ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Макушева М.Н., Апайчева Л.А.

Нижнекамский химико-технологический институт, Нижнекамск, e-mail: hot_lolipop@mail.ru

Операционное исчисление играет важную роль при решении прикладных задач, особенно в современной автоматике. Обобщением обычного преобразования Лапласа на дискретные функции является дискретное преобразование Лапласа (Z – преобразование), которое является основным математическим аппаратом при анализе линейных импульсных систем.

Известно, что динамические процессы в дискретных системах управления описываются уравнениями в конечных разностях.

Решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами удобно проводить методом Z – преобразования, аналогично схеме применения преобразования Лапласа к решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. В результате применения этого метода к линейному разностному уравнению (или системе уравнений) с постоянными коэффициентами получаем уравнение (или систему уравнений) относительно изображения искомой ступенчатой функции, содержащее все начальные условия.

Пусть имеем комплекснозначную функцию f(t) действительного аргумента t, определенную для t≥0. Рассмотрим последовательность {f(n)} (n=0,1,2,…), которая обозначается f(n) и называется решетчатой функцией. Для отрицательных значений аргумента решетчатая функция равна нулю.

Решетчатая функция – это результат временного квантовая непрерывного сигнала, которая представляет значения непрерывного сигнала в дискретные моменты времени.

Дискретным преобразованием Лапласа (Z-преобразованием) решетчатой функции f(n) называется функция F*(p) комплексного аргумента p=S+iσ, определяемая равенством:

$$F^*(p)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-np}f(n), \qquad (1)$$

Предполагается, что ряд справа в (1) сходится. Функция f(n) называется дискретным оригиналом, а F*(p) – ее изображением и обозначается символом: F*(p)÷f(n) или f(n)÷F*(P).

Рассмотрим линейное неоднородное разностное уравнение:

$$\mathrm{f(n+1)+2f(n)=n, f(0)=0}, \qquad (2)$$

Решение задачи (2) будем искать операционным методом, основанном на дискретном преобразовании Лапласа. Применим Z-преобразование к обеим частям уравнения (2).

Пусть f(n)÷F*(p). Применяя теорему опережения, имеем:f(n+1)÷e^pF*(p).

С учетом соотношения:

$$n \div \frac{e^p}{(e^p-1)^2}$$

приходим к операторному уравнению:

$$F^*(p)(e^p+2)=\frac{e^p}{(e^p-1)^2}.$$

Отсюда находим изображение решения:

$$F^*(p)=\frac{e^p}{(e^p-1)^2\,(e^p+2)}. \qquad (3)$$

В случае, когда F*(p) есть правильная рациональная дробь относительно e^p, решетчатую функцию f(n) будем искать в виде:

$$f(n)=\textstyle\sum_k res_{p_k}\left(F^*(p)e^{(n-1)p}\right), \qquad (4)$$

где сумма вычетов берется по всем полюсам функции F*(p), расположенным в полосе -π<Imp≤π и на ее границе Imp=π.

Функция F*(p) имеет один простой полюс: $p_1=ln2+\pi i$ и один полюс $p_2=0$ порядка 2 основной полосы -π<Imp≤π.

Находим вычеты функции F*(p)$e^{(n-1)p}$ относительно полюсов p_1 и p_2.

Так как p_1=ln2+πi – простой полюс, то (5):

$$\underset{p=ln2+\pi i}{\mathrm{res}}(F^*(p)e^{(n-1)p} =$$

$$=\lim_{p\to ln2+\pi i}\left(\frac{e^p(e^p+2)*e^{p(n-1)}}{(e^p-1)^2\,(e^p+2}\right)=$$

$$=\lim_{p\to ln2+\pi i}\frac{e^{pn}}{(e^p-1)^2}=\frac{e^{n(ln2+\pi i)}}{(e^{ln2+\pi i}-1)^2}=\frac{2^n*(-1)^n}{9}.$$

Поскольку p_2=0 – полюс порядка 2, то последовательно находим:

$$\underset{p=0}{\mathrm{res}}\left(\mathrm{F^*(p)}e^{p(n-1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^p*(e^p-1)^2}{(e^p-1)^2*(e^p+2)}*e^{p(n-1)}\right)'=$$

$$=\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pn}}{e^p+2}\right)'=$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{ne^{pn}(e^p+2)-e^{pn}*e^p}{(e^2+2)^2}=\frac{3n-1}{9}. \qquad (6)$$

Таким образом, согласно формулам (4)-(6) искомая решетчатая функция принимает вид:

$$f(n)=\frac{(3n-1)+(-2)^n}{9}.$$

Далее рассмотрим следующую систему линейных разностных уравнений:

$$\begin{cases}x(n+1)-x(n)+y(n)=3^n\\ y(n+1)+2x(n)=-3^n\end{cases}, \qquad (7)$$

с начальными условиями:

$$x(0)=3, y(0)=0, \qquad (8)$$

Применим Z-преобразование к системе (7)-(8). Пусть

$$x(n)\div X(p), y(n)\div Y(p), 3^n\div\frac{e^p}{e^p-3}. \qquad (8)$$

Согласно теореме опережения и условий (8) имеем:

$$x(n+1)\div e^p(X^*(p)-3), y(n+1)\div e^pY^*(p).$$

Систему (7) - (8) запишем в операторном виде:

$$\begin{cases}(e^p-1)X^*(p)+Y^*(p)=\dfrac{e^p}{e^p-3}+3e^p\\ 2X^*(p)+e^pY^*(p)=-\dfrac{e^p}{e^p-3}\end{cases}, \qquad (9)$$

Будем решать систему (9) по правилу Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}e^p-1 & 1\\ 2 & e^p\end{vmatrix}=e^{2p}-e^p-2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \dfrac{3e^{2p} - 8e^p}{e^p - 3} & 1 \\ -\dfrac{e^p}{e^p - 3} & e^p \end{vmatrix} = \frac{3e^{3p} - 8e^{2p} + e^p}{e^p - 3};$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} e^p - 1 & \dfrac{3e^{2p} - 8e^p}{e^p - 3} \\ 2 & -\dfrac{e^p}{e^p - 3} \end{vmatrix} = \frac{17e^p - 7e^{2p}}{e^p - 3}.$$

Отсюда находим решение системы (9)

$$X^*(p) = \frac{3e^{3p} - 8e^{2p} + e^p}{(e^p - 3)(e^p - 2)(e^p + 1)}, \quad (10)$$

$$Y^*(p) = \frac{17e^p - 7e^{2p}}{(e^p - 3)(e^p - 2)(e^p + 1)}. \quad (11)$$

Теперь по изображениям X*(p) и Y*(p) будем восстанавливать решетчатые функции x(n) и y(n). Разлагаем дробь (10) на простейшие дроби. Имеем:

$$X^*(p) = \frac{e^p}{(e^p + 1)} + \frac{e^p}{(e^p - 2)} + \frac{e^p}{(e^p - 3)}. \quad (12)$$

С учетом соотношений:

$$\frac{e^p}{(e^p + 1)} \div (-1)^n, \frac{e^p}{(e^p - 2)} \div 2^n, \frac{e^p}{(e^p - 3)} \div 3^n,$$

находим:

$$x(n) = (-1)^n + 2^n + 3^n.$$

Решетчатую функцию y(n) будем искать с помощью формулы (9). Находим вычеты функции $Y^*(p)e^{(n-1)p}$ относительно полюсов p_1, p_2, p_3 функции Y*(p). Так как полюсы $p_1 = ln3, p_2 = ln2, p_3 = \pi i$ – простые, поэтому вычеты относительно этих полюсов принимают соответственно вид:

$$\underset{p=ln3}{res}\, Y^*(p)e^{(n-1)p} =$$

$$= \lim_{p \to ln3} \frac{(17e^p - 7e^{2p})e^{np}}{(e^p - 2)(e^p + 1)} = -3^n, \quad (13)$$

$$\underset{p=ln2}{res}\, Y^*(p)e^{(n-1)p} =$$

$$= \lim_{p \to ln3} \frac{(17e^p - 7e^{2p})e^{np}}{(e^p - 3)(e^p + 1)} = -2^n, \quad (14)$$

$$\underset{p=\pi i}{res}\, Y^*(p)e^{(n-1)p} =$$

$$= \lim_{p \to ln3} \frac{(17e^p - 7e^{2p})e^{np}}{(e^p - 3)(e^p - 2)} = 2 * (-1)^n. \quad (15)$$

Объединяя формулы (9)-(11), получаем решетчатую функцию

$$y(n) = 2(-1)^n - 2^n - 3^n.$$

Список литературы

1. Краснов М.Л., Киселев А.Н., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1971. – 256 с.

2. Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Основы теории автоматического управления – Тамбов: ТГТУ, 2004. – 352 с.

3. Сборник задач по математике для вузов. Специальные разделы математического анализа. – М.: Наука, 1981. – 368 с.

НАХОЖДЕНИЕ АЛЬТЕРНАТИВНОГО МАКСИМУМА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ «ПОИСК РЕШЕНИЯ»

Овчинникова О.И., Куликова О.В.

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, e-mail: Olenka96@bk.ru

Линейное программирование рассматривается не только как наука о методах исследования и отыскания экстремальных (наибольших и наименьших) значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения [4], но и как специальный класс оптимизационных задач, в котором все отношения между переменными выражаются линейными функциями, а переменные принимают действительные значения [1]. Основоположниками линейного программирования считаются Л.В. Канторович (1912–1986) и Д. Данциг (1914–2005). Впервые задача линейного программирования (ЗЛП) в России была сформулирована в 1939 г. Л.В. Канторовичем, который применил математическую модель этой задачи в экономике и разработал метод решения. В 1975 г. Л.В. Канторович получил Нобелевскую премию за достижения в этой области [2]. В 1947 г. американский ученый Д. Данциг разработал алгоритм решения ЗЛП [1].

Математическая модель ЗЛП [4] имеет вид

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(min), \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\ge, =) b_i, x_j \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \quad (2)$$

Содержание ЗЛП формулируется следующим образом: необходимо найти набор действительных чисел (вектор) $X_{опт} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, доставляющий экстремум (максимум или минимум) линейной целевой функции (1) и удовлетворяющий системе ограничений (2). ЗЛП может иметь одно или множество оптимальных решений $X_{опт}$, которые называются альтернативным отпимумом [4]. Выявление альтернативного оптимума в решении ЗЛП представляется важным условием понимания существенных взаимосвязей, обеспечивающих достижение целевой функцией оптимального значения. При изучении ЗЛП с двумя переменными обязательно рассматривается графический способ ее решения. Критерием альтернативного оптимума в этом случае выступает совпадение оптимальной линии уровня целевой функции $L_{опт}$ с одной из сторон многоугольника области допустимых решений (ОДР), а оптимальное решение $X_{опт}$ находится по формуле

$$X_{опт} = (1 - t)X_{опт1} + tX_{опт2} =$$

$$= (1 - t)\begin{pmatrix} x_{опт11} \\ x_{опт12} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x_{опт21} \\ x_{опт22} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $X_{опт1}$ и $X_{опт2}$ – оптимальные решения в угловых точках области допустимых решений (ОДР); $0 \le t \le 1$; ($x_{опт11}$; $x_{опт12}$) и ($x_{опт21}$; $x_{опт22}$) – координаты угловых точек ОДР [4].

Развитие программного обеспечения современных компьютеров расширяет способы решения задач оптимизации в учебном процессе. Программа «Поиск решения» электронных таблиц Excel позволяет в автоматическом режиме находить только одно оптимальное решение $X_{опт}$ и значение целевой функции $L(X_{опт})$ [3]. Если ЗЛП имеет единственное решение, то данная программа определяет его однозначно. Если ЗЛП имеет альтернативный оптимум, то пользовате-