Технические науки

АНАЛИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Гилазетдинов А.Р., Зотеев В.А., Хафизов Р.М., Шувалова Л.Е.

Нижнекамский химико-технологический институт, Нижнекамск, Россия, rinat___XIX@mail.ru

1. Введение

Исследование электрических цепей, находящихся в магнитной связи, приводит к решению обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков. Эти уравнения встречаются в задачах электродинамики и в ряде других разделов физики (см. напр., [1]). Теория этих уравнений в настоящее время хорошо разработана.

Ниже рассматриваются два связанных электрических контура, исследование которых приводит к решению дифференциального уравнения четвертого порядка.

2. Постановка задачи и описание алгоритма

Рассматриваются две цепи А и В, находящиеся в магнитной связи при заданном коэффициенте $M = 2$ взаимной индукции (см. рис. 1).

Дано: коэффициент самоиндукции $L_1 = 2$ млГн, сопротивление $R_1 = 150$ Ом и емкость цепи «А» $C_1 = 15$ мкФ; $L_2 = 3$ млГн, $R_2 = 200$ Ом и $C_2 = 10$ мкФ – аналогичные величины для цепи «В».

Найти закон изменения силы тока i в цепи А, предполагая, что сопротивления цепей R_1 и R_2 весьма малы; цепи настроены в унисон, т.е. $C_1L_1 = C_2L_2$.

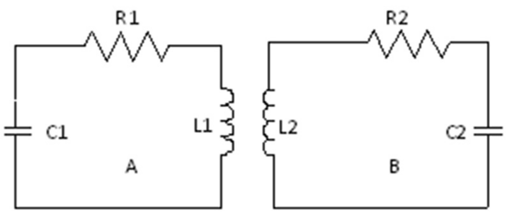


Рис. 1

При составлении уравнений для токов в электрических цепях используется второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма напряжений на резистивных элементах замкнутого контура равна алгебраической сумме электродвижущих сил (ЭДС), входящих в этот контур.

В цепи А возникают силы: ЭДС индукции $-M\frac{di_2}{dt}$, ЭДС самоиндукции $-L\frac{di_1}{dt}$, напряжение конденсатора $-\frac{Q}{C_1} = \frac{1}{C_1}\int i_1 dt$.

Отсюда по закону равновесия электродвижущих сил имеем

$$R_1 i_1 = -M\frac{di_2}{dt} - L_1\frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_1}\int i_1\,dt \qquad (1)$$

Аналогично для цепи В получаем

$$R_2 i_2 = -M\frac{di_1}{dt} - L_2\frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) составляем систему дифференциальных уравнений процесса

$$\begin{cases} M\dfrac{di_2}{dt} + L_1\dfrac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int i_1\,dt = 0, \\ M\dfrac{di_1}{dt} + L_2\dfrac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2\,dt = 0. \end{cases}$$

После дифференцирования имеем

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2i_2}{dt^2} + L_1\dfrac{d^2i_1}{dt^2} + R_1\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C_1}i_1 = 0, \\ M\dfrac{d^2i_1}{dt^2} + L_2\dfrac{d^2i_2}{dt^2} + R_2\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C_2}i_2 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Эта система двух дифференциальных уравнений второго порядка. Исключим из системы (3) величину $\frac{d^2i_2}{dt^2}$.

Тогда получим выражение

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^2i_1}{dt^2} + L_2R_1\frac{di_1}{dt} - MR_2\frac{di_2}{dt} + \frac{L_2}{C_1}i_1 - \frac{M}{C_2}i_2 = 0 \qquad (4)$$

Дифференцируя уравнение (4), находим

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^3i_1}{dt^3} + L_2R_1\frac{d^2i_1}{dt^2} - MR_2\frac{d^2i_2}{dt^2} + \frac{L_2}{C_1}\frac{di_1}{dt} - \frac{M}{C_2}\frac{di_2}{dt} = 0. \qquad (5)$$

В уравнении (5) заменяем величину $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$ выражением из первого уравнения системы (3)

$$M\frac{d^2i_2}{dt^2} = -L_1\frac{d^2i_1}{dt^2} - R_1\frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_1}i_1$$

и получаем соотношение

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^3i_1}{dt^3} + (L_2R_1 + L_1R_2)\frac{d^2i_1}{dt^2} + \left(\frac{L_2}{C_1} + R_1R_2\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{R_2}{C_1}i_1 - \frac{M}{C_2}\frac{di_2}{dt} = 0 \qquad (6)$$

Дифференцируя уравнение (6), находим

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^4i_2}{dt^4} + (L_2R_1 + L_1R_2)\frac{d^3i_1}{dt^3} + \left(\frac{L_2}{C_1} + R_1R_2\right)\frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{R_2}{C_1}\frac{di_1}{dt} - \frac{M}{C_2}\frac{d^2i_2}{dt^2} = 0 \qquad (7)$$

Вторично заменяя величину $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$ выражением из первого уравнения системы (3), получим

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^4i_1}{dt^4} + (L_2R_1 + L_1R_2)\frac{d^3i_1}{dt^3} + \left(\frac{L_1}{C_2} + \frac{L_2}{C_1} + R_1R_2\right)\frac{d^2i_1}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{C_2} + \frac{R_2}{C_1}\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1C_2}i_1 = 0.$$

Сокращаем уравнение (7) на L_1L_2:

$$\left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2}\right)\frac{d^4i_1}{dt^4} + \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}\right)\frac{d^3i_1}{dt^3} + \left(\frac{1}{C_2L_2} + \frac{1}{C_1L_1} + \frac{R_1R_2}{L_1L_2}\right)\frac{d^2i_1}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{L_1}\frac{1}{C_2L_2} + \frac{R_2}{L_2}\frac{1}{C_1L_1}\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1L_1}\frac{1}{C_2L_2}i_1 = 0. \qquad (8)$$

Уравнение (8) представляет линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка, решение которого определит силу тока i_1 в цепи А.

Так как цепи настроены в унисон, т. е. $C_1L_1 = C_2L_2$, и сопротивлениями R_1 и R_2 можно пренебречь, то уравнение (8) принимает вид

$$\left(1-\frac{M^2}{L_1L_2}\right)\frac{d^4 i_1}{dt^4}+\frac{2}{C_1L_1}\frac{d^2 i_1}{dt^2}+\frac{1}{C_1{}^2L_1{}^2}i_1=0.$$

3. Численная реализация

Различают точные и приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Несмотря на то, что большое количество уравнений может быть решено аналитическим способом, часто требуется найти числовое значение при определенных исходных данных. Поэтому широкое распространение получили численные методы, которые реализуются функциями «MathCAD». Для решения однородного дифференциального уравнения четвертого порядка применим такие функции, как Given и Odesolve. Как известно, функция Odesolve возвращает решение дифференциальных уравнений, описанных в блоке Given при заданных начальных условиях.

Ниже приводятся программы, реализующие решение поставленной задачи (8), (9).

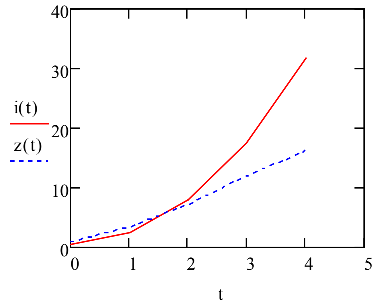
В первой программе активные сопротивления ничтожно малы, поэтому ими можно пренебречь (9):

Given

$M := 2 \quad C_1 := 15 \; C_2 := 10 \; L_1 := 2 \quad L_2 := 3$

$$\left(1-\frac{M^2}{L_1L_2}\right)\frac{d^4}{dt^4}i(t)+\frac{2}{C_1L_1}\frac{d^2}{dt^2}i(t)+\frac{1}{C_1{}^2L_1{}^2}i(t)=0$$

$i(0)=0.5 \; i'(0)=1 \; i''(0)=1.5 \; i'''(0)=2$



$i := Odesolve(t, 5, 100)$

$t := 0.005 \,..\, 5 \qquad z(t) := \frac{d}{dt}i(t)$

$M := 2$

i(t)=

0.505
2.585
7.902
17.561
31.785

Для сравнения, рассмотрим случай, когда учитываются активные сопротивления (8):

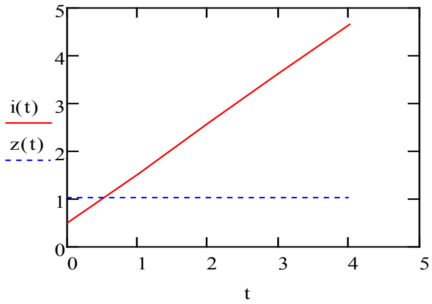
Given

$M := 2 \quad C_1 := 15 \; C_2 := 10 \quad L_1 := 2$

$L_2 := 3 \quad R_1 := 150 \; R_2 := 200$

$$\left(1-\frac{M^2}{L_1L_2}\right)\frac{d^4}{dt^4}i(t)+\left(\frac{R_1}{L_1}+\frac{R_2}{L_2}\right)\frac{d^3}{dt^3}i(t)+\left(\frac{1}{C_2L_2}+\frac{1}{C_1L_1}+\frac{R_1R_2}{L_1L_2}\right)\frac{d^2}{dt^2}i(t)$$
$$+\left(\frac{R_1}{L_1}\frac{1}{C_2L_2}+\frac{R_2}{L_2}\frac{1}{C_1L_1}\right)\frac{d}{dt}i(t)+\frac{1}{C_1L_1C_2L_2}i(t)=0$$

$i(0)=0.5 \quad i'(0)=1 \quad i''(0)=1.5 \; i'''(0)=2$



$i := Odesolve(t, 5, 100)$

$t := 0.005 \,..\, 5 \qquad z(t) := \frac{d}{dt}i(t)$

$i(t) =$

0.505
1.546
2.587
3.628
4.667

Если сравнивать полученные результаты из двух программ, можно сделать следующий вывод: в первом случае, когда активные сопротивления пренебрежительно малы, величина тока значительна и наблюдается экспоненциальный рост. Во втором случае, когда ток зависит от сопротивления, просматривается линейное возрастание .

С помощью проведенных вычислений нашли зависимость тока от сопротивления в цепи: чем больше сопротивление в цепи, тем меньше ток.

Список литературы

1. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений: учеб. пособие. под ред. Ю.С. Богданова: Издательство «Высшая Школа», Минск, 1973.

2. Дьяконов В.П. Справочник по MathCAD PLUS 7.0 PRO. М.: СК Пресс, 1998. 352 с., ил.

Секция «Энергетический менеджмент и инжиниринг энергосистем», научный руководитель – Беззубцева М.М.

ПРИМЕНЕНИЕ ВОЗОБНОВЛЯЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ ЭНЕРГИИ В ФЕРМЕРСКИХ (ДЕХКАНСКИХ) ХОЗЯЙСТВАХ

Абдурахмонов Х.А., Юлдашев З.Ш.

ФГБОУ ВПО СПбГАУ, spbgauconf@mail.ru

На современном этапе развития науки и техники, для производства сельскохозяйственной продукции, в основном используются современные энергосберега-ющие технологии и оборудования, в качестве энергоносителя используются традиционные энергоресурсы. Трудности при их добыче и транспортировке, усложнение экологической ситуации в связи с увеличением при сгорании органического топлива выбросов токсичных веществ, а также рост тарифов на энергоносители, передачи и распределения энергии – все это является предпосылками для перехода к автономному энергообеспечению за счет возобновляемых источников энергии (ВИЭ) [1, 2, 3].

Фермерские (дехканские) хозяйства в Республики Таджикистан, которые расположены децентрализовано, в силу своей специфики, на ряду с традиционными источниками энергии, невозможно представить без применения возобновляемых источников энергии