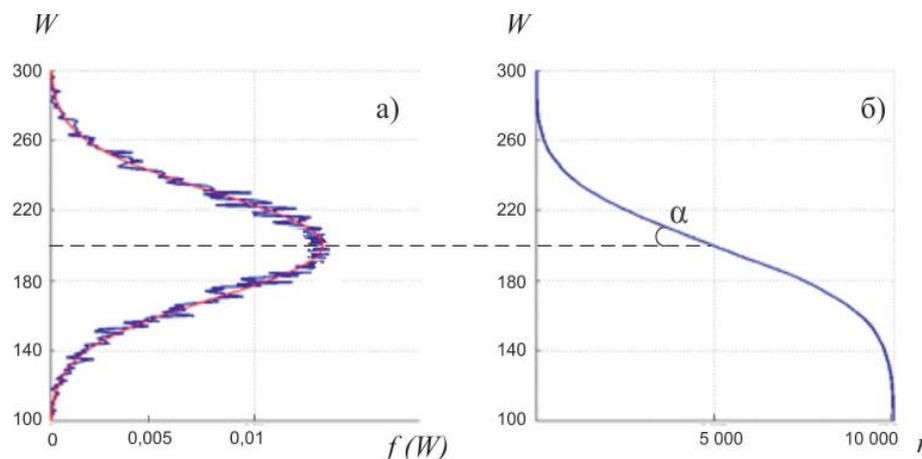


Рис. 1. а) Гауссово частотное распределение $f_i = f(W)$ 10000 случайных величин со стандартным отклонением $\sigma = 30$, математическим ожиданием 200; б) соответствующее ему, РР этих же величин $W(r)$ [1, с. 48].

Отметим, что *S-образный вид эмпирического РР $W(r)$ свидетельствует о принадлежности совокупности параметров W к Гауссовому распределению*, при этом с уменьшением дисперсии Гауссового распределения крутизна *S-образной* характеристики РР увеличивается, угол α между касательной к *S-кривой* в точке перегиба и горизонтальной осью уменьшается [1].

В работах [2,3] показано, что математическая формула *S-образной* кривой имеет вид:

$$\xi(r) = \sqrt{2}\sigma \operatorname{erf}\operatorname{inv}\left(1 - \frac{2}{N_0}r\right) + \mu \quad (1)$$

где $\operatorname{erf} \frac{\xi - \mu}{\sqrt{2}\sigma}$ – функция ошибок, или функция Лапласа [4, с.575], а $\operatorname{erf}\operatorname{inv}(x)$ – функция, обратная функции ошибок.

1) *Нахождение координат спрямления для S-образной кривой РР.*

Чтобы найти координаты спрямления, нужно подставить (1) в функцию ошибок, при этом в координатах $\operatorname{erf} \xi(r)$ получается убывающая прямая:

$$\operatorname{erf} \left\{ \frac{\xi(r) - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right\} = a - (2/N_0)r = a - kr, \quad (2)$$

где r – ранговый номер случайной величины ξ в порядке её убывания; a, k – постоянные, при этом $k = 2/N_0$ отражает значение тангенса угла наклона прямой к оси рангов.

Проверка данного утверждения, осуществлённая при помощи компьютерного модельного эксперимента, описана ниже в п.3.

2) *Моделирование случайных чисел с заданным распределением вероятности.*

Ранее найден простой способ моделирования случайных чисел с заданным распределением вероятности. Известно, что:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(t) dt,$$

где $\rho(t)$ – плотность вероятности. Свойством $F(x)$ является монотонность неубывающей функции, ограниченной в пределах от нуля до единицы, что очень кстати, так как любой язык программирования имеет генератор псевдослучайных чисел в интервале от нуля до единицы. Воспользуемся методом обратных функций.

Теорема. Пусть ξ случайная величина, равномерно распределённая на интервале $(0,1)$, $F(x)$ – монотонная возрастающая функция на (a,b) , имеющая производную и пределы:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow b} F(x) \rightarrow 1$$

Тогда существует обратная функция $F^{-1}(x)$, $\xi \in (0,1)$ и случайная величина $\xi = F^{-1}(x)$ распределена на интервале (a,b) с плотностью

$$\rho(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad [5].$$

Рассмотрим распределение Гаусса.

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (3)$$

Пусть $F(x) \equiv \xi$, причём ξ – случайная величина, равномерно распределённая от нуля до единицы, тогда:

$$\begin{aligned} \xi\psi &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy = \left[\begin{matrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{matrix} \right] = \\ &= \int_0^r \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr \int_0^{2\pi\psi} d\varphi = \psi \int_0^r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \psi \int_0^{\frac{r^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) = \psi \left(1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right) \quad (4) \end{aligned}$$

где ξ, η – равномерно распределённые случайные величины в пределах от нуля до единицы.

Примем $\psi = 1$ и выразим r :

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \\ e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} &= 1 - \xi \\ r &= \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - \xi)} \\ \varphi &= 2\pi\psi \end{aligned} \quad (5)$$

В результате мы получаем две независимые случайные величины, распределённые по закону Гаусса из двух независимых равномерно распределённых случайных величин ξ, ψ :

$$\begin{aligned} X &= \sigma \sqrt{-2 \ln(1 - \xi)} \cos(2\pi\psi) \\ Y &= \sigma \sqrt{-2 \ln(1 - \xi)} \sin(2\pi\psi) \end{aligned} \quad (6)$$

Полученные формулы были запрограммированы в среде MatLab и были получены следующие эмпирические результаты.

3) Проверка полученных теоретических результатов при помощи компьютерного модельного эксперимента.

Были построены гистограммы Гауссовых распределений при различных значениях дисперсии (10,20,30,40,50) и, соответствующие им, *S-образные* кривые пузырьковым методом (ранжирование случайной величины по убыванию). Таким образом была проверена формула (2) (рис. 2, а, б)

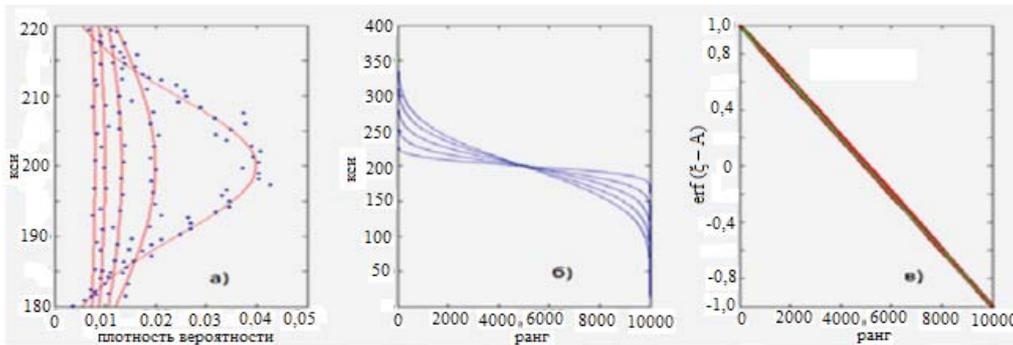
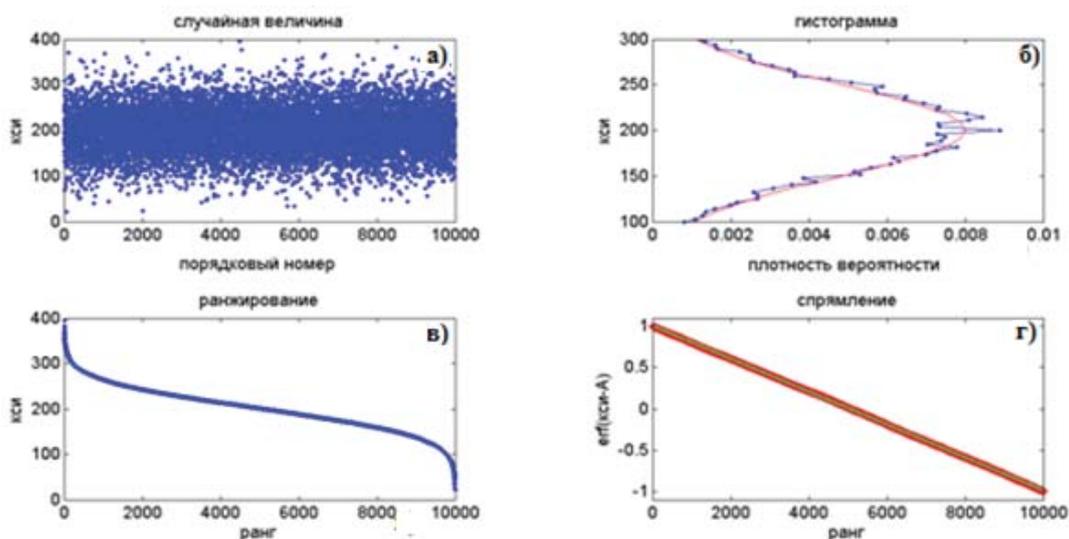
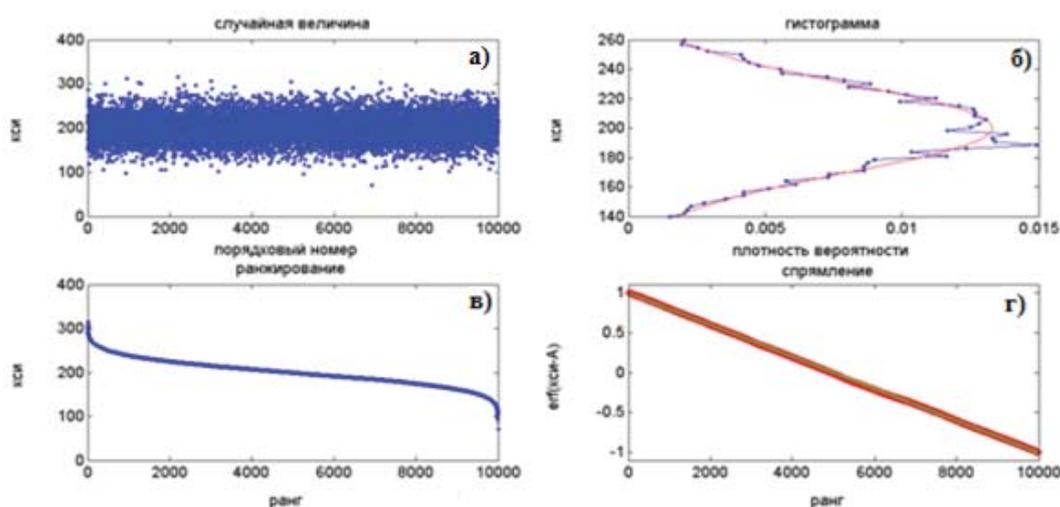


Рис. 2. К вопросу идентификации распределений случайных величин функции Гаусса (а); с *S-образными* РР (б, в)



Дисперсия 50



Дисперсия 30

Рис. 3. К вопросу спрямления функции Гаусса с разными дисперсиями: а) Поле случайных величин; б) Распределение Гаусса; в) Соответствующие им S-образные кривые PP; г) S-образные кривые PP в координатах спрямления

а) Гистограммы распределений случайных величин с дисперсиями 10,20,30,40,50. б) Соответствующие им S-образные кривые PP. в) Спрямление S-образных кривых PP в координатах $\text{erf}(\xi - A) = f(\tau)$ (координатах спрямления).

Подобный алгоритм можно использовать для моделирования случайных величин, распределенных по необходимому закону. Ниже представлены рисунки (рис.3, а, б, в, г), иллюстрирующие описанный выше модельный эксперимент для двух дисперсий – 50 и 30.

Спрямление S-характеристики наглядно выглядит близким к идеальному случаю, когда все точки ложатся на кривую или попадают в доверительный интервал. В рассмотренных случаях моделирование доверительного интервала не предусмотрено, а большинство точек оказывается выше или ниже прямой, что обуславливает малое значение коэффициента регрессии.

Результаты исследования имеют теоретическую и практическую значимость, которая заключается в том, что **ранговый анализ открывает новые возможности в методологии научных исследований, использующих построения нормальных распре-**

лений: по внешнему виду кривой PP в грубом приближении можно идентифицировать принадлежность выборки значений исследуемой величины к Гауссовому распределению.

Таким образом:

- Найдены координаты спрямления для S-образного PP случайных величин.
- Результаты модельного компьютерного эксперимента подтвердили спрямление S-образного PP в координатах $\text{erf}(\xi - A)$, где ξ – функция ошибок, τ – ранговый номер исследуемой случайной величины.
- Спрямление S-образного PP случайных величин в найденных координатах спрямления доказывает принадлежность исследуемой выборки случайных величин к вероятностному распределению Гаусса.
- Простота вышеизложенного метода – построение выборки случайных величин Гауссового распределения как S-образного рангового распределения и представление его в виде линейного графика в координатах спрямления позволяют сделать вывод о несомненной практической значимости проведённого исследования.

Результаты модельного компьютерного эксперимента подтверждены ранее проведенным натурным экспериментом по исследованию распределения числа импульсов от счетчика Гейгера-Мюллера [6].

Список литературы

1. Гурина Р.В., Евсеев Д. А. О соотношении Гауссового и рангового распределений // Теоретические и прикладные вопросы науки и образования: сб. науч. тр по материалам Междунар. науч.- практ. конф 31 августа 2013 г. Часть 1. – Тамбов: Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество», 2013. – С. 47-49. – URL: http://www.ucom.ru/doc/conf/2013_08_31_1.pdf
2. Гурина Р.В., Беззубко Д.Н. Формула для рангового S-распределения случайных величин // Наука и образование в жизни современного общества: сб научных трудов по материалам Междунар. науч.- практ. конф 29 ноября 2013 г.: в 18 частях. Часть 12. – Тамбов: Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество», 2013. – С. 39-41.
3. Евсеев Д.А., Беззубко Д.Н. Исследование соотношения рангового и гауссового распределений // Актуальные вопросы современного образования: материалы IX научно-практической заочной конференции, Москва-Ульяновск, 5 апреля 2014 г. – М.: Ульяновск: ООО «Колор-Принт», 2014. – С. 61-67.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / под общей ред. И.Г. Арамановича. – М.: Изд-во «Наука», 1974.
5. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: «Наука», 1973.
6. Шарипова К.В., Евсеев Д.А. Ранговое распределение случайных величин в координатах спрямления // Eurasian Union of Scientists. – 2014. – С. 142-146. – URL: <http://euroasia-science.ru/zhurnal/18-zhurnal-4/fiziko-matematicheskie-nauki>

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СТЕПЕНИ НАСЫЩЕНИЯ КРОВИ КИСЛОРОДОМ НА СИГНАЛ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Козырева О.Д., Пушкарева А.Е.

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, e-mail: kozyreva.o@list.ru

В последнее время в медицине важную роль отводят не лечению заболеваний, а их профилактике и диагностике. Развитие медицинских технологий ведет к тому, чтобы люди могли следить за своим здоровьем самостоятельно в домашних условиях. Большое развитие получает внедрение диагностических приборов. Одними из таких приборов являются оксиметры, измеряющие оксигенацию крови, т.е. степень ее насыщения кислородом. Снижение нормального уровня оксигенации может свидетельствовать о проблемах в работе легких или о заболевании сердечно-сосудистой системы.

Оксиметры могут работать в двух режимах: режим пропускания и режим отражения излучения. В случае отражения измеряется сигнал обратного рассеяния крови. Зависимость данного сигнала от степени оксигенации крови для различных длин волн излучения играет в измерениях ключевую роль. В связи с этим представляется актуальным исследование данного процесса.

Компьютерное моделирование в настоящее время используется для решения широкого спектра задач. Моделирование физических процессов позволяет исследовать различные аспекты поведения моделируемой системы, которые могут быть недоступны для экспериментального наблюдения. Зачастую в медицинской практике возникает проблема оптимизации параметров определенного лазерного излучателя для проведения той или иной процедуры. В связи с этим представляет интерес моделирование конкретных процессов. Используя моделирование можно оценить результат, полученный при воздействии уже выбранного излучателя на биологическую среду. При помощи такой модели на основе результата воздействия при определенных параметрах, можно, последова-

тельно изменяя исходные параметры, произвести оптимизацию спектральных и энергетических параметров лазерных излучателей для достижения необходимого в каждом конкретном случае эффекта [1]. Кроме того, моделирование позволяет проводить множественные серии численных экспериментов для исследования процессов и оценки результатов воздействия на биологические среды оптического излучения. В данной работе для исследования влияния степени насыщения крови кислородом на интенсивность сигнала обратного рассеяния излучения используется численное моделирование методом Монте-Карло. Исследование проводится с целью выявления оптимальных диапазонов длин волн для неконтактного измерения степени оксигенации крови при помощи регистрации рассеянного излучения.

Цель данной работы заключается в исследовании зависимости сигнала обратного рассеяния излучения от степени оксигенации крови при помощи численного моделирования методом Монте-Карло.

Моделирование проводилось при помощи математического пакета MathCad. Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- Разработка математической модели распространения оптического излучения в рассеивающей биологической среде (цельной крови) с использованием метода Монте-Карло;
- На основе разработанной модели построение зависимости относительной интенсивности сигнала обратного рассеяния излучения кровью от степени оксигенации в широком диапазоне длин волн.

В качестве исходных данных, были заданы: спектры поглощения гемоглобина и оксигемоглобина; зависимость показателя преломления, фактора анизотропии, коэффициента рассеяния и коэффициента поглощения цельной крови от длины волны. Расчет производился при помощи численного метода Монте-Карло. В такой модели фотон характеризуется координатами и весом, размер, шаг и направление движения фотона из исходной точки определяются на каждом шаге и задаются при помощи случайных чисел. На каждом шаге фотон теряет часть веса вследствие поглощения, так же учтено ослабление веса фотона за счет отражения Френеля и эффект полного внутреннего отражения на границе пересечения двух сред (воздух и кровь). Интенсивность сигнала обратного рассеяния складывается из суммарного веса фотонов, вышедших из среды через верхнюю границу и доли веса фотонов, падающих на среду, полученной за счет отражения от поверхности.

В результате были получены спектральные зависимости (в диапазоне 590-860 нм) относительного сигнала обратного рассеяния для различных значений степени насыщения крови кислородом. Для оценки адекватности модели, график спектральных зависимостей сравнивался с экспериментальным графиком [2], который был получен с использованием двойной интегральной сферы.

Проведенные численные исследования показали, что в области длин волн 650-750 нм насыщение крови кислородом оказывает наибольшее влияние на сигнал обратного рассеяния, что дает возможность проводить достаточно точные измерения степени оксигенации крови при помощи измерения интенсивности диффузно рассеянного излучения.

Список литературы

1. Пушкарева А.Е. Методы математического моделирования в оптике биоткани: учебное пособие. – СПб: СПб НИУ ИТМО, 2008.
2. Lademann J., Weigmann H.J., Sterry W., Roggan A., Müller G.J., Priezzhev A.V., Firsov N.N. Investigation of the Aggregation and Disaggregation Properties of Erythrocytes by Light Scattering Measurements // Laser Physics. – 1999. – V. 9. – P. 357-362.