$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}\tilde{x}_i m_i = \frac{1}{110}(250\cdot 8 + 750\cdot 25 +$$

$$+1250\cdot 47 + 1750\cdot 18 + 250\cdot 12) = 1255,$$

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}\tilde{x}_i^2 m_i - \overline{x}_в^2 = 279524,7934,$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = 528,701.$$

Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\cdot\sigma_в = 531,121$$

Используя критерий согласия Пирсона, при уровне значимости α = 0,05 проверим гипотезу H_0: о нормальном распределении случайной величины X с параметрами $a = \overline{x}_в = 1255$ и $\sigma = s = 531,121$ при альтернативной гипотезе H_1: случайная величина X не распределена по нормальному закону.

Вычислим вероятности p_i попадания случайной величины X в заданные интервалы с помощью функции Лапласа по формуле:

$$p_i = \Phi\left(\frac{x_i - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - a}{\sigma}\right).$$

$$p_1 = P\{-\infty < x \le 500\} = \Phi(-1,42) - \Phi(-\infty) =$$
$$= -0,4222 + 0,5 = 0,0778;$$

$$p_2 = P\{500 \le x < 1000\} = \Phi(-0,48) - \Phi(-1,42) =$$
$$= -0,1844 + 0,4222 = 0,2378;$$

$$p_3 = P\{1000 \le x < 1500\} = \Phi(0,46) - \Phi(-0,48) =$$
$$= 0,1772 + 0,1844 = 0,3616;$$

$$p_4 = P\{1500 \le x < 2000\} = \Phi(1,40) - \Phi(0,46) =$$
$$= 0,4192 - 0,1772 = 0,2420;$$

$$p_5 = P\{x \ge 2000\} = \Phi(+\infty) - \Phi(1,40) =$$
$$= 0,5 - 0,4192 = 0,0808.$$

Для проведения расчётов заполним вспомогательную таблицу:

i	интервал $(x_{i-1}; x_i]$	частота m_i	теоретическая частота $m_i' = np_i$	$\frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'}$
1	менее 500	8	7,78	0,0364
2	500-1000	25	23,78	0,0513
3	1000-1500	47	36,16	1,3120
4	1500-2000	18	24,20	2,7913
5	2000-2500	12	8,08	1,0896
Σ	–	**110**	**110**	**5,2806**

Наблюдаемое значение критерия согласия Пирсона

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{5}\frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'} = 5,2806.$$

По таблице приложения 3 по заданному уровню значимости α = 0,05 и числу степеней свободы $l = 5 - 3 = 2$ найдём критическое значение

$$\chi^2_{кр}(\alpha; l) = \chi^2_{кр}(0,05; 2) = 5,99.$$

Т. к. $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза о нормальном распределении принимается как не противоречащая опытным данным.

Список литературы

1. Агишева Д.К., Зотова С.А., Матвеева Т.А., Светличная В.Б. Математическая статистика: учебное пособие // Успехи современного естествознания. – 2010. – № 2 – С. 122-123.
2. Булашкова М.Г., Ломакина А.Н., Чаузова Е.А., Зотова С.А. Роль математики в современном мире // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 4. – С. 45-45.

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ e^x В РЯД ТЕЙЛОРА

Ефремкин С.И., Мазырина А.М.,
Светличная В.Б., Агишева Д.К., Матвеева Т.А.

Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: www.volpi.ru

Рассмотрим разложение функции $y = e^x$ в ряд Тейлора. Из теории математического анализа известно разложение

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Данное разложение справедливо на промежутке (– ∞; ∞) при неограниченном числе слагаемых. Но для практического использования бесконечное количество членов ряда использовать нецелесообразно.

Исследуем достаточное количество членов разложения заданной функции на промежутке [–2; 2]. Для этого используем программу MathCad. Определим заданную функцию y(x) и ряд Тейлора S(x,N), где N – достаточное количество членов разложения. Вычислим значения функции и ряда для значений $x \in [-2; 2]$ с шагом 0,5.

$$y(x) := e^x \quad S(x,N) := \sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!} \quad X := -2, -1.5 .. 2$$

y(X) =	S(X,1) =	S(X,2) =	S(X,3) =	S(X,4) =
0.135	- 1	1	-0.333	0.333
0.223	-0.5	0.625	0.063	0.273
0.368	0	0.5	0.333	0.375
0.607	0.5	0.625	0.604	0.607
1	1	1	1	1
1.649	1.5	1.625	1.646	1.648
2.718	2	2.5	2.667	2.708
4.482	2.5	3.625	4.188	4.398
7.389	3	5	6.333	7

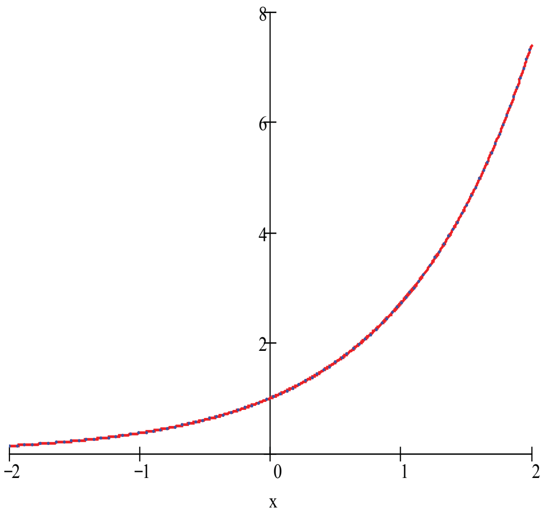
S(X,5) =	S(X,6) =	S(X,7) =	S(X,8) =	S(X,9) =
0.067	0.156	0.13	0.137	0.135
0.21	0.226	0.223	0.223	0.223
0.367	0.368	0.368	0.368	0.368
0.607	0.607	0.607	0.607	0.607
1	1	1	1	1
1.649	1.649	1.649	1.649	1.649
2.717	2.718	2.718	2.718	2.718
4.462	4.478	4.481	4.482	4.482
7.267	7.356	7.381	7.387	7.389

Как видно из вычислений при девяти слагаемых значения с точностью до третьего знака после запятой совпадают.

Найдём абсолютную ошибку:

$\lvert y(X) - G(X,9) \rvert$
281·10- 4
666·10- 5
459·10- 7
73·10-10
0
77·10-10
886·10- 7
637·10- 5
577·10- 4

Построим на одном чертеже графики y(x) и S(x,9).



Вывод: в данном случае предпочтительнее использовать ряд Тейлора с девятью слагаемыми.

Список литературы

1. Матвеева Т.А., Афонасенков О.В., Агишева Д.К. Функциональные ряды, ряды и интеграл Фурье // Международный журнал экспериментального образования. – 2010. – № 12. – С. 76-77.

2. Чеботков П.Е., Светличная В.Б. Представление функции различными рядами Фурье // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 4. – С. 55-56.

ПОСТРОЕНИЕ КУСОЧНО-КВАДРАТИЧНОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Матрохин С.А., Сергиенко В.В.,
Агишева Д. К., Матвеева Т. А.

Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского государственного технического университета, Волжский, Россия, www.volpi.ru

Сплайны [1] имеют многочисленные применения, как в математической теории, так и в разнообразных вычислительных приложениях.

В частности, сплайны двух переменных интенсивно используются для задания поверхностей в различных системах компьютерного моделирования.

Сплайны двух аргументов называют бисплайнами (например, бикубический сплайн), которые являются двумерными сплайнами, моделирующими поверхности. Их часто путают с B-сплайнами (базисными сплайнами), которые являются одномерными и в линейной комбинации составляют кривые – каркас для «натягивания» поверхностей.

Также из базисных сплайнов возможно составить трёхмерную конструкцию для моделирования объёмных тел.

Рассмотрим алгоритм кусочно-квадратичной интерполяции.

Пусть в результате некоторого опыта получены экспериментальные данные, которые можно представить в виде таблицы (табл. 1).

Таблица 1

x	x_0	x_1	…	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	…	x_{n-2}	x_{n-1}
y	y_0	y_1	…	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	…	y_{n-2}	y_{n-1}

Точки x_0, x_1, …, x_{n-1} называются узлами интерполяции. Все точки принадлежат отрезку [a; b], где $a = x_0$, $b = x_{n-1}$.

Для удобства будем полагать, что узлы – равноотстоящие с шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$, тогда

$$x_i = x_0 + i \cdot h,\ 1 \le i \le n-1.$$

Сплайном (англ. spline) называли гибкую металлическую линейку – универсальное лекало, которое использовали чертёжники для соединения точек на чертеже плавной кривой, то есть для графического исполнения интерполяции.

В вычислительной математике сплайном называется функция, которая вместе с производными непрерывна на всём заданном отрезке [a; b], но при этом на каждом частичном отрезке $[x_{i-1};\ x_i]$ в отдельности представляется в виде некоторого алгебраического многочлена.

Максимальная по всем частичным отрезкам степень многочленов называется степенью сплайна, а разность между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной на [a,b] производной – дефектом сплайна.

Алгоритм кусочно-квадратичной интерполяции относительно прост и включает в себя два этапа:

1) нужно найти три узла, ближайших к узлу интерполяции;

2) вычислить значение интерполяционного многочлена второй степени.

Первый этап реализуется в зависимости от регулярного или нерегулярного расположения узлов интерполяции.

Не умаляя общности, можно предположить, что узлы интерполяции расположены произвольно. Тогда, поиск ближайших точек можно осуществить в виде цикла, в котором очередной узел интерполяции последовательно сравнивается с правыми границами отрезков интерполяции.

В том случае, когда выполняется условие $x \le x_k$, то для интерполяции выбираются (k-1)-й, k-й и (k+1)-й узлы.

Иначе k увеличивается на единицу.

Код программной реализации кусочно-квадратичной интерполяции сплайнами: