ПРАВИЛА ПРИПИСЫВАНИЯ ИНДЕКСОВ НУЛЬМЕРНЫХ СТРАТОВ КРИВОЙ ДЛЯ ОСНАЩЁННЫХ ГАУССОВЫХ ДИАГРАММ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Орлова Алёна Валентиновна
Студент Российского государственного педагогического университета им. Герцена, преподаватель Санкт-Петербургского государственного политехнического университета Института международных образовательных программ. Санкт-Петербург. E-mail: id.favorina@gmail.com

Рассмотрены общие кривые и их оснащённые Гауссовы диаграммы. Кривые рассматриваются на плоскости. Даны основные определения и понятия. Общей кривой будем называть образ погружения общего положения окружности в евклидову плоскость. Для общей кривой можно построить так называемую Гауссову диаграмму – это окружность с некоторым количеством хорд. Сформулированы теоремы, которые позволяют ответить на вопрос о возможности реализации кривой с данным набором индексов нульмерных стратов стратификации кривой. Приведен алгоритм построения Гауссовой диаграммы для общей кривой, а также свойства оснащённых Гауссовых диаграмм общих кривых. Показана стратификация кривой и правила вычисления индексов всех размерностей стратов. Приведен пример построения кривой, её Гауссовой диаграммы и таблица с вычислениями индексов этой кривой.

Ключевые слова: общие кривые, оснащённые Гауссовы диаграммы, индексы стратов, стратификация кривой, отрезок индексов.

RULES ATTRIBUTION OF INDEX ZERO-DIMENSIONAL STRATA OF CURVES FOR THE EQUIPPED GAUSS DIAGRAMS OF PLANE CURVES

Orlova Alena Valentinovna
Student of Herzen University, lecturer of Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University Institute of International Educational Programs, Saint-Petersburg. E-mail: id.favorina@gmail.com

This article about general curves of equipped The Gauss Diagrams. Curves are considered in a plane.
Basic definitions and concepts have been given. The overall curve will be called type of immersion in general position circle in the Euclidean plane. For a general curve can be construct so-called The Gauss Diagrams. The Gauss Diagrams is the circle with some an amount of chords. Theorems has been formulated which lets us to answer the question about the implementation opportunities of the curve with the set of indices zero-dimensional strata stratification of curve. An algorithm has been shown for constructing The Gauss Diagrams of the general curve and properties equipped The Gauss Diagrams. For calculating indices of all dimensions of the strata have been shown curve stratification and rules. Of the construction of the curve and The Gaussian Diagrams and tables with calculation of the index of curve has been shown an example.

Key words: general curves, equipped The Gauss Diagrams, indices of strata, stratification of the curve, segment indices.

Рассмотрим общие кривые и их оснащённые Гауссовы диаграммы. Кривые рассматриваются на плоскости. Сформулируем теоремы, которые позволяют ответить нам на вопрос о реализации кривой с данным набором индексов стратов стратификации кривой.

Покажем алгоритм построения Гауссовой диаграммы для общей кривой и свойства оснащённых Гауссовых диаграмм общих кривых.

Общим погружением окружности S^1 *в* плоскость E^2 будем называть гладкое погружение общего положения $S^1 \to E^2$ (где E^2 - Евклидова плоскость).

Общей кривой будем называть образ погружения общего положения окружности S^1 в плоскость E^2.

Двойной точкой кривой на плоскости будем называть точку кривой, прообраз которой состоит ровно из двух точек.

Для общей кривой можно построить так называемую *Гауссову диаграмму кривой*.

Пусть $f : S^1 \to E^2$ - общее погружение, $\gamma = f\,(S^1)$ – общая кривая на плоскости. Пусть $A_1, A_2,\ldots, A_n$ – двойные точки кривой γ ($n \in N$ – число двойных точек кривой γ).

Построим *Гауссову диаграмму* ориентированной кривой $\gamma = f\ (S^1)$ по следующему алгоритму:

1) На окружности отметим точку.

2) На окружности отметим прообраз двойной точки : $f^{-1}(A_i) = \{ A_i^1, A_i^2\}, (i = 1,\ldots, n),$
где A_i^1 - это первый проход через двойную точку, а A_i^2 – второй проход через двойную точку *(Рис. 1 а).*

3) Точки A_i^1 и A_i^2 соединим хордой *(Рис. 1 б).*

4) Зададим ориентацию каждой хорды по следующему правилу:

Пусть D_i – окрестность точки A_i, не содержащая других двойных точек кривой γ. Прообраз окрестности
D_i – два открытых интервала на окружности:
$f^{-1}(D_i) = \{u_i^1, u_i^2\}$, при этом $A_i^1 \in u_i^1, A_i^2 \in u_i^2$. Отметим касательные векторы τ_j (j = 1,2) в точке A_i к кривой : τ_j – касательный вектор к ветке $f\,(u_i^j)$. Если ориентация пары векторов (τ_1, τ_2) совпадает с ориентацией плоскости, то точке A_i^2 припишем знак (-1), точке A_i^1 – знак (+1), в противном случае, наоборот, точке A_i^2 припишем знак (+1), точке A_i^1 – знак (-1). Ориентируем хорду $[A_i^1\, A_i^2]$ от точки со знаком (-1) к точке со знаком (+1) *(Рис. 1 в).*

Гауссова диаграмма плоской кривой с n двойными точками – это ориентированная окружность с n ориентированными хордами (началу каждой ориентированной хорды приписан знак (-1), концу – (+1)).

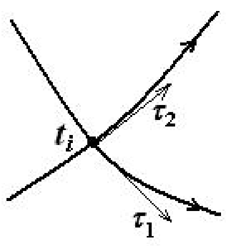
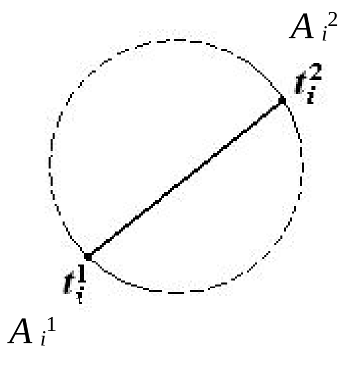
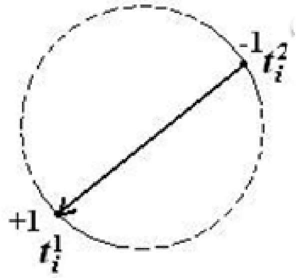
		
(*а*) двойная точка t_i	(*б*) хорда $[A_i^1\, A_i^2]$ на окружности соединяет прообразы точки t_i	(*в*) знаки точек A_i^1 и A_i^2 и ориентация хорды $[A_i^1\, A_i^2]$

Рисунок 1. Построение Гауссовой диаграммы.

Отмеченная Гауссова диаграмма кривой отличается от Гауссовой диаграммы кривой, тем, что на кривой и на диаграмме отмечена некоторая базовая точка. Хорды на окружности приобретают знак +1 или -1. Знак хорды определяется по следующему правилу. Если A_i^1 приписан знак (+1), то хорде на Гауссовой диаграмме
$[A_i^1\ A_i^2]$ также приписывается знак +1. Если же A_i^1 приписан знак (-1), то хорде также приписывается знак -1.

Пример. На *Рис. 2* изображена плоская кривая и ее Гауссова диаграмма и ее отмеченная Гауссова диаграмма.

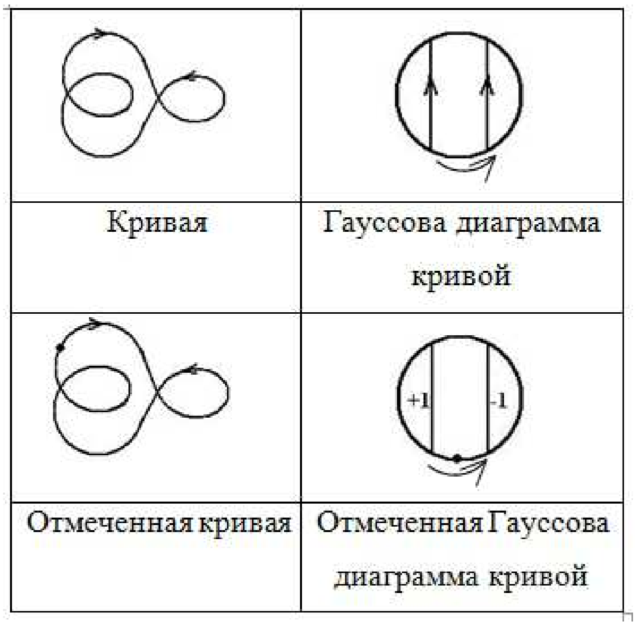


Рисунок 2. Кривая и её Гауссова диаграмма.

Кривые на *Рис. 3* имеют одинаковое количество двойных точек, но различные отмеченные Гауссовы диаграммы:

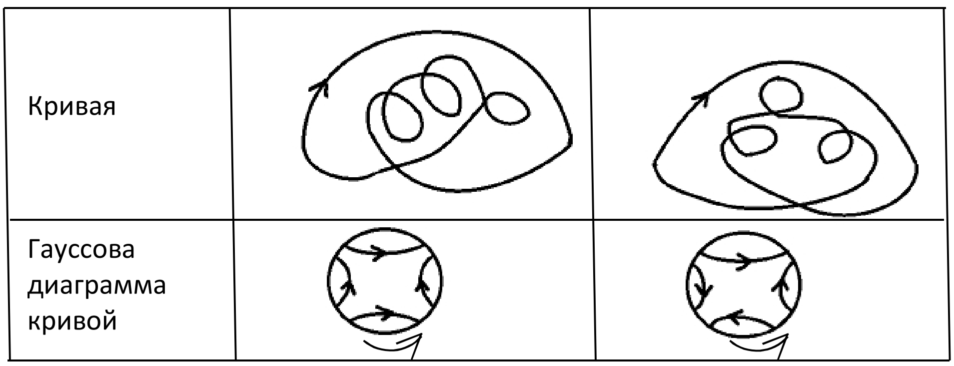
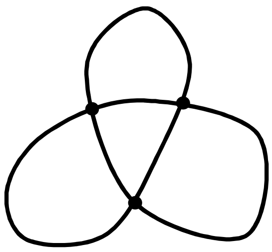


Рисунок 3. Кривые и их Гауссовы диаграммы.

Пусть γ- общая кривая на E^2. *(Рис. 4)*



Кривая γ

Рисунок 4. Кривая γ.

Кривая γ задает стратификацию плоскости: (см. *Рис.5*)

1) Нульмерные страты – двойные точки кривой γ *(Рис. 5 а).*
2) Одномерные страты – компоненты связности кривой γ без двойных точек *(Рис. 5 б).*
3) Двумерные страты - компоненты связности ($E^2 \setminus \gamma$), т.е. плоскость E^2 без кривой γ. *(Рис. 5 в).*

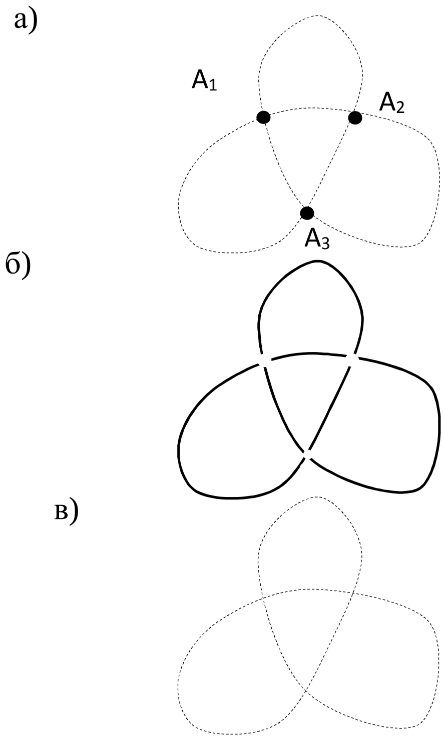


Рисунок. 5 Стратификация плоскости.

Рассмотрим алгоритм приписывания индексов стратов стратификации ориентированной общей кривой γ*(Рис. 6):*

1. Пронумеруем двумерные страты, обозначив внешний двумерный страт как σ_0.
2. Припишем страту σ_0 индекс равный нулю ($ind\ \sigma_0 = 0$).

3. Определим индексы остальных двумерных стратов по следующему правилу. Пусть точка $Y_i \in \sigma_I$, точка $Y_0 \in \sigma_0$, и пусть τ – ориентированный путь. Соединим эти точки трансверсально, пересекая кривую γ *и*

   не проходя через её двойные точки.
4. Точке пересечения пути τ и кривой γприпишем знак ± 1.

   Если ориентация пары касательных векторов кривой γ к τ совпадает с ориентацией плоскости то припишем +1, в противном случае припишем -1.
5. Определим *ind* σ_i как сумму знаков ±1 таких точек пересечения.

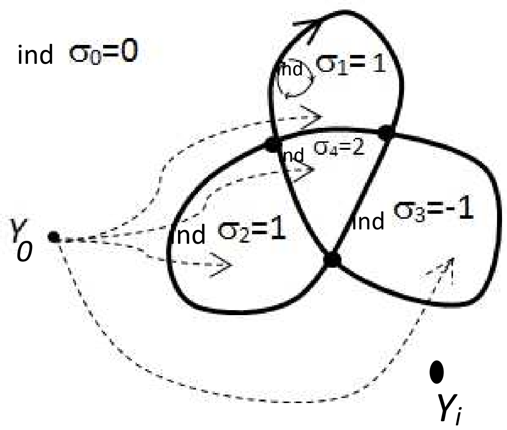


Рисунок 6. Алгоритм приписывания индексов стратов

Для того, чтобы вычислить индекс точки самопересечения кривой γ, нужно знать индексы всех двумерных стратов стратификации кривой.

Индекс двойной точки A_i *общей кривой* γ - это среднее арифметическое всех четырёх двумерных стратов в окрестности этой точки.

Также индекс двойной точки можно вычислить как среднее арифметическое двух несмежных двумерных стратов в окрестности этой точки.

Пусть A_i - двойная точка общей кривой γ, *ind* $A_i = s$, и пусть $[A_1\ A_2]$ – хорда на Гауссовой диаграмме кривой γ, соответствующая точке A_i. Тогда хорде $[A_1\ A_2]$ припишем индекс s.

Оснащённой Гауссовой диаграммой плоской кривой называется Гауссова диаграмма с отмеченными на её хордах индексами.

Теорема 1: Пусть G – оснащённая Гауссова диаграмма некоторой кривой на плоскости, тогда модуль индекса всякой хорды диаграммы G, не превышает самого количества хорд на G.

$$max\ |ind\ c| \leq n ,$$

где c – хорда G, n – количество хорд G.

Теорема 2 (о максимальных кривых):

Для всякого натурального числа n, существует кривая, на оснащённой Гауссовой диаграмме G которой:

1) $max\ |ind\ c| = n$, где где c – хорда G, n – количество хорд G.
2) $\forall\ \ 1 \le i \le n\ \exists$ хорда $c \in G$: $|ind\ c| = i$

(т.е. существуют индексы хорд на диаграмме G, которые по модулю растут постоянно на единицу, начиная с индекса равного по модулю единице).

Лемма 3: Для всякой кривой γ, существует двойная точка, индекс которой равен нулю или по модулю равен единице, т.е. обязательно на кривой имеются точки, индексы которых равны:

- либо 0,
- либо 1,
- либо -1.

Будем называть *отрезком* – непрерывный набор целых чисел, лежащий в определённых пределах.

Теорема 4: (о реализуемости отрезка индексов хорд длины m, кривой с m двойными точками)**:**

Если у кривой m двойных точек, то индексы на хордах оснащённой Гауссовой диаграммы принимают значения принадлежащие отрезку $[-m, m]$. Если из этого набора индексов выбрать произвольно отрезок длины m, то кривая с таким набором индексов будет реализуема.

Теорема 5: Пусть отрезок I длины k и $k < m$, тогда существует кривая с m двойными точками набор индексов которой совпадает с I, лежит в отрезке
$[-m, m]$, если среди индексов есть хотя бы один из индексов 0, -1, +1.

Пусть есть кривая γ с m двойными точками. Индексы двойных точек этой кривой образуют набор I из m чисел, в котором:

1) Минимальное число $x_{min} \ge -m$
2) Максимальное число $x_{max} \le m$
3) В I содержится 0, ± 1
4) В I содержатся все числа из набора $[x_{min}, x_{max}]$

Теорема 6: Пусть есть набор I из m чисел, удовлетворяющих пунктам 1-4, тогда существует кривая γ с m двойными точками и набором индексов I.

Лемма 7: Пусть Г – кривая, δ- одномерный страт кривой Г (дуга), A_1, A_2 – нульмерные страты кривой Г смежные с δ. Тогда либо:

1) $ind\ A_1 = ind\ A_2$
2) $ind\ A_1 = ind\ A_2 \pm 1$ *(Рис. 7)*

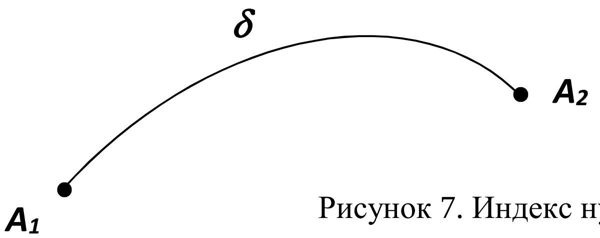
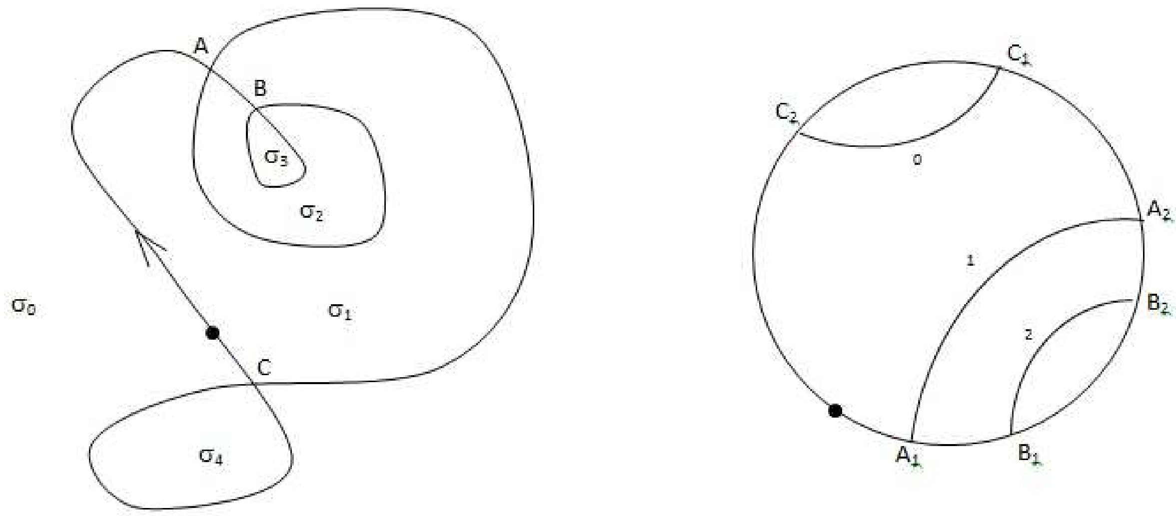


Рисунок 7. Индекс нульмерного страта.

Теорема 8: Пусть G – оснащённая Гауссова диаграмма некоторой кривой, если существуют хорды на диаграмме G с индексами $m-1$ и $m+1$,
то существует и хорда с индексом m, где $m \in Z$.

Пример:



Индексы областей	***Индексы точек***
$ind\ \sigma_0 = 0$	$ind\ A = \frac{ind\sigma_0 + ind\sigma_2}{2} = ind\sigma_1 = 1$
$ind\ \sigma_1 = 1$	$ind\ B = \frac{ind\sigma_1 + ind\sigma_3}{2} = ind\sigma_2 = 2$
$ind\ \sigma_2 = 2$	$ind\ C = \frac{ind\sigma_4 + ind\sigma_1}{2} = ind\sigma_0 = 0$
$ind\ \sigma_3 = 3$	
$ind\ \sigma_4 = -1$	

Рисунок 8. Пример вычисления индексов.

Список литературы:

1. Бурман Ю.М. «Длинные кривые, гауссовы диаграммы и инварианты» «Математическое просвещение» Третья серия, вып.3 – М.:МНЦМО, «Черо», 1999. – 240 с

2. – Степанова М.А. Гауссовы диаграммы и инварианты первой степени погружений двумерной сферы : автореферат дис. кандидата физико-математических наук : 01.01.04. СПб., 2007. - 16 с.

3. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. «Курс гомотопической топологии», учебное пособие для ВУЗов – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1989 – 528 с

4. Chmutov S., Duzhin S. Explicit formulas for Arnold`s generetic curve invariants. Arnold-Gelfand Mathematical Seminars: Geometry and Singularity Theory. Bikhauser, 1997 123-138 c.

5. Polyak M. Invariants of curves and fronts via Gauss diagrams. Topology Vol. 37, No. 5, pp. 989-1009, 1998 – 21c.