РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПО ОПТИМИЗАЦИИ ТОВАРА МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Елисеева Л.А., Варламов Д.Б., Светличная В.Б., Зотовая С.А.

Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: www.volpi.ru

Постановка задачи.

Предприятие изготавливает товары в течение некоторого времени, а затем выходит на рынок с целью продажи этих товаров. Вероятности успешной или неуспешной продажи, а также величины доходов в зависимости от результата предыдущего раунда заданы матрицами:

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}, P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$

$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}, D^{(1)} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix},$$

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}, D^{(3)} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Стратегия 1 соответствует отсутствию рекламы, стратегия 2 – рекламе по радио, стратегия 3 – рекламе по телевидению. Необходимо определить оптимальную стратегию, т.е. максимально возможное математическое ожидание дохода на несколько шагов вперёд.

Решение.

Пусть максимально возможное математическое ожидание дохода за n шагов:

$$M_0(1) = M_0(1) = 0.$$

Тогда рекуррентное соотношение

$$M_n(i) = \max\left\{q_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{m} P_{ij}^{(k)} V_{n-1}(j) : k \in \{1, \dots, K\}\right\}$$

позволяет найти оптимальную стратегию поведения $(k_1(1), k_2(1))$ в расчёте на один шаг:

$$M_1(1) = \max\begin{Bmatrix} 0{,}5 \cdot 9 + 0{,}5 \cdot 3 = 6 \\ 0{,}6 \cdot 8 + 0{,}4 \cdot 2 = 5{,}6 \\ 0{,}7 \cdot 6 + 0{,}3 \cdot 1 = 4{,}5 \end{Bmatrix},$$

$$M_1(2) = \max\begin{Bmatrix} 0{,}4 \cdot 3 + 0{,}6 \cdot (-7) = -3 \\ 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot (-8) = -3{,}5 \\ 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot (-10) = -4 \end{Bmatrix}.$$

Оптимальная стратегия поведения $(k_1(1), k_2(1)) = (1; 1)$ в расчёте на один шаг, при этом $M_1(1) = 6$; $M_1(2) = -3$. Теперь найдем оптимальную стратегию поведения $(k_1(2), k_2(2))$

$$M_2(1) = \max\begin{Bmatrix} 6 + 0{,}5 \cdot 6 + 0{,}5 \cdot (-3) = 7{,}5 \\ 5{,}6 + 0{,}6 \cdot 6 + 0{,}4 \cdot (-3) = 8 \\ 4{,}5 + 0{,}7 \cdot 6 + 0{,}3 \cdot (-3) = 7{,}8 \end{Bmatrix},$$

$$M_2(2) = \max\begin{Bmatrix} -3 + 0{,}4 \cdot 6 + 0{,}6 \cdot (-3) = -2{,}4 \\ -3{,}5 + 0{,}5 \cdot 6 + 0{,}5 \cdot (-3) = -2 \\ -4 + 0{,}6 \cdot 6 + 0{,}4 \cdot (-3) = -1{,}6 \end{Bmatrix}.$$

В расчёте на два шага оптимальная стратегия поведения $(k_1(2), k_2(2)) = (2; 3)$, $M_2(1) = 8$; $M_2(2) = -1{,}6$. Найдем оптимальную стратегию поведения $(k_1(3), k_2(3))$ в расчёте на три шага:

$$M_3(1) = \max\begin{Bmatrix} 6 + 0{,}5 \cdot 8 + 0{,}5 \cdot (-1{,}6) = 9{,}2 \\ 5{,}6 + 0{,}6 \cdot 8 + 0{,}4 \cdot (-1{,}6) = 9{,}76 \\ 4{,}5 + 0{,}7 \cdot 8 + 0{,}3 \cdot (-1{,}6) = 9{,}62 \end{Bmatrix},$$

$$M_3(2) = \max\begin{Bmatrix} -3 + 0{,}4 \cdot 8 + 0{,}6 \cdot (-1{,}6) = -0{,}76 \\ -3{,}5 + 0{,}5 \cdot 8 + 0{,}5 \cdot (-1{,}6) = -0{,}3 \\ -4 + 0{,}6 \cdot 8 + 0{,}4 \cdot (-1{,}6) = -0{,}16 \end{Bmatrix}.$$

В расчёте на три шага оптимальная стратегия поведения $(k_1(3), k_2(3)) = (2; 3)$, $M_3(1) = 9{,}76$; $M_3(2) = 0{,}16$.

В итоге можно предположить, что стратегия (2;3) останется оптимальной и на большее число шагов.

Список литературы

1. Славина С.С., Светличная В.Б. Решение задачи «о назначениях» методом динамического программирования // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5 (2). – С. 200-200.

2. Булашкова М.Г., Ломакина А.Н., Чаузова Е.А., Зотова С.А. Роль математики в современном мире // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 4. – С. 45-45.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Карпухин И.А., Вертелецкий Р.А., Агишева Д.К., Светличная В.Б.

Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского государственного технического университета, Волжский, Россия, www.volpi.ru

При обследовании 2000 тепличных хозяйств было отобрано 110 теплиц. Распределение их по объёму совокупных ежегодных продаж (ден. ед.) приведено в таблице:

Объём совокупных ежегодных продаж, ден. ед.	менее 500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	Всего
Число теплиц	8	20	52	18	12	110

Найти:

а) вероятность того, что средний объём продаж во всех тепличных хозяйствах отличается от среднего объёма продаж в выборке не более чем на 100 ден. ед. (по абсолютной величине);

б) границы, в которых с вероятностью 0,97 заключена доля теплиц, объём продаж которых не более 1000 ден. ед.;

в) каким должен быть объём выборки, чтобы те же границы для доли теплиц, объём продаж которых не более 1000 ден. ед., можно было гарантировать с вероятностью 0,999?

Решение. Предварительно находим числовые характеристики выборки:

$$\bar{x}_в = 1255;\ \sigma_в = \sqrt{D_в} = 528{,}701;\ s = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sigma_в = 531{,}121$$

а) Для вычисления искомой вероятности применим формулу

$$P\{|\bar{x}_г - \bar{x}_в| \le \varepsilon\} = 2\Phi(t),$$

где $\varepsilon = 100$, t – аргумент функции Лапласа, который в случае неизвестного $\sigma_г$ и известного объёма генеральной совокупности N, определяется по формуле:

Имеем

$$t=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{s^2}{n}\cdot\left(1-\frac{n}{N}\right)}}=\frac{100}{\sqrt{\frac{282089{,}241}{110}\cdot\left(1-\frac{110}{2000}\right)}}=$$

$$=\frac{100}{49{,}2281}=2{,}03.$$

Тогда

$$P\{|\bar{x}_г-\bar{x}_в|\le 100\}=2\Phi(2{,}03)=2\cdot 0{,}4788=0{,}9576.$$

б) По данной таблице найдём долю теплиц с объёмом продаж не более 1000 ден. ед.:

$$p^*=\frac{m}{n}=\frac{8+25}{110}=\frac{33}{110}=0{,}3.$$

Пусть $(p^*-\varepsilon,p^*+\varepsilon)$ – интервал, в который с вероятностью 0,97 попадает доля $p^*=0{,}3$.

Значение ε определяется по формуле:

$$\varepsilon=t\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}.$$

Т. к. $\gamma=0{,}97=P\{|p-p^*|<\varepsilon\}=2\Phi(t)$, то

$$\Phi(t)=0{,}97/2=0.485.$$

По таблице находим t = 2,17.

Тогда

$$\varepsilon=2{,}17\cdot\sqrt{\frac{33}{110}\left(1-\frac{33}{110}\right)\cdot\frac{1}{110}\left(1-\frac{110}{2000}\right)}=$$

$$=2{,}17\cdot 0{,}0425=0{,}0922.$$

Окончательно находим доверительные границы:

$$0{,}3-0{,}0922<p<0{,}3+0{,}0922;$$

$$0{,}2078<p<0{,}3922.$$

в) Объём выборки определяем по формуле:

$$n=\frac{p^*(1-p^*)}{\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^2+\frac{p^*(1-p^*)}{N}},$$

где $\varepsilon=0{,}095$ (см. п. *б*), т. к. по условию задачи границы те же).

Для доверительной вероятности $2\Phi(t)=0{,}999$ находим по таблице значение аргумента $t=3{,}3$.

Имеем

$$n=\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{\left(\frac{0{,}0922}{3{,}3}\right)^2+\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{2000}}=237{,}2615.$$

Окончательно $n=237$.

Список литературы

1. Агишева Д.К., Зотова С.А., Матвеева Т.А., Светличная В.Б. Математическая статистика: учебное пособие // Успехи современного естествознания. – 2010. – № 2 – С. 122-123.

2. Булашкова М.Г., Ломакина А.Н., Чаузова Е.А., Зотова С.А. Роль математики в современном мире // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 4. – С. 45-45.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ. ПРОВЕДЕНИЕ АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ЭКОНОМИКЕ

Соловьева А.А., Коробкина А.В., Зотова С.А., Агишева Д.К., Светличная В.Б.

Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: www.volpi.ru

Каждый студент в процессе обучения сталкивается с вопросом: "А понадобится ли мне математический анализ в экономических приложениях в жизни?" Ответ да. Ведь с помощью знаний в этой области можно рассчитать прибыль компании, найти количество единиц продукции, которые необходимо продать, найти точку рыночного равновесия, а также объём выпуска, при котором прибыль производителя будет максимальной.

Прибегая к математическому анализу в экономических приложениях, производитель может найти средние издержки на производство единицы продукции, среднее приращение издержек, а также предельные издержки. Приведём пример.

У нас есть следующая функция издержек производства: $Y=50x-0{,}05x^3$ (у.е.). Найти:

1) средние издержки на производство единицы продукции, если объём выпуска продукции $x_0=10$;

2) среднее приращение издержек, если объём выпуска продукции увеличится до x = 15;

3) предельные издержки.

Решение.

1) Найдём средние издержки:

$$y(x_o)/x_o=(50x-0{,}05x^3)/x=(50-0{,}05\cdot x^2)\Big|_{x=10}=$$

$$=50-0{,}05\cdot 10^2=45\text{ (у.е.)}.$$

2) Найдём среднее приращение издержек:

$$y(10)=(50x-0{,}05x^3)\Big|_{x=10}=50\cdot 10-0{,}05\cdot 10^3=450;$$

$$y(15)=(50x-0{,}05x^3)\Big|_{x=10}=50\cdot 15-0{,}05\cdot 15^3=581{,}25;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y(15)-y(10)}{15-10}=\frac{581{,}25-450}{15-10}=$$

$$=\frac{131{,}25}{5}=26{,}25\text{ (у.е.)}.$$

3) Найдём предельные издержки:

$y`=(50x-0{,}05x^3)`=50-0{,}15x^2 \Rightarrow$

$y`(10)=35$ (у.е.);

$y`(15)=16{,}25$ (у.е.).

Сравнивая результаты, делаем вывод, что чем больше объём дополнительной продукции производства, тем меньше требуется дополнительных затрат.

Данная задача по теме математический анализ в экономических приложениях наиболее заинтересовала нас, поэтому мы представили Вашему вниманию алгоритм её решения.

Для решения подобных задач используются основные теории дифференциального исчисления для экономических объектов. Перечислим их.

Теорема №1. Оптимальный для производителя уровень выпуска товара определяется равенством предельных издержек и предельного дохода.

Теорема №2. Оптимальный для производителя уровень экономического производства определяется равенством средних и предельных издержек.

Теорема №3. (Закон доходности): С увеличением производства объёма дополнительной продукции, по-