ная величина. Необходимо отметить, что о любой случайной величине мы располагаем определенными знаниями, но бывает очень тяжело найти закономерности в ее поведении.

Анализ соответствующей литературы показал, что при отдельных условиях суммарное поведение достаточно значительного числа случайных величин почти целиком теряет случайный характер и при этом делается закономерным.

На практике при изучении закономерностей массовых случайных явлений, зависящих от большого числа случайных факторов, мы используем так называемые предельные теоремы. К ним относятся теоремы Чебышева, Пуассона, Бернулли и т. д.

Предельны теоремы делятся на две группы. К первой группе относятся теоремы, объединенные под общим названием «закон больших чисел». В них ставятся условия, при которых среднее арифметическое случайных величин приближается к некоторым детерминированным (неслучайным) величинам.

Важный вклад в теорию «больших чисел» внёс Якоб Бернулли. Заслуга его заключается в том, что он дал доказательство закона больших чисел в простейшем случае независимых испытаний. В первой половине XIX века Лаплас и Пуассон доказали первые предельные теоремы, что позволило начать их применять к анализу ошибок наблюдений.

Необходимо отметить, что, заложенные Якобом Бернулли основы применения теории вероятностей в различных сферах жизни общества, в том числе и экономике, имели огромное значение. В его труде «Искусство предположений» ученый доказывает теорему о больших числах, выводит понятие доверительного интервала. Существует два вопроса, связанных с теорией вероятностей. Первый вопрос заключается в следующем: как будут соотноситься результаты, полученные на практике, с теоретическими? Второй вопрос состоит в решении обратной задачи: можно ли определить теоретическую вероятность по результатам испытаний?

Якоб Бернулли посвятил несколько десятилетий изучению этой задачи и математически доказал, что при бросании игрального кубика большое число раз доля случаев, когда выпадет четыре очка, будет приближаться к 1/6. Математик назвал свое открытие золотой теоремой, однако в современной формулировке она известная как закон больших чисел.

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события постоянна, то с вероятностью, стремящейся к единице, можно утверждать, что при неограниченном увеличении числа испытаний относительная частота W появления события сходится по вероятности к его вероятности P:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|W-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Теорема Бернулли состоит из двух частей, первая из которых говорит о том, что заданной точности можно достичь при конечном числе экспериментов. Вторая часть теоремы позволяет рассчитать количество экспериментов, которое потребуется для достижения желаемой точности.

Например, при проведении выборов в краевую государственную думу можно установить допустимое значение ошибки и определить число бюллетеней, которые должны будут заполнить избиратели, чтобы получить результат с заданной точностью.

Одним из наиболее общих законов больших чисел является терема Чебышева, которая справедлива не только для дискретных, но и для непрерывных случайных величин. Опыт показывает, что данная теорема подтверждает связь между случайностью и необходимостью.

Например. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

Решение. а). Обозначим через дискретную случайную величину X число отказавших элементов за время T. Тогда

$$M(x)=n\cdot p=10\cdot 0,05=0,5;$$

$$D(x)=n\cdot p\cdot q=10\cdot 0,05\cdot 0,95=0,475$$

Воспользуемся неравенством Чебышева:

$$P\left(\left|X-M(x)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Подставим $M(X)=0,5; D(X)=0,475, \varepsilon=2$, получим

$$P\left(\left|X-0,5\right|<2\right)\geq 1-\frac{0,475}{4}=0,88.$$

б). События $\left|X-0,5\right|<2$ и $\left|X-0,5\right|\geq 2$ противоположны, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Значит, $P\left(\left|X-0,5\right|\geq 2\right)\leq 1-0,88=0,12$.

Таким образом, уверенно сказать, какое возможное значение примет каждая из случайных величин, нельзя. Однако, можно с определенной уверенностью предвидеть, какое значение примет их среднее арифметическое. Данная характеристика достаточно большого числа независимых случайных величин утрачивает характер случайной величины. Это связанно с тем, что отклонения каждой из величин от своих математических ожиданий могут быть как положительными, так и отрицательными. Однако, в среднем арифметическом отклонении они взаимно погашаются.

Список литературы

1. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б., Мелешко С.В. Теория вероятностей и математическая статистика // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – № 11. – С. 51-52.

2. Мамаев И.И., Бондаренко В.А., Шибаев В.П. Теория вероятностей и математическая статистика в аграрном вузе: сборник научных трудов «Финансово-экономические проблемы развития региона и учетно-аналитические аспекты функционирования предпринимательских структур» по материалам Ежегодной 77-ой научно-практической конференции ФГБОУ ВПО «Ставропольский государственный аграрный университет» «Аграрная наука – Северо-Кавказскому федеральному округу». – 2013. – С. 478-482.

3. Манастырная Е.С., Невидомская И.А. Теория вероятностей как теоретическая основа математической статистики // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5-2. – С. 165-166.

4. Мелешко С.В., Невидомская И.А., Донец З.Г. Организация самостоятельной работы студентов при решении задач теории вероятностей: сборник научных трудов «Финансово-экономические проблемы развития региона и учетно-аналитические аспекты функционирования предпринимательских структур» по материалам Ежегодной 77-ой научно-практической конференции ФГБОУ ВПО «Ставропольский государственный аграрный университет» «Аграрная наука – Северо-Кавказскому федеральному округу». – 2013. – С. 486-489.

5. Невидомская И.А. Информационные технологии в преподавании математики в аграрном вузе // Известия Южного федерального университета. Педагогические науки. – 2011. – № 6. – С. 154-160.

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

Хомутова Е.А., Калиниченко В.А.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

В математике довольно часто встречаются задачи, в которых присутствует большое количество повторений одного и того же условия, испытания или эксперимента. Результатом каждого испытания будет считаться совершенно другой результат от наступившего предыдущего. Зависимости в результатах так же наблюдаться не будет. В качестве результата испытания можно различить несколько возможностей элементарных последствий: возникновение события (А) или же возникновение события, которое дополняет А.

Тогда попробуем предположить, что вероятность возникновения события Р(А) регулярна и равна p (0<p<1).

Примерами такого испытания может быть большое количество задач, таких как подбрасывание монетки, извлечение из темного мешка черно-белых шаров или же рождение черно-белых кроликов.

Такой эксперимент называют конфигурацией повторных независимых испытаний или схемой Бернулли.

Якоб Бернулли родился в семье фармацевта. Отец пытался наставить сына на медицинский путь, но Я. Бернулли увлекся математикой самостоятельно, а позже это стало его профессией. Ему принадлежат различные трофеи в работах на темы по теории вероятностей и чисел, рядов и дифференциальном исчислении. Изучив теорию вероятности по одной изработ Гюйгенса «О расчетах в азартной игре», Якоб увлекся этим. В данной книге не было даже четкого определения концепции «вероятность». Именно Я. Бернулли ввел в математику большую часть современных понятий теории вероятностей. Так же Бернулли первымвыразил свой вариант закона больших чисел. Имя Якоба носят различные работы, теоремы и схемы: «Числа Бернулли», «Многочлен Бернулли», «Дифференциальное уравнение Бернулли», «Распределение Бернулли» и «Уравнение Бернулли».

Вернемся к повторениям. Как уже было указано выше, то в итоге различных испытаний возможны два исхода: либо появится событие А, либо противоположность этому событию. Сама схема Бернулли обозначает производство n-го количества типовых вольных опытов, и в каждом из этих опытов может появится нужное нам событие А (вероятность этого события известна: Р(А)=р), вероятность противоположного события событию А обозначена за q=Р(А)=1-р. Требуется определение вероятности, что при проведении испытаний неизвестного количества событие А появится ровно k раз.

Важно помнить о главном условии при решении задач при помощи схемы Бернулли-это постоянство. Без него схема теряет всякий смысл.

Этой схемой можно пользоваться для решения задач различного уровня сложности: от простых (та же монетка) до сложных (проценты). Однако чаще схема Бернулли применяется в решении таких задач, которые связаны с контролем свойств различной продукции и уверенности в самых разных механизмах. Только для решения задачи до начала работы должны быть известны заранее все условия и значения.

Не все задачи в теории вероятностей сводятся к постоянству в условиях. Даже если взять в пример черные и белые шары в темном мешке: при вытягивании одного шара соотношение количества и цветов шариков в мешке изменилось, а значит изменилась и сама вероятность.

Однако если же условия у нас постоянны, то мы можем точно определить требуемую от нас вероятность того, что событие А произойдет ровно kраз из n возможных.

Этот факт Якоб Бернулли скомпоновал в теорему, которую впоследствии стали называть его именем. «Теорема Бернулли» является одной из главных теорем в теории вероятности. Впервые ее опубликовали в труде Я.Бернулли «Искусство предположений». Что же представляет из себя эта теорема? «Если вероятность р наступления события А в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_{k,n}$ того, что событие наступит *k* раз в *n* испытаниях, не зависящих друг от друга равна: $P_{k,n} = C_n^{\ k} \cdot p^k \cdot q^{(n-k)}$, где q=1-p».

В доказательство действенности формулы можно привести задачи.

Задача № 1:

Из n стеклянных банок за месяц хранения k разбиваются. Наугад взяли m банок. Найти вероятность, что среди этих банок l не разобьются. n=250, k=10, m=8,l=4.

Решение: Имеем схему Бернулли со значениями:

p=10/250=0,04 (вероятность того, что банки разобьются);

n=8 (число испытаний);

k=8-4=4 (количество разбитых банок).

Используем формулу Бернулли

$$P_n(k) = C_n^{\ k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Получили:

$$P_8(4) = C_8^4 \cdot 0,04^2 \cdot (1-0,04)^{8-4} =$$

$$= \frac{8!}{4!4!} \cdot 0,04^2 \cdot 0,93^3 = 0,0141.$$

Ответ: 0,0141

Задача № 2:

Вероятность изготовления неисправного изделия на производстве равна 0,2. Найти вероятность того, что из 10 изготовленных на этом производстве изделий ровно *k* должны быть исправны. Выполнить решение для *k* = 0, 1, 10.

Нам интересно событие *А* – изготовление исправных деталей, случающееся раз в час с вероятностью p=1-0,2=0,8. Надо найти вероятность того, что данное событие совершится *k* раз. Событию *А* противоположно событие «не *А*», т.е. изготовление неисправного изделия.

Следовательно, мы имеем: *n*=10; p=0,8; *q*=0,2.

В итоге найдем вероятность того, что из 10 изготовленных изделий все изделия неисправны (*k*=0), что одно изделие исправно (*k*=1), что неисправных нет вообще (*k*=10):

$$P_{10}(0) = C_{10}^{\ 0} \cdot p^0 \cdot q^{10} = \frac{10!}{(0!\cdot 10!)} \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^{10} = 10^{-7}.$$

$$P_{10}(1) = C_{10}^1 \cdot p^1 \cdot q^9 = \frac{10!}{(1!\cdot 9!)} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^9 = 4 \cdot 10^{-6}.$$

$$P_{10}(10) = C_{10}^{10} \cdot P^1 \cdot q^9 = \frac{10!}{(10!\cdot 0!)} \cdot 0,8^{10} \cdot 0,2^0 = 0,1.$$

В заключении хотелось бы отметить, что в современности многие ученые пытаются доказать, что «формула Бернулли» не соответствует законам природы и можно решить задачи, не применяя ее к использованию. Конечно это возможно, большинство задач по теории вероятности возможно выполнить без формулы Бернулли, главное не запутаться в больших объемах цифр.

Список литературы

1. Боголюбов А.Н. Математики. Механики: биографический справочник. – Киев: Наукова думка, 1983.

2. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б. Анализ и оценка приоритетности разделов математических дисциплин, изучаемых студентами экономических специальностей аграрных вузов // Вестник АПК Ставрополья. – 2013. – № 1 (9). – С. 6-10.

3. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Перспективы применения математических методов в экономических исследованиях // Аграрная наука, творчество, рост. – 2013. – С. 255-257.