

Очевидно, что пропорциональность не наблюдается (!), поэтому делаем вывод о том, что в подобных матрицах имеются более глубокие зависимости. На результат не повлияло изменение («порча») столбца, строки матрицы.

Аналогичный эффект наблюдается и для матриц, содержание которых – последовательные значения чисел Фибоначчи. Пусть имеется матрица пятого порядка, состоящая из последовательных чисел Фибоначчи, начиная с третьего члена (рис. 4).

$$j \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 & 13 \\ 21 & 34 & 55 & 89 & 144 \\ 233 & 377 & 610 & 987 & 1597 \\ 2584 & 4181 & 6765 & 10946 & 17711 \\ 28657 & 46368 & 75025 & 121393 & 196418 \end{pmatrix}$$

$$|j| = 0$$

Рис. 4. Значение определителя матрицы с элементами, состоящими из двадцати пяти членов последовательности Фибоначчи, первый элемент матрицы является третьим членом последовательности

Произведём следующие изменения с матрицей j (рис. 4): элементы второго столбца заменим произвольными числами (случай а) рис. 5); элементы третьей строки также произвольными числами (рис. 5 б)).

$$B := \begin{pmatrix} 2 & -10 & 5 & 8 & 13 \\ 21 & 1 & 55 & 89 & 144 \\ 233 & 31 & 610 & 987 & 1597 \\ 2584 & -5 & 6765 & 10946 & 17711 \\ 28657 & 4 & 75025 & 121393 & 196418 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 0$$

а

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 & 13 \\ 21 & 34 & 55 & 89 & 144 \\ 11 & -5 & 7 & -31 & -17 \\ 2584 & 4181 & 6765 & 10946 & 17711 \\ 28657 & 46368 & 75025 & 121393 & 196418 \end{pmatrix}$$

$$|C| = 0$$

Рис. 5. Значение определителя матрицы с элементами, состоящими из двадцати пяти членов последовательности чисел Фибоначчи: а – 2-й столбец заменили произвольными числами, б – 3-я строка заменена произвольными числами

Очевидно, что изменения квадратных матриц, составленных из элементов арифметических и геометрических прогрессий, а также последовательности чисел Фибоначчи, построчно или по столбцам не влияют на их вырожденность, т.е. значение определителя остаётся равным 0. Указанное свойство назовём помехоустойчивостью матриц, составленных из членов прогрессирующих последовательностей (или проще – помехоустойчивостью прогрессирующих последовательностей) и последовательности чисел Фибоначчи.

Возможности использования введённого нового понятия – помехоустойчивости прогрессирующих последовательностей – на практике:

- может быть использовано для передачи больших объёмов информации в двумерных виде массивов с контролем потерь при передаче;
- для криптозащиты передаваемой информации.

Список литературы

1. Смольняков И.М., Часов К.В. Некоторые свойства прогрессирующих последовательностей // Международный журнал экспериментального образования. 2014. № 7. С. 106-107 URL: www.rae.ru/meo/?section=content&op=show_article&article_id=5515 (дата обращения: 21.12.2014).
2. Смольняков И.М., Часов К.В. Исследование различных последовательностей // Материалы VI Международной студенческой электронной научной конференции «Студенческий научный форум» URL: www.scienceforum.ru/2014/729/6698 (дата обращения: 21.12.2014).
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Изд-во: Мир. 1990. с. 368.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Учебник для университетов. Изд-во Наука. Глав.ред. физ.-мат. литературы. Москва. 1968. с. 431
5. Википедия <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D7%E8%F1%E8%E0%D4%E8%E1%E8%ED%E0%F7%F7%E8> (дата обращения: 21.12.2014).
6. Википедия <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%B5%D1%81%D0%B5%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5> (дата обращения: 21.12.2014).

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ И ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

Смольняков И.М., Часов К.В.

Кубанский государственный технологический университет, Армавир, Россия, smolnjackov.igor@yandex.ru

Исследование последовательностей авторами ([1], [2], [3]) показывает, что прогрессирующие последовательности, состоящие из членов арифметических и геометрических прогрессий, обладают тем свойством, что квадратные матрицы любого порядка (начиная с третьего), составленные из их членов, дают определитель равный 0. Анализ доступных литературных источников не выявил даже упоминания о таком замечательном факте.

Числа Фибоначчи представляют собой последовательность, каждый член которой, начиная с третьего, получается как сумма предыдущих двух. Если для прогрессирующих последовательностей любой член можно получить по его номеру, первому члену и разности (знаменателю), то числа Фибоначчи приходится получать последовательно по известному рекуррентному соотношению (хотя существуют приближённые формулы получения n-го члена – например, формула Бине) [4].

Рассмотрим, как соотносятся между собой соседние числа в четвёртой строке (рис. 2). Очевидно, что отношения между ними «почти» равны. Полученное наводит на мысль, почему определитель матрицы получается равным 0.

Интересно, что значения отношений соседних чисел Фибоначчи (рис. 2) «почти» совпадает со значением золотого числа $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ [5].

Но пойдём дальше. Посмотрим, как соотносятся соответствующие элементы матрицы построчно, т.е. чему равны отношения соответствующих элементов в двух строках – четвёртой и третьей (рис. 3). Учитывая, что указанные отношения «почти» равны, становится ясно, почему определитель рассматриваемой матрицы равен 0.

Получив на рис. 2 интересный результат – отношение двух соседних чисел Фибоначчи примерно равно золотому числу φ , перейдём к рассмотрению последовательности, составленной из значений золотого сечения [5] для начального значения $t = 7$ (рис. 4).

В таблице у принимает последовательные значения, содержащие пропорции достаточно близкие к золотому сечению. Получены эти значения с помощью приведённого на рисунке (рис. 4) цикла. При этом вычисление следующего элемента последовательности весьма похоже на вычисление соответствующего элемента последовательности чисел Фибоначчи. Приведённое в начале

программы значение φ затем получается как отношение соседних последовательных значений последовательности (приводится в качестве контроля). Составленная матрица C имеет определитель равный 0, как это наблюдалось и для последовательности чисел Фибоначчи. Этот результат на первый взгляд удивителен, но послед-

няя строка (рис. 4) вычислений (отношения соответствующих элементов матрицы в двух строках) наглядно показывает пропорциональность между строками (одно из основных свойств определителя). То же самое наблюдается и для матрицы, состоящей из элементов последовательности чисел Фибоначчи (рис. 3).

ORIGIN:= 1

```
f2(xi,n) :=
  n ← n
  x1 ← 1
  x2 ← 1
  for i ∈ 1..n - 1 + xi
    xi+2 ← x1 + xi+1
  i ← 1
  for k ∈ 1..trunc(√n)
    for j ∈ 1..trunc(√n)
      rk,j ← xxi+i-1
      i ← i + 1
  r
```

c := f2(1, 19)

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 & 21 \\ 34 & 55 & 89 & 144 \\ 233 & 377 & 610 & 987 \end{pmatrix}$$

$|c| = 0$

Рис. 1. Последовательность 16 первых чисел Фибоначчи, записанных в матрицу

$$\frac{c_{4,4}}{c_{4,3}} = 1.6180328 \quad \frac{c_{4,3}}{c_{4,2}} = 1.6180371 \quad \frac{c_{4,2}}{c_{4,1}} = 1.6180258$$

Рис. 2. Пропорции между соседними числами Фибоначчи по строке матрицы

$$\frac{c_{4,4}}{c_{3,4}} = 6.8541667 \quad \frac{c_{4,3}}{c_{3,3}} = 6.8539326 \quad \frac{c_{4,2}}{c_{3,2}} = 6.8545455 \quad \frac{c_{4,1}}{c_{3,1}} = 6.8529412$$

Рис. 3. Пропорции между соответствующими числами Фибоначчи в двух соседних строках матрицы

ORIGIN:= 1

$$f := \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad f = 1.618034 \quad t := 7 \quad i := 2..9$$

$$y_1 := \frac{t}{f} \quad y_2 := t - y_1 \quad y_{i+1} := y_{i-1} - y_i$$

$$\frac{y_5}{y_6} = 1.618034 \quad \frac{y_8}{y_9} = 1.618034$$

$$C := \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_4 & y_5 & y_6 \\ y_7 & y_8 & y_9 \end{pmatrix} \quad |C| = 0 \quad |C| \rightarrow 0$$

$$\frac{y_1}{y_4} = 4.236068 \quad \frac{y_2}{y_5} = 4.236068 \quad \frac{y_3}{y_6} = 4.236068$$

y =

	1
1	4.3262379
2	2.6737621
3	1.6524758
4	1.0212862
5	0.6311896
6	0.3900966
7	0.241093
8	0.1490037
9	0.0920893
10	0.0569143

Рис. 4. Матрица, составленная из последовательных значений золотого сечения

Приведённый выше материал был размещён в информационной образовательной среде кафедры общенаучных дисциплин АМТИ как результат студенческой научной работы. Вызвал большой интерес, много вопросов и предложений к авторам. Работа с этим документом сокурсников, студентов других направлений и курсов способствует развитию их научного творчества, самостоятельности в учебной и научной работе.

Список литературы

1. Смольняков И.М., Часов К.В. Формирование НИР студентов посредством информационной образовательной среды // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 7 – С. 105-106 URL: www.rae.ru/meo/?section=content&op=show_article&article_id=5514 (дата обращения: 21.12.2014).
2. Смольняков И.М., Часов К.В. Некоторые свойства прогрессирующих последовательностей // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 7 – С. 106-107 URL: www.rae.ru/meo/?section=content&op=show_article&article_id=5515 (дата обращения: 21.12.2014).
3. Смольняков И.М., Часов К.В. Исследование различных последовательностей // Материалы VI Международной студенческой электронной научной конференции «Студенческий научный форум» URL: www.scienceforum.ru/2014/729/6698 (дата обращения: 21.12.2014).
4. Википедия <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D7%E8%F1%EB%E0.%D4%E8%E1%EE%ED%E0%F7%F7%E8> (дата обращения: 21.12.2014).
5. Википедия <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%B5.%D1%81%D0%B5%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5> (дата обращения: 21.12.2014).

ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА В ГОЛОВОЛОМКАХ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ КЛЕТОЧНОГО ПОЛЯ

Сова С.А., Горовенко Л.А.

Армавирский механико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», Армавир, Россия, sova.semyon@yandex.ru

Наука дает нам мощные инструменты, в виде различных технологий и методик, для решения тех или иных задач. Общество находится в постоянном развитии, и ему требуются всё новые решения для новых задач. Прогресс также не стоит на месте – старые методы подвергаются улучшениям, либо полностью заменяются новыми, более эффективными. Эти изменения можно хорошо проследить в головоломках. Основные математические методы решения всех головоломок являются методы комбинаторного анализа. В данной работе, приводится методика решения головоломки с определением состояния клеточного поля, а именно – японский кроссворд.

Правила игры

Японский кроссворд (или, иначе, японский рисунок) – это особый вид головоломки, в котором нужно, базируясь на кодовые числа-подсказки, разгадать зашифрованную картинку. Кодовые числа показывают, сколько слитных клеток данного цвета находятся в соответствующей колонке или строке.

Например, набор чисел 4, 1, и 3 в сетке японского кроссворда (рисунок 1) означает, что в этом ряду есть три группы: первая – из четырех, вторая – из одной, третья – из трех черных клеток.

Такие группы клеток обязательно должны разделяться как минимум одной пустой (белой) клеткой. Вся задача, в основном, и сводится к тому, чтобы узнать, сколько именно пустых клеток разделяют группы.

Существующие на настоящее время методы решения задачи

Существует множество методов решения задачи, но большинство из них связаны с конкретным случаем, то есть являются не чисто математическими, а скорее логическими.

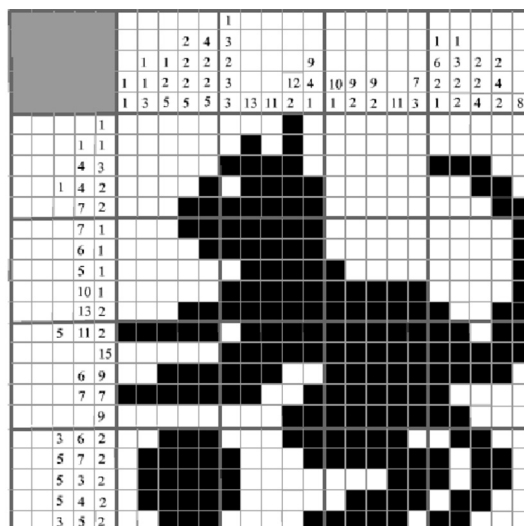


Рис. 1. Японский кроссворд

Рассмотрим один из подходов к математическому решению задачи.

Оценим стоимость полного перебора всех возможных размещений зарисованных клеточек с дальнейшей проверкой соответствия заданному на входе описанию. Например, для простенького кроссворда из 80 клеточек, из них 49 закрашенные, количество размещений $C_{80}^{49} = 1.5 \cdot 10^{23}$, что для современных ПЭВМ означает время выполнения, приблизительно равное геологическому возрасту Земли. (<http://www.thalion.kiev.ua/idx.php/128/665/article/>)

Безусловно, значительную пользу может принести использование принципа «отбрасывать не отдельные размещения, а большие совокупности размещений». В частности, можно строить картинку последовательно по строкам: пробуя разместить зарисованные клеточки в первой строке, сразу проверять их на соответствие описанию первой строки, и переходить к попыткам размещения клеточек второй строки лишь тогда, когда найден один из удовлетворительных способов размещения в первой и т.д. Удовлетворительных размещений зарисованных клеточек в отдельной строке может быть много, и (как правило) лишь одно из них приводит к правильно разгаданному кроссворду. То есть, найдя допустимое размещение клеточек во всех строчках, нужно возвратиться к первой строке, попробовать найти другое допустимое размещение клеточек и снова рассмотреть все возможные размещения в следующих строках. То есть, получается алгоритм с возвратами.

Для каждого из этих вариантов нужно проверить, не противоречит ли он уже известным окончательным состояниям клеточек. Говоря, что вариант размещения противоречит известным окончательным состояниям, мы имеем в виду примерно следующее: если из предшествующего анализа мы знаем, что 5-ая клеточка линии имеет окончательное состояние «не зарисована», то размещать блок длиной 4 в клеточках с 3-ей по 6-ую нельзя, так как это будет противоречить ранее найденному состоянию 5-ой клеточки. То есть, противоречивость варианта размещения блоков с окончательными состояниями появляется или когда пробуем разместить блок поверх гарантированно не зарисованной клеточки, или «симметричным» образом, когда какая-то клеточка имеет окончательное состояние «зарисованная» и оказывается в промежутке между блоками.