ские процессы и закономерности, дают возможность решать сложные задачи. Также с помощью матриц можно с минимальным количеством затрат труда и времени обработать большой статистический материал, различные данные, которые характеризуют структуру и особенности социально-экономического комплекса.

Список литературы

1. Красс М.С. Математика в экономике. – М.: ФБК-ПРЕСС, 2005. – 472 с.

2. Мамаев И.И., Бондаренко В.А. Экономические задачи на составление систем линейных алгебраических уравнений // Финансово-экономические и учетно-аналитические проблемы развития регионов: материалы ежегодной 78-й научно-практической конференции Ставропольского ГАУ «Аграрная наука Северо-Кавказскому федеральному округу». Секция «Финансово-экономические и учетно-аналитические проблемы развития региона, г. Ставрополь, 16 апреля 2014г. – Ставрополь: ООО «Альфа Принт», 2014. – С. 251-255.

3. Бондаренко В.А., Мамаев И.И., Сахнюк П.А., Сахнюк Т.И. Опыт использования математических моделей современных экономических исследований в учебном процессе // Информационные системы и технологии как фактор развития экономики региона. – Ставрополь, 2013. – С. 233-236.

4. Бондаренко В.А., Мамаев И.И., Сахнюк П.А., Сахнюк Т.И. Модель совершенствования мотивации обучения студентов экономических специальностей в учебном процессе // Информационные системы и технологии как фактор в развитии экономики региона: сборник материалов Международный научно-практической конференции / СтГАУ. – Ставрополь: Бюро Новостей, СтГАУ, 2013. – С. 225-228.

5. Мамаев И.И., Бондаренко В.А. Моделирование экономических процессов с использованием методов линейной алгебры // Аграрная наука, творчество, рост: сборник научных трудов по материалам Международно-практической конференции. – Ставрополь: СтГАУ, 2013. – С. 268-271.

6. Мамаев И.И., Долгополова А.Ф. Профессиональная направленность в обучении студентов математическим дисциплинам // Аграрная наука, творчество, рост. – 2013. – С. 278-280.

7. Цысь Ю.В., Долгополова А.Ф. Элементы линейной алгебры и их применение при решении экономических задач // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – №6. – С. 91-93.

ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В МЕТОДЕ КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Гайчук В.Д.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

Одной из возможных областей применения средств линейной алгебрыявляетсяраздел электротехники, занимающийся расчетами контурных токов в цепи. Для решения задачэлектротехники используется матричное уравнение контурных токов, системы линейных уравнений, определители. Рассмотрим применение этого аппарата более подробно.

В методе контурных токов принято считать, что в каждом независимом контуре схемы течет свой контурный ток. Уравнения составляются относительно контурных токов. После нахождения решений уравнений определяют токи ветвей через контурные токи.

Следовательно, метод контурных токов можно определить как метод расчета, в котором за неизвестные принимаются контурные токи.

Контурные токи – это условные, расчетные токи. Обозначим их двойными индексами: I_{11}, I_{22}, I_{33}. Число переменных в этом методе равно числу независимых контуров, то есть числу уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа.

В этом случае задача расчета токов разделяется на две части:

1) рассчитываются контурные токи I_{11}, I_{22}, I_{33}.

2)рассчитываются реальные токи.

Для лучшего понимания зададим условие конкретной схемой (см. рис. 1)/

Для данной схемы известны следующие значения: $E_1 = 8$В, $E_2 = 12$В, $E_3 = 19$В, $R_1 = 9$Ом, $R_2 = 20$Ом, $R_3 = 12$Ом, $R_4 = 19$Ом, $R_5 = 14$Ом, $R_6 = 10$Ом.

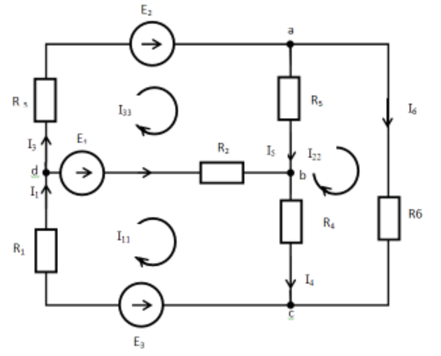

Рис. 1. Схема электрической цепи

В процессе решения задачи электротехники привлекаются математические способы записи условий и алгоритмы, позволяющие найти математическое решение поставленной задачи, в частности, системы линейных алгебраических уравнений, матрицы, определители.

Матрицы применяются для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений. В этом случае количество строк матрицы соответствует числу уравнений, а количество столбцов – количеству неизвестных. В результате решение систем линейных уравнений сводится к операциям над матрицами.

Переведём поставленную задачу расчёта контурных токов на язык математики,учитывая порядок расчета токов:

а) выберем независимые контуры $dabd$, $acba$, $dbcd$;

б) выберем направления контурных токов (по часовой стрелке);

в) выберем направления обхода контуров (по часовой стрелке);

г) составим для каждого контура уравнение по второму закону Кирхгофа,учитывая, что через сопротивления, входящие в два соседних контура проходят два контурных тока.

Рассмотрим схему электрической цепи, представленной на рисунке 1. Направления обхода контуров показаны стрелками и обозначены I_{11}, I_{22}, I_{33}. По второму закону Кирхгофа уравнения для этих контуров примут следующий вид (1):

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2 + R_4) - I_{22} \cdot R_4 - I_{33} \cdot R_2 = E_2 - E_1, \\ I_{22}(R_4 + R_5 + R_6) - I_{11} \cdot R_4 - I_{33} \cdot R_5 = 0, \\ I_{33}(R_3 + R_5 + R_2) - I_{11} \cdot R_2 - I_{22} \cdot R_5 = E_2 - E_3. \end{cases}$$

Арифметическая сумма сопротивлений, входящих в каждый выбранный контур, будет*собственным контурным* сопротивлением R_{kk} (с двойным индексом номера контура) и определяется по формулам:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_4,$$

$$R_{22} = R_4 + R_5 + R_6,$$

$$R_{33} = R_3 + R_5 + R_2.$$

Сопротивления, входящие в два соседних контура, будут*общими сопротивлениями контура*. Например, сопротивление R_4 является общим между первым и вторым контурами, обозначим его также двойным индексом – по номерам контуров.

Например, $R_4 = R_{12} = R_{21}$.

Алгебраическая сумма ЭДС, входящих в данный контур, будет*контурной ЭДС*, её также обозначим двойными индексами:

$E_{11} = E_2 - E_1$ – контурная ЭДС первого контура;
$E_{22} = 0$ – контурная ЭДС второго контура;
$E_{33} = E_2 - E_3$ – контурная ЭДС третьего контура.

Учитывая все выше перечисленные факты и обозначения,запишем систему уравнений (1) в другом виде.Для решения получаем новую компактную систему с определенным размещением слагаемых с токами I_{11}, I_{22}, I_{33} в виде соотношения (2):

$$\left.\begin{aligned} I_{11}\cdot R_{11} - I_{22}\cdot R_4 - I_{33}\cdot R_2 = E_{11} \\ -I_{11}\cdot R_4 + I_{22}\cdot R_{22} - I_{33}\cdot R_5 = E_{22} \\ -I_{11}\cdot R_2 - I_{22}\cdot R_5 + I_{33}\cdot R_{33} = E_{33} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Введём обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} +R_{11} - R_4 - R_2 \\ -R_4 + R_{22} - R_5 \\ -R_2 - R_5 + R_{33} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов при переменных I_{11}, I_{22}, I_{33},

$$X = \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец переменных I_{11}, I_{22}, I_{33},

$$B = \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец свободных членов,

то составленная система примет классический вид матричного уравнения $A \cdot X = B$.

В дальнейшем будем решать полученную систему с помощью определителей.

Общее решение системы из трех уравнений относительно тока I_{kk} имеет вид:

$$I_{kk} = E_{11}\cdot\frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22}\cdot\frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + E_{33}\cdot\frac{\Delta_{k3}}{\Delta},$$

где Δ – главный определитель системы уравнений (2);

Δ_{kp} – алгебраические дополнения, получаемые из определителя Δ посредством вычеркивания k-й строки и p-го столбца и умножения полученного определителя на знак $(-1)^{k+p}$.

Далее вычислимглавный определитель системы (2) и дополнения к нему:

$$\Delta = \begin{vmatrix} +R_{11} - R_4 - R_2 \\ -R_4 + R_{22} - R_5 \\ -R_2 - R_5 + R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 48 & -19 & -20 \\ -19 & 43 & -14 \\ -20 & -14 & 46 \end{vmatrix} = 41090;$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} +R_{22} - R_5 \\ -R_5 + R_{33} \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+1} = \begin{vmatrix} 43 & -14 \\ -14 & 46 \end{vmatrix} = 1782;$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} -R_4 - R_5 \\ -R_2 + R_{33} \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2} = -\begin{vmatrix} -19 & -14 \\ -20 & 46 \end{vmatrix} = 1154;$$

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} -R_4 + R_{22} \\ -R_2 - R_5 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+3} = \begin{vmatrix} -19 & 43 \\ -20 & -14 \end{vmatrix} = 1126;$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_2 \\ -R_2 & R_{33} \end{vmatrix}\cdot(-1)^{2+2} = \begin{vmatrix} 48 & -20 \\ -20 & 46 \end{vmatrix} = 1808;$$

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_4 \\ -R_2 & R_5 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{2+3} = -\begin{vmatrix} 48 & -19 \\ -20 & -14 \end{vmatrix} = 1052;$$

И т.д.

В определитель системы уравнений со знаком (+) войдут только собственные сопротивления R_{11}, R_{22}, R_{33}, остальные члены все отрицательные.

Если провести из левого верхнего угла определителя диагональ в нижний правый угол и учесть что $R_{12} = R_{21}$ и вообще $R_{km} = R_{mk}$, то можно убедиться, что определитель главной диагональю делится на две половины, являющиеся зеркальным изображением одна другой, то есть является симметричным. Тогда в силу симметрии будут равны и дополнения с индексами

$$\Delta_{km} = \Delta_{mk} \quad (3)$$

Используя выражение (3), получим:

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = 1154;\ \Delta_{13} = \Delta_{31} = 1126;\ \Delta_{32} = \Delta_{23} = 1052. \quad (4)$$

Используя значения (4), запишем выражение для контурных токов:

$$I_{11} = E_{11}\cdot\frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22}\cdot\frac{\Delta_{12}}{\Delta} + E_{33}\cdot\frac{\Delta_{13}}{\Delta} = -0,67603;$$

$$I_{22} = E_{11}\cdot\frac{\Delta_{21}}{\Delta} + E_{22}\cdot\frac{\Delta_{22}}{\Delta} + E_{33}\cdot\frac{\Delta_{23}}{\Delta} = -0,68133;$$

$$I_{33} = E_{11}\cdot\frac{\Delta_{31}}{\Delta} + E_{22}\cdot\frac{\Delta_{32}}{\Delta} + E_{33}\cdot\frac{\Delta_{33}}{\Delta} = -1,1752.$$

Проанализировав схему на рисунке 1, определяем реальные токи во всех ветвях схемы:

$$I_1 = I_{11} = -0,67603;$$
$$I_2 = I_{11} - I_{33} = 0,49917;$$
$$I_3 = I_{33} = -1,1752;$$
$$I_4 = I_{11} - I_{22} = 0,00053;$$
$$I_5 = I_{33} - I_{22} = -0,49387;$$
$$I_6 = I_{22} = -0,81334.$$

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о том, что математический аппарат теории матриц имеет широкий спектр применения. В частности, позволяет решать задачи анализа электрических цепей методом контурных токов. Использование матричного аппарата позволяет значительно упростить проводимые расчеты.

Список литературы

1. Агроинженерия (электронный учебно-методический комплекс) / Попова С.В., Смирнова Н.Б., Долгих Е.В., Крон Р.В. // Международный журнал экспериментального образования. – 2009. – № S4.
2. Комплект рабочих тетрадей по курсу высшей математики для инженерных специальностей / Попова С.В., Крон Р.В., Смирнова Н.Б., Долгих Е.В., Морозова О.В., Долгополова А.Ф., Тынянко Н.Н. // Международный журнал экспериментального образования. – 2009. – № S4. – С. 14-15.
3. Попова С.В., Смирнова Н.Б. О прикладной направленности математики в высшей школе // Информационные системы и технологии как фактор развития экономики региона: сб. научных статей по материалам Международной науч.-практ. конф. – Ставрополь: АГРУС Ставропольского ГАУ, 2013. – С. 260-264.
4. Линейная алгебра: учебное пособие / Крон Р.В., Попова С.В., Долгих Е.В., Смирнова Н.Б. // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 11-1. – С. 115.
5. Математика: учебное пособие / Крон Р.В., Попова С.В., Долгих Е.В., Смирнова Н.Б. // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 11-1. – С. 114-115.
6. Немцова А.В., Попова С.В. Применение средств матричной алгебры для решения задач экономического содержания // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5-2. – С. 171-172.
7. Бондаренко В.А., Мамаев И.И. Экономико-математическое моделирование: сущность и этапы // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона: сб. трудов ежегодной 76-й научно-практической конференции Ставропольского государственного аграрного университета «Аграрная наука - Северо-Кавказскому региону». – Ставрополь, 2012. – С. 277-280.
8. Вахтина Е.А., Габриелян Ш.Ж. Электротехника и электроника. – Москва, Изд-во «Илекса», 2012.