$$\Delta_x=\begin{vmatrix}\dfrac{3e^{2p}-8e^p}{e^p-3} & 1\\ -\dfrac{e^p}{e^p-3} & e^p\end{vmatrix}=\frac{3e^{3p}-8e^{2p}+e^p}{e^p-3};$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}e^p-1 & \dfrac{3e^{2p}-8e^p}{e^p-3}\\ 2 & -\dfrac{e^p}{e^p-3}\end{vmatrix}=\frac{17e^p-7e^{2p}}{e^p-3}.$$

Отсюда находим решение системы (9)

$$X^*(p)=\frac{3e^{3p}-8e^{2p}+e^p}{(e^p-3)(e^p-2)(e^p+1)},\qquad(10)$$

$$Y^*(p)=\frac{17e^p-7e^{2p}}{(e^p-3)(e^p-2)(e^p+1)}.\qquad(11)$$

Теперь по изображениям X*(p) и Y*(p) будем восстанавливать решетчатые функции x(n) и y(n). Разлагаем дробь (10) на простейшие дроби. Имеем:

$$X^*(p)=\frac{e^p}{(e^p+1)}+\frac{e^p}{(e^p-2)}+\frac{e^p}{(e^p-3)}.\qquad(12)$$

С учетом соотношений:

$$\frac{e^p}{(e^p+1)}\div(-1)^n,\ \frac{e^p}{(e^p-2)}\div 2^n,\ \frac{e^p}{(e^p-3)}\div 3^n,$$

находим:

$$x(n)=(-1)^n+2^n+3^n.$$

Решетчатую функцию y(n) будем искать с помощью формулы (9). Находим вычеты функции $Y^*(p)e^{(n-1)p}$ относительно полюсов p_1, p_2, p_3 функции Y*(p). Так как полюсы $p_1=ln3, p_2=ln2, p_3=\pi i$ – простые, поэтому вычеты относительно этих полюсов принимают соответственно вид:

$$\underset{p=ln3}{res}\,Y^*(p)e^{(n-1)p}=$$

$$=\lim_{p\to ln3}\frac{(17e^p-7e^{2p})e^{np}}{(e^p-2)(e^p+1)}=-3^n,\qquad(13)$$

$$\underset{p=ln2}{res}\,Y^*(p)e^{(n-1)p}=$$

$$=\lim_{p\to ln3}\frac{(17e^p-7e^{2p})e^{np}}{(e^p-3)(e^p+1)}=-2^n,\qquad(14)$$

$$\underset{p=\pi i}{res}\,Y^*(p)e^{(n-1)p}=$$

$$=\lim_{p\to ln3}\frac{(17e^p-7e^{2p})e^{np}}{(e^p-3)(e^p-2)}=2*(-1)^n.\qquad(15)$$

Объединяя формулы (9)-(11), получаем решетчатую функцию

$$y(n)=2(-1)^n-2^n-3^n.$$

Список литературы

1. Краснов М.Л., Киселев А.Н., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1971. – 256 с.

2. Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Основы теории автоматического управления – Тамбов: ТГТУ, 2004. – 352 с.

3. Сборник задач по математике для вузов. Специальные разделы математического анализа. – М.: Наука, 1981. – 368 с.

НАХОЖДЕНИЕ АЛЬТЕРНАТИВНОГО МАКСИМУМА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ «ПОИСК РЕШЕНИЯ»

Овчинникова О.И., Куликова О.В.

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, e-mail: Olenka96@bk.ru

Линейное программирование рассматривается не только как наука о методах исследования и отыскания экстремальных (наибольших и наименьших) значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения [4], но и как специальный класс оптимизационных задач, в котором все отношения между переменными выражаются линейными функциями, а переменные принимают действительные значения [1]. Основоположниками линейного программирования считаются Л.В. Канторович (1912–1986) и Д. Данциг (1914–2005). Впервые задача линейного программирования (ЗЛП) в России была сформулирована в 1939 г. Л.В. Канторовичем, который применил математическую модель этой задачи в экономике и разработал метод решения. В 1975 г. Л.В. Канторович получил Нобелевскую премию за достижения в этой области [2]. В 1947 г. американский ученый Д. Данциг разработал алгоритм решения ЗЛП [1].

Математическая модель ЗЛП [4] имеет вид

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max(min),\qquad(1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(\ge,=)b_i,x_j\ge 0, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}.\qquad(2)$$

Содержание ЗЛП формулируется следующим образом: необходимо найти набор действительных чисел (вектор) $X_{опт}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, доставляющий экстремум (максимум или минимум) линейной целевой функции (1) и удовлетворяющий системе ограничений (2). ЗЛП может иметь одно или множество оптимальных решений $X_{опт}$, которые называются альтернативным отпимумом [4]. Выявление альтернативного оптимума в решении ЗЛП представляется важным условием понимания существенных взаимосвязей, обеспечивающих достижение целевой функцией оптимального значения. При изучении ЗЛП с двумя переменными обязательно рассматривается графический способ ее решения. Критерием альтернативного оптимума в этом случае выступает совпадение оптимальной линии уровня целевой функции $L_{опт}$ с одной из сторон многоугольника области допустимых решений (ОДР), а оптимальное решение $X_{опт}$ находится по формуле

$$X_{опт}=(1-t)X_{опт1}+tX_{опт2}=$$

$$=(1-t)\begin{pmatrix}x_{опт11}\\x_{опт12}\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x_{опт21}\\x_{опт22}\end{pmatrix},\qquad(3)$$

где $X_{опт1}$ и $X_{опт2}$ – оптимальные решения в угловых точках области допустимых решений (ОДР); $0\le t\le 1$; $(x_{опт11}; x_{опт12})$ и $(x_{опт21}; x_{опт22})$ – координаты угловых точек ОДР [4].

Развитие программного обеспечения современных компьютеров расширяет способы решения задач оптимизации в учебном процессе. Программа «Поиск решения» электронных таблиц Excel позволяет в автоматическом режиме находить только одно оптимальное решение $X_{опт}$ и значение целевой функции $L(X_{опт})$ [3]. Если ЗЛП имеет единственное решение, то данная программа определяет его однозначно. Если ЗЛП имеет альтернативный оптимум, то пользователю становится известно одно частное решение. В отчете о результатах вычислений данная программа сигнализирует о множестве оптимальных решений, отмечая в статусе одной из функциональных зависимостей системы ограничений связанность с целевой функцией (если ЗЛП с двумя переменными имеет единственное решение, то связанность с целевой функцией фиксируется у двух функциональных зависимостей системы ограничений). Составление множества $X_{опт}$ становится возможным, если моделируются ситуации, при которых обеспечивается достижение условий для использования формулы (3).

Проведем анализ математической модели ЗЛП с двумя переменными и альтернативным оптимумом, которая имеет следующий вид

$$L(x_1; x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \to max, \qquad (4)$$

$$\begin{cases} kc_1x_1 + kc_2x_2 \le b_1, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, i = \overline{1, m-1}. \end{cases} \qquad (5)$$

Коэффициенты переменных в одном из неравенств системы ограничений пропорциональны коэффициентам целевой функции, что и определяет характерное расположение линии уровня целевой функции $L_{опт}$ и одной из сторон M_1M_2 многоугольника ОДР (рис. 1).

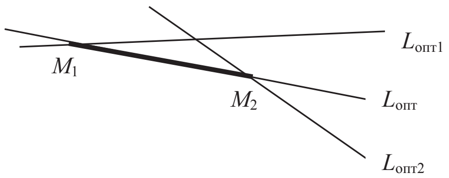

Рис. 1.

Угловой коэффициент k прямой $L_{опт}$ равен отношению коэффициентов целевой функции ($k = c_2/c_1$). Если увеличить c_1 на положительную величину δ, а c_2 оставить без изменения, то линия уровня $L_{опт}$ совершит поворот по ходу часовой стрелки и примет положение, которое на рис. 1 отмечено как $L_{опт2}$. При таком изменении целевой функции (4) ЗЛП будет иметь одно оптимальное решение, которому будут соответствовать значения координат точки M_2 (рис. 1). Если увеличить c_2 на положительную величину δ, а c_1 оставить без изменения, то линия уровня $L_{опт}$ совершит поворот против хода часовой стрелки и примет положение, которое на рис. 1 отмечено как $L_{опт1}$. При этом изменении целевой функции (4) ЗЛП будет иметь также одно оптимальное решение, которому будут соответствовать значения координат точки M_1 (рис. 1). Нахождение координат точек M_1 и M_2, которые являются угловыми в ОДР, позволяет составить множество $X_{опт}$ при использовании формулы (3). Установление $X_{опт}$ ЗЛП, заданной математической моделью (4)–(5), с помощью программы «Поиск решения» требует определения $X_{опт1}$ и $X_{опт2}$, которые относятся к ЗЛП1 и ЗЛП2. Система ограничений ЗЛП1 и ЗЛП2 описывается системой неравенств (5). Математические модели целевых функций $L_1(X)$ и $L_2(X)$ этих задач соответственно будут иметь вид

$$L_1(x_1; x_2) = c_1x_1 + (c_2 + \delta)x_2 \to max, \qquad (6)$$

$$L_2(x_1; x_2) = (c_1 + \delta)x_1 + c_2x_2 \to max. \qquad (7)$$

Иллюстрация изложенной выше идеи о применении программы «Поиск решения» для нахождения альтернативного максимума осуществляется на примере решения ЗЛП, которая представлена математической моделью

$$L(x_1; x_2) = 5x_1 + 10x_2 \to max, \qquad (8)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Функциональные зависимости (8) и (9) вводятся в ячейки электронного процессора Excel, а в соответствующих разделах диалогового окна программы «Поиск решения» фиксируются их адреса. Автоматический поиск $X_{опт}$ и $L(X_{опт})$ завершается сообщением результата: $x_1 = 0{,}8$; $x_2 = 1{,}6$; $L(0{,}8; 1{,}6) = 20$. Для определения $X_{опт1}$ и $X_{опт2}$ следует составить ЗЛП1 и ЗЛП2 с единой ОДР, которая описывается системой неравенств (9). Величине δ можно, например, присвоить значение, равное 0,5. Математические модели целевых функций $L_1(x_1; x_2)$ и $L_2(x_1; x_2)$ соответственно для ЗЛП1 и ЗЛП2 составляются по формулам (6), (7) и принимают с учетом выбранной δ следующий вид

$$L_1(x_1; x_2) = 5x_1 + (10 + 0{,}5)x_2 \to max, \qquad (10)$$

$$L_2(x_1; x_2) = (5 + 0{,}5)x_1 + 10x_2 \to max. \qquad (11)$$

Результат работы программы «Поиск решения» для ЗЛП1 и ЗЛП2: $X_{опт1} = (0; 2)$, $L_1(0; 2) = 21$, $X_{опт2} = (2; 1)$, $L_2(2; 1) = 21$. Нахождение $X_{опт1}$ и $X_{опт2}$ позволяет записать множество всех оптимальных решений ЗЛП (8)–(9) по формуле (3) в матричном виде

$$X_{опт} = (1 - t)\binom{0}{2} + t\binom{2}{1} = \binom{2t}{2 - t}.$$

Проверка полученного результата (12) может проводиться через его сравнение с результатом, к которому приведет применение другого способа решения ЗЛП. Использование графического способа решения [4] ЗЛП (8)–(9) отражено на рис. 2.

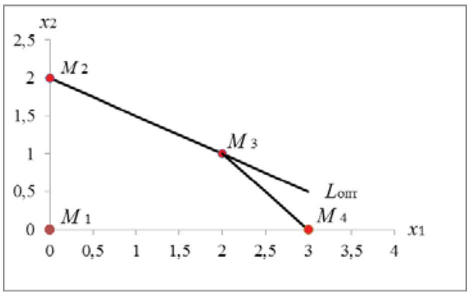

Рис. 2.

Четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$ – это ОДР системы ограничений (9) (рис. 2), сторона M_2M_3 совпадает с оптимальной линией уровня целевой функции $L_{опт}(X_{опт}) = 20$. Координаты вершин $M_2(0; 2)$ и $M_3(2; 1)$ определяют оптимальные решения $X_{опт1}$ и $X_{опт2}$, а их подстановка в формулу (3) подтверждает ранее полученный результат $X_{опт}$ (12). Нахождение множества оптимальных решений ЗЛП с двумя переменными при использовании программы «Поиск решения» требует соблюдения условий (составление и решение ЗЛП1 и ЗЛП2), рассмотренных в данной работе.

Список литературы

1. Алексеева Е.В. Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи: учеб. пособие. – Новосибирск, 2012. – 131 с.

2. Вершик А.М. Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый: в 2 т. Т.1.– Новосибирск: Изд-во СО РАН. Филиал «Гео», 2002.

3. Вуколов Э.А. Основы статистического анализа. Практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и EXCEL: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФОРУМ, 2008. – 464 с.

4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учеб. пособие. – М.: Издательство: Дело, 2008. – 688 с.