На продолжении AC возьмем произвольную точку K и опустим из нее перпендикуляр KZ на прямую AD.

Так как по предыдущей лемме

$$\frac{AC}{AD} \le \frac{AK}{AZ}, \text{ то } 1 \langle \frac{AC}{AB} \langle \frac{AC}{AD} \le \frac{AK}{AZ}.$$

Но при $\sigma \to 0$ последнее отношение стремится к 1, поэтому $\lim\limits_{\sigma\to 0}\frac{AC}{AB}=1$.

Теорема 2. Предел отношения меры неограниченно убывающей дуги окружности к длине ее хорды существует и равен положительному числу.

В самом деле, если σ – мера дуги, a – длина ее хорды и t – длина соответствующего дуге отрезка касательной, то

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\sigma}{a}=\lim_{\sigma\to 0}\frac{\sigma}{t}\cdot\frac{t}{a}=\lim_{\sigma\to 0}\frac{\sigma}{t}\rangle 0 \cdot$$

Теорема 3. Существует система измерения дуг, при которой предел отношения меры неограниченно убывающей дуги к длине ее хорды равен 1.

Пусть λ – градусная мера и a – длина хорды дуги окружности и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{\lambda}{a}=K$.

Примем за единицу измерения дугу K^0. Новую меру дуги λ обозначим через S. Так как новая единица в K раз больше старой, то

$$S=\frac{1}{K}\lambda,$$

а поэтому

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{S}{a}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{K}\cdot\frac{\lambda}{a}=\frac{1}{K}\cdot\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda}{a}=1.$$

Называя систему измерения, о которой говорится в последней теореме, линейной, а меру дуги в линейной системе измерения длиной дуги, получим следующую теорему.

Теорема 4. Длина всякой дуги окружности равна пределу, к которому стремится длина вписанной в дугу выпуклой ломаной, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, так что каждая часть дуги, стягиваемая звеном, стремится к нулю.

Список литературы

1. Бакельман И.Я. Высшая геометрия. – М.: Просвещение, 1967. – 367 с.

2. Мамаев И.И., Попова С.В. Окружность в абсолютной геометрии // Инновации в науке: пути развития: матер. Междунар. заочн. науч-практ. конф. – Чебоксары: учебно-методический центр, 2014. – С. 326-331.

3. Мамаев И.И., Бондаренко В.А., Шибаев В.П. Элементы теории математических доказательств в преподавании математических дисциплин в вузе. Ежегодная 77 науч-практ. конф. “Аграрная наука – Северо-Кавказскому федеральному округу”. – Ставрополь: СтГАУ, 2013. – С. 482-486.

4. Донец З.Г., Мамаев И.И., Шибаев В.П. Учебная дисциплина как целостная модель организации обучения студентов на интегративной основе // Теоретические и прикладные проблемы современной педагогике. – Ставрополь: СтГАУ, 2012. – С. 40-47.

5. Конков Д.А., Леликова Е.И., Мелешко С.В. Взаимодействие математики с экономикой // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – №5. – С. 159-161.

6. Невидомская И.А., Якубова А.М. Применение факторного анализа при исследовании экономических процессов // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – №6. – С. 81-83.

7. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б. Анализ и оценка приоритетности, изучаемых студентами экономических специальностей аграрных вузов // Вестник АПК Ставрополья. СтГАУ. – 2013. – №1(9). – С. 6-10.

СВОЙСТВА СЕКУЩИХ И КАСАТЕЛЬНЫХ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Мамаев И.И., Светличная В.Ю.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

Для кривых второго порядка возникает вопрос, имеющий практическое значение: действительны ли для параболы, эллипса и гиперболы метрические соотношения подобные тем, которые существуют для окружности (свойства касательной и секущей и другие).В данной статье покажем, что такие метрические соотношения существуют.

I. Парабола

Лемма 1. Пусть точка B лежит на хорде AC параболы $y=ax^2$ или на ее продолжении и, кроме того, прямая BD параллельна оси Oy, причем точка D лежит на параболе. Тогда

$$a\cdot AB\cdot BC\cos^2\alpha=BD, \qquad (1)$$

где α – угол, составленный хордой с горизонталью.

Доказательство. Решим сначала графическим путем квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Для этого построим на одном чертеже графики функции $y=ax^2$ и $y=-bx-c$. Очевидно, абсцисса x_1 и x_2 точек пересечения A и C параболы с прямой будут корнями данного уравнения.Сделав затем некоторые дополнительные построения, найдем из чертежа (рис. 1):

$$AE=x-x_1 \text{ и } EF=x_2-x.$$

Далее, перемножая AE и EF, получим (2):

$$AE\cdot EF=AB\cdot BC\cdot\cos^2\alpha=$$
$$=x\left(x_1+x_2\right)-x_1x_2-x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}-x^2=\frac{1}{a}\left(-bx-c-ax^2\right)$$

Кроме того, нетрудно заметить, что

$$BD=\left(-bx-c\right)-ax^2 \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) следует (1).Аналогичным доказывается лемма и в том случае, когда точка B будет внешней по отношению к параболе (рис. 2).

II. Эллипс

Лемма 2. Пусть DE – вертикальная или горизонтальная и AC – наклонная хорды эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и, кроме того, B – точка пересечения хорд или точка, лежащая на продолжении их. Тогда

$$AB\cdot BC\cdot\cos^2\alpha=\frac{EB\cdot BD\cdot l^2}{b^2+a^2\cdot k^2}, \qquad (4)$$

где α – угол, составленный наклонной хордой с осью Ox, $k=tg\alpha$ и l равно a или b, в зависимости от того, вертикальной или горизонтальной будет хорда DE.

Доказательство. Пусть $y=kx+d$ – уравнение прямой, проходящей через концы наклонной хорды. Решив его совместно с уравнение эллипса, получим квадратное уравнение:

$$x^2+\frac{2a^2kd}{b^2+a^2k^2}\cdot x+\frac{a^2\left(d^2-b^2\right)}{b^2+a^2k^2}=0.$$

Очевидно, что в данном случае

$$x_1+x_2=-\frac{2a^2k\cdot d}{b^2+a^2\cdot k^2} \text{ и } x_1\cdot x_2=\frac{a^2\left(d^2-b^2\right)}{b^2+a^2\cdot k^2}.$$

Далее, из чертежа (рис.3) найдем:

$$CB\cdot\cos\alpha\cdot AB\cdot\cos\alpha=\left(x_1-m\right)\left(m-x_2\right)=$$
$$=-x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)m-m^2,$$

или

$$AB \cdot BC \cdot \cos^2\alpha = \frac{a^2(b^2-d^{2)}}{b^2+a^2\cdot k^2} + \frac{2a^2k\cdot d\cdot m}{b^2+a^2\cdot k^2} - m^2 =$$

$$= \frac{b^2\left(a^2-m^2\right)-a^2\left(km+d\right)^2}{b^2+a^2m^2} \qquad (5)$$

Замечая, что

$$BE = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-m^2} - \left(km+d\right) \text{ и}$$

$$BD = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-m^2} + \left(km+d\right)$$

получим:

$$BE \cdot BD = \frac{b^2\left(a^2-m^2\right)-a^2\left(km+d\right)^2}{a^2} \qquad (6)$$

Таким образом, принимая во внимание равенства (5) и (6), будем иметь

$$AB \cdot BC \cdot \cos^2\alpha = \frac{EB\cdot BD\cdot a^2}{b^{2+}k^2a^2} \qquad (7)$$

В том случае, когда хорда DE горизонтальна, а также тогда, когда точка B будет внешней по отношению к эллипсу (рис.4), теорема доказывается по аналогии.

Частный случай: при $\alpha = 0$ из формулы (7) следует соотношение:

$$AB \cdot BC \cdot b^2 = EB \cdot BD \cdot a^2. \qquad (8)$$

III. Гипербола

Лемма 3.Пусть DE – вертикальная или горизонтальная и AC – наклонная хорды гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и, кроме того, B – точка пересечения хорд или точка, лежащая на продолжении их.

Тогда:

$$AB \cdot BC \cdot \cos^2\alpha = \pm\frac{EB\cdot BD\cdot l^2}{k^2a^2-b^2}, \qquad (9)$$

где, α, k и l имеют тот же смысл, что и для эллипса; при этом знак плюс или минус в правой части равенства берется в соответствии с тем, внутренней или внешней будет хорда AC по отношению к гиперболе. Доказательство леммы (3) аналогично тому, что мы имели для эллипса. Частный случай: если хорда HL параллельна оси Ox и хорда MN параллельна оси Oy и, кроме того, B – точка пересечения одной из них с продолжением другой (рис.5 и 6), то из леммы (3) можно получить соотношение

$$HB \cdot BL \cdot b^2 = MB \cdot BN \cdot a^2 \qquad (10)$$

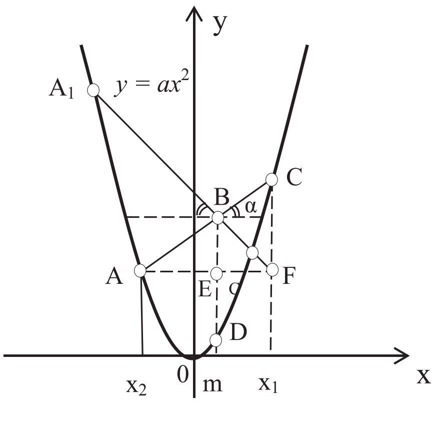

Рис. 1.

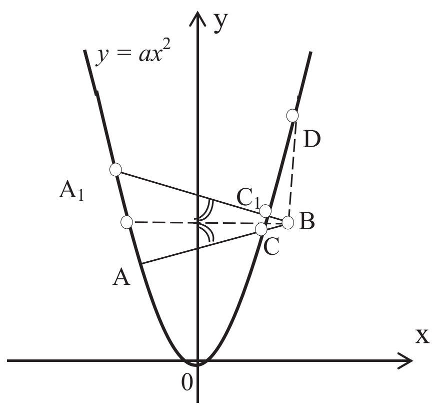

Рис. 2.

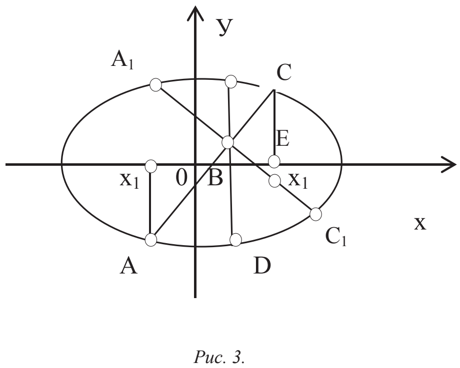

Рис. 3.

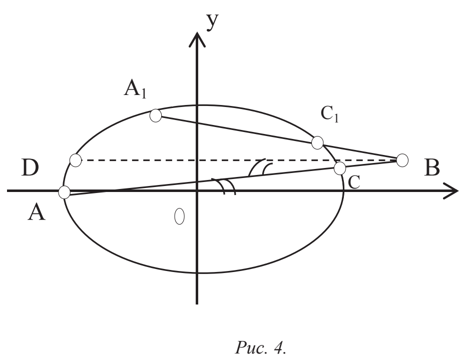

Рис. 4.

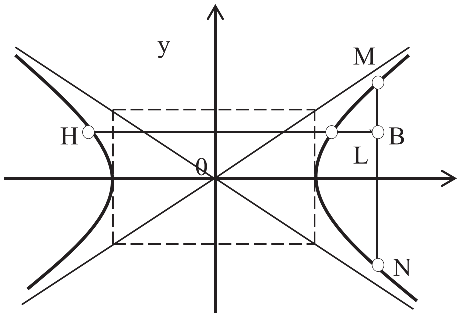

Рис. 5.

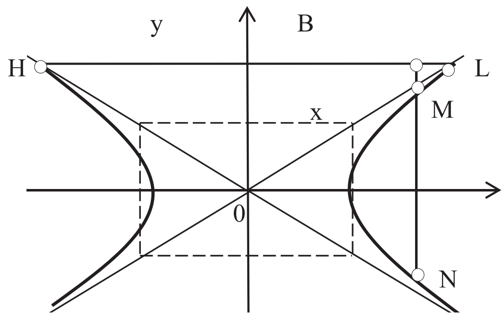

Рис. 6.

Так как через точку B, не лежащую на кривой, можно провести всякий раз по две прямых (две хорды, или две секущих, или секущую касательную), составляющих с осью Ox одинаковые углы, то из рассмотренных выше лемм, а также их частных случаев, непосредственно вытекают следующие теоремы.

Теорема I. Произведения отрезков хорд кривой второго порядка, проходящих через данную точку и, составляющих с ее осью одинаковые углы, равны между собой.

Теорема II. Произведения секущих кривой второго порядка, проходящих через данную точку и составляющих с ее осью одинаковые углы, на их внешней части, равны между собой.

Теорема III. Если секущие и касательные кривой второго порядка, проведенные из данной точки, составляют одинаковые углы с ее осью, то квадрат касательной будут равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

Теорема IV. Если хорда центральной кривой HL параллельна оси Ox и хорда MN параллельна оси Oy и, кроме того, B – точка пересечения хорд или точка, лежащая на продолжении их, то $HB \cdot BL \cdot b^2 = MB \cdot BN \cdot a^2$. В частности, для окружности и равносторонней гиперболы ($b = a$) будем иметь: $HB \cdot BL = MB \cdot BN$.

Отметим также, что теоремы I, II и III (с учетом того, что касательная если предельное положение секущей) можно объединить в одну теорему: если AC и A_1C_1 – хорды кривой второго порядка, составляющие с ее осью одинаковые углы, и B является точкой пересечения этих хорд или лежащие на их продолжении, то для полученных при этом отрезков имеет место равенство $AB \cdot BC = A_1B \cdot BC_1$.

Список литературы

1. Погорелов А.В. Основания геометрии. – М.: Наука, 1979.

2. Мамаев И.И., Котова С.В. Окружность в абсолютной геометрии. II Инновация в науке: пути развития: материалы международной заочной научно-практической конференции. – Чебоксары: учебно-методический центр, 2014. – С. 326-331.

3. Мамаев И.И., Бондаренко В.А., Шибаев В.П. Элементы теории математических доказательств в преподавании математических дисциплин в вузе. Ежегодная 77 научно-практическая конференция «Аграрная наука – Северо-Кавказскому федеральному округу». – Ставрополь: СтГАУ, 2013. – С. 482-486.

4. Донец З.Г., Мамаев И.И., Шибаев В.П. Учебная дисциплина как целостная модель организации обучения студентов на интегративной основе // Теоретические и прикладные проблемы современной педагогики. – Ставрополь: СтГАУ, 2012. – С. 40-47.

5. Литвин Д.Б., Яновский А.А., Донец З.Г. Интерполяция и аппроксимация данных в MATLAB // Информационные системы и технологии как фактор развития экономики региона. – Ставрополь: СтГАУ, 2013. – С. 97-99.

6. Серикова В.С., Родина Е.В. Кривые второго порядка // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – №5. – С. 175-177.

7. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б. Анализ и оценка приоритетности, изучаемых студентами экономических специальностей аграрных вузов // Вестник АПК Ставрополья. СтГАУ. – 2013. – №1(9). – С. 6-10.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ В ЭКОНОМИКЕ

Одукалец А.А., Хорошман П.А.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

Методы дискретной математики (методы формализованного представления) часто используются для анализа, исследования управленческих задач и их решения, а также для моделирования объектов исследования. В число этих методов входят методы, которые базируются на теоретико-множественных представлениях, математической логике, графах и других разделах математики.

Методы дискретной математики применяются в таких отраслях экономики, как математическое моделирование, логистика, эконометрика.

В эконометрике, например, используются булевские переменные для построения регрессионных моделей по неоднородным данным и для анализа регрессионных моделей с переменной структурой.

В данном случае исследуется только одно уравнение регрессии, в которое добавляются булевские переменные, характеризующие изучаемый фактор. Этим методом очень удобно пользоваться, если есть необходимость установить зависимость модели от какого-либо фактора.

Если в логистике требуется задать маршруты или описать потоки, то удобнее всего будет применить теорию графов. Здесь схему дорог мы можем изобразить, как ориентированный граф, и далее выбрать самый короткий маршрут.

Что же касается теории нечетких множеств, то с ее помощью можно правильно сделать выбор в пользу конкурентоспособного товара или услуги методом нечеткого предпочтения, поэтому эта теория используется в маркетологии, когда нужно проанализировать рынки экономических благ.

Рассмотрим практическое применение Жадного алгоритма, который заключается в принятии локально оптимальных решений на каждом этапе, допуская, что конечное решение также окажется оптимальным. В этом алгоритме пересеклись интересы дискретной математики и исследования операций.

Пусть нам дана задача: в городе Невинномысске находятся заводы. Они поставляют свою продукцию в магазины, кафе и аптеки этого города. Специалисты определили возможные дорожные маршруты для того, чтобы проложить все коммуникации, и выяснили, сколько денежных средств потребуется для создания коммуникаций для каждой трассы. Итак, проложить коммуникаций для дороги между фабрикой одежды и магазином обуви составляет 15 у.е., между фабрикой одежды и мебельным заводом – 85 у.е.,