

АЛГОРИТМЫ ПРОГРАММНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О СВОБОДНОМ КОЛЕБАНИИ СТРУНЫ

Шумченко С. Л.

«Таганрогский институт имени А.П. Чехова»(филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ), Таганрог, Россия, rezolventa10@mail.ru

Представлены алгоритмы вычисления экстремумов разностных решений дифференциальных уравнений в частных производных. Вычисления построены по единой схеме на основе сортировки последовательности с взаимно однозначным соответствием входных и выходных индексов. В качестве примера рассматривается задача о свободном колебании струны. Для поиска экстремумов решений дифференциальных уравнений входными являются последовательности разностных значений каждой переменной. На основе оптимизационного алгоритма и компьютерных схем можно идентифицировать все локальные и глобальные экстремумы разностных решений уравнений в частных производных второго порядка на прямоугольной сетке произвольной размерности. Схема может быть перенесена на уравнения более высокого порядка. Метод существенно отличается от известных построением на основе сортировки, возможностью распараллеливания.

Ключевые слова: Численная оптимизация, дифференциальные уравнения в частных производных, экстремумы разностных решений.

THE SOFTWARE ALGORITHMS CALCULATE THE EXTREMA OF DIFFERENCE SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE EXAMPLE OF THE PROBLEM OF FREE OSCILLATION OF THE STRING

Shumchanko S.L.

Taganrog Institute named after A. P. Chekhov (branch) Rostov State University of Economics, Taganrog, Russia, rezolventa10@mail.ru

Presents algorithms for computing the extrema of difference solutions of differential equations in partial derivatives. Computation built on a single scheme based on the sorting sequence with one-to-one correspondence of input and output indexes. As an example, consider the problem of free oscillation strings. To search for the extrema of solutions of differential equations are the input series of differential values of each variable. On the basis of the optimization algorithm and computational schemes can be used to identify all local and global extrema of difference solutions of partial differential equations of second order on a rectangular grid of arbitrary dimension. The scheme can be carried forward to equations of higher order. The method differs from the known construction-based sorting, the possibility of parallelization.

Keywords: Numerical optimization, differential equations in partial derivatives, extrema of difference solutions

Для идентификации экстремумов разностных решений уравнений в частных производных применяется схема сортировки с взаимно однозначным соответствием входных и выходных индексов сортируемых элементов [2]. К программе сортировки подсоединяется условный оператор, локализирующий все минимумы среди элементов входной последовательности. Фиксируется любое $\varepsilon > 0$ меньше половины минимального

расстояния между минимумами. Условие локализации всех минимальных в ε -окрестности значений дискретизированной функции одной переменной на равномерной сетке с шагом h примет вид [2]: $|e[k-l] - e[k]| > \varepsilon / h$, $l=1, 2, \dots, k-1$. Здесь $e[k]$ – элемент массива входных индексов, располагаемого в порядке отсортированных по неубыванию значений функции, образующих одномерный массив. Условие означает, что в ε -окрестности узла с индексом $e[k]$ нет индекса входного элемента, который бы превосходил элемент с индексом $e[k]$. Максимумы локализуются аналогично [5]. Без принципиальных затруднений схема переносится на случай вычисления экстремумов функций двух и более переменных [2, 3]. Описанная схема переносится на случай идентификации всех экстремумов разностных решений уравнений в частных производных. Пусть, например, рассматривается задача о свободных колебаниях струны:

$$\partial^2 u / \partial t^2 = a^2 \partial^2 u / \partial x^2, \quad (1)$$

где краевые и начальные условия заданы соответственно в виде:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \quad u|_{t=0} = \phi(x). \quad (2)$$

Пусть задача определена в области $(0, l) \times (0, T)$, для которой строится равномерная прямоугольная сетка: $x_i = ih$, $h = l/n$, $i = 0, 1, \dots, n$; $t_j = j\tau$, $\tau = T/m$, $j = 0, 1, \dots, m$. Обозначив через u_i^j значения сеточной функции, приходим к разностной схеме $(u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1})/\tau^2 = a^2(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j)/h^2$. Пусть $\tilde{y} = a^2\tau^2/h^2$, тогда

$$u_i^{j+1} = -u_i^{j-1} + \tilde{y}u_{i-1}^j + (2 - 2\tilde{y})u_i^j + \tilde{y}u_{i+1}^j, \quad (3)$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$; $j = 1, 2, \dots, m-1$. Дополнив (3) значениями на нулевом слое $u_0^0 = 0$, $u_1^0 = \phi_1, \dots, u_{n-1}^0 = \phi_{n-1}$, $u_n^0 = 0$ и значениями $u_0^j = 0$, $u_n^j = 0$ на границе в соответствии с условиями (2), и аппроксимируя производную для подсчета u_i^1 на первом слое, получим явную формулу второго порядка точности для вычисления недостающих значений на первом слое: $u_i^1 = \tau\phi_i + (1 - \tilde{y})\phi_i + \tilde{y}(\phi_{i-1} + \phi_{i+1})/2$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Пусть каким-либо способом осуществлен процесс вычислений (3) при фиксированных n и m (или h и τ), т.е. получена таблица значений u_i^j – приближенный каркас решения $u(x_i, t_j)$. Известно [1], что условие $\tilde{y} \leq 1$ (или $\tau \leq \frac{h}{a}$) обеспечивает устойчивость схемы и сходимость решения $\|u_i^j - u(x_i, t_j)\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ в условиях (2). Как только сформирована таблица значений u_i^j , она интерпретируется как дискретная функция двух переменных x_i, t_j , которая стандартно

поступает на вход метода, и для нее без принципиальных затруднений идентифицируются все искомые нули и экстремумы.

Для нахождения минимумов полученной сеточной функции выполняется проход в направлении оси Ot вдоль i -го столбца прямоугольной сетки, во время которого находится минимальное по строкам значение $c[i] = \min_{\substack{i=\text{const} \\ 1 \leq j \leq m}} u_i^j$, этот минимум заносится на вход сортировки как i -й элемент сортируемого одномерного массива. К выходу процедуры подсоединяется оператор локализации минимума. Оператор идентифицирует каждый узел $e[k]*h$, в проекции $eps0$ - окрестности которого на OX нет узлов, доставляющих значения элементов, предшествующие $c[e[k]]$ в отсортированном массиве. Значение локализованной абсциссы точки минимума $xk := e[k]*h$ дает привязку к локализуемой точке двумерного минимума, оно фиксируется и аналогичным образом локализуется ордината tk , в которой идентифицируется минимум значения сеточной функции (3). Более детально схема описывается непосредственно [4,5].

В общем случае, предложенная схема идентифицирует все локальные и глобальные экстремумы разностных решений уравнений в частных производных второго порядка на прямоугольной сетке произвольной размерности. Схема может быть перенесена на уравнения более высокого порядка.

Список литературы

1. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т.2. – М.: Наука, 1977.– 400 с.
2. Заика И.В. Разработка и исследование схем оптимизации на основе алгоритмов сортировки с приложением к идентификации экстремумов решений дифференциальных уравнений,-Таганрог: ТРТУ, 2007, автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук. -19 с.
3. Ромм Я.Е., Заика И.В. Программная локализация экстремумов функций и разностных приближений решений дифференциальных уравнений/ Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2005. № М. С. 55.
4. Ромм Я.Е., Заика И.В., Лабинцева А.А. Безусловная численная оптимизация при вариации параметров. I / Депонированная рукопись № 193-B2008 04.03.2008
5. Romm Y.E., Zaika I.V. Numerical sorting-based optimization as applied to general differential and nonlinear equations//Cybernetics and Systems Analysis. 2011. Т. 47. № 2. С. 316-329.