Системно-структурная модель предполагаемого решения может быть представлена в виде следующей схемы, приведенной на рисунке.

Список литературы

1. Величковский Б.М. Когнитивная наука. Основы психологии познания, Академия, 2006.

2. Гаврилова Т.А., Хорошевский В.Ф. Базы знаний интеллектуальных систем. – СПб.: Питер, 2000.

3. Хренников А.Ю. Моделирование процессов мышления в p-адических системах координат. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

4. Fauconnier G. Mental Spaces. – Cambridge University Press, 1994.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ МНОГОПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ

Гирлин С.К., Гуцалюк Ю.С., Касовская И.П.

Институт экономики и управления, гуманитарно-педагогическая академия, филиал ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского», Ялта, e-mail: quc.yul@mail.ru

Постановка задачи. Воспользовавшись уже полученными результатами в только что созданной новой науке – математической теории развития, построить математическую модель функционирования СО, учитывающую подготовку специалистов требуемой квалификации и дефицитных для общества специальностей. В рамках этой модели поставить математическую оптимизационную задачу, решение которой обеспечит максимальный выпуск в течение заданного промежутка времени указанных специалистов.

Актуальность поставленной задачи. Задачи повышения качества образования были и остаются весьма актуальными задачамипросвещения.Предложенная в работе математическая модель СО позволяет описывать динамику получения качественного образования по различным специальностям, а также решать задачу перераспределения ресурсов для максимизации выпуска специалистов высокой квалификации и дефицитных для общества специальностей.

Анализ последних исследований и публикаций. С целью решения выше поставленной задачи применяется математическая теория развивающихся систем (РС), основы которой заложил академик В.М. Глушков при изучении макроэкономических задач [6-8]. В работах Иванова В.В. [8,12-14], Яценко Ю.П. [11] и Гирлина С.К. [1-5, 12]эта теория получила дальнейшее развитие и оформилась в новое научное направление – математическую теорию развития [12], в рамках которой Гирлиным С.К. в результате анализа ряда доказанных теорем были открыты три фундаментальных законов развития (любой системы и процессов) [12, с. 67-79].

В качестве РС можно рассматривать любую систему, если в ней можно выделить хотя бы одну подсистему самосовершенствования, главная функция которой – само существование и развитие системы. Любую СО: школу, вуз, СО Крыма, СО РФ и т.п., можно рассматривать как развивающуюся систему. В качестве подсистемы самосовершенствования СО можно выделить подсистему, главной функцией которой есть производство новых рабочих мест (РМ) сотрудников СО. Продукты деятельности СО, обеспечивающие выполнение этой функции (внутренней для системы) будем называть продуктами первого рода. Продукты, обеспечивающие выполнение системой основной (внешней для системы) функции, будем называть продуктами второго рода. В СО продуктами первого рода являются новые рабочие места сотрудников СО, производящие новые РМ сотрудников СО, а также выполняющие свою основную функцию – выпуск квалифицированных специалистов определенных специальностей (т.е. продуктами второго рода являются РМ выпускников СО). Под РМ понимается не какой-либо конкретный работник, а совокупность трудовых функций, выполняемых одним работником за единицу времени (рабочую смену, неделю, месяц и т.п.), причем выполнение этих трудовых функций должно быть обеспечено материально, энергетически и информационно. В работе приведена система уравнений и неравенств многопродуктовой модели СО и поставлена оптимизационная задача.

Следует отметить что описание многих процессов интегральными уравнениями вольтерровского типа имеет определенные преимущества при описании этих же процессов дифференциальными уравнениями. В 1959 г. и 1973 г. академик Л.В. Канторович при изучении однопродуктовой экономической модели пришел к необходимости введения функции в нижнем пределе интеграла вольтеровского вида [9,10]. Независимо от него в 1977 г. при математическом исследовании макроэкономической задачи академиком В.М. Глушковым был введен новый класс динамических моделей, представляющий собой описание управляемых динамических систем с помощью интегральных уравнений вольтеровского типа. Характерной особенностью уравнений Глушкова является наличие функций в нижних пределах интегралов. Основной фундаментальный результат этого исследования заключался в следующем: для максимизации выхода продуктов потребления на достаточно большем отрезке времени планирования доказана необходимость возрастания в начале временного отрезка планирования доли числа рабочих мест в подсистеме самосовершенствования (т.е. в в группе А – группе производства средств производства) и лишь на заключительном отрезке времени планирования необходимо максимальное возрастание доли рабочих мест в группе Б (т.е. в группе производства предметов потребления). Почти во всех публикациях исследовались задачи для развивающейся системы с заданной начальной предысторией, причем непосредственное воздействие на систему внешних для нее факторов не рассматривалось. На основе разделения ресурсов развивающейся системы на внутренние и внешние (поступающие в систему извне) В.В. Ивановым и С.К. Гирлиным были предложены [3], а позже и уточнены [1] уравнения развивающейся системы, которые в отличие от уравнений Глушкова используют функции более широкого класса (вместо непрерывных функций – кусочно непрерывные) и которые позволяют ставить и решать задачи, которые в рамках моделей Глушкова не могут быть поставлены (например, задачи моделирования возникающих РС, задачи оптимального распределения не только внутренних, но и внешних ресурсов РС, поступающих в РС из внешней среды).

Впервые модели Глушкова для описания функционирования СО предложил Иванов В.В. [13, с. 234-235]. В [2, 4] Гирлин С.К. предложил для этой же цели применить более широкий класс моделей. Настоящая работа представляет собой дальнейшее развитие [1, 2, 4].

Одна из главных особенностей интегральных моделей В.М. Глушкова заключается в том, что вся развивающаяся система, которую эти модели описывают, разбита на две подсистемы: одна из них выполняет внутреннюю функцию, заключающуюся в совершенствовании самой системы, а вторая осуществляет внешнюю (основную) функцию системы. Согласно этому все обобщенные продукты (элементы) системы подразделяются на продукты первого и второго рода: материальное, энергетическое и информационное обеспечение внутренней и внешней функций называются продуктами соответственно первого и второго рода. В качестве примеров продуктов первого и второго рода можно привести соответственно рабочие места и продукты потребления в макроэкономической системе. Если же внутренних и внешних функций в системе несколько, то имеет смысл рассматривать многопродуктовые РС.

Цель статьи состоит в решении поставленной выше задачи.

Изложение основного материала. Перейдем теперь математическому описанию функционирования многопродуктовой модели СО, как РС. Под оптимальностью развития двухпродуктовой РС здесь понимается такое функционирование СО на заданном временном отрезке планирования, при котором осуществляется максимизация выхода продуктов второго рода – специалистов (выпускников) обеспечивающих основную функцию СО, посредством наилучшего распределения ресурсов СО между подсистемами А (подсистемой самосовершенствования системы) и Б (подсистемой выполнения основной функции системы). Решение рассматриваемой оптимизационной задачи может интерпретироваться как максимальное количество выпускников нужных обществу специальностей на заданном временном промежутке. Придерживаясь идей работ Гирлина С.К., будем предполагать, что в СО продукты первого и второго родов появляюится, как в результате их создания внутри СО, так и в результате их поступления в готовом виде извне (например, из другой СО).

Пусть СО готовит специалистов по n специальностямПоставим в соответствие каждой специальности номер i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, и пусть $J_0 = \{i_1, i_2, ..., i_m\} \subseteq I$, где i_k – номер специальности, которая в текущий момент наиболее востребована обществом (например, как известно, сейчас наиболее дефицитными специальностями являются технические), $i_k \in \{1, 2, ..., n\}$. В дальнейшем специальность и ее номер будем отождествлять. Пусть $f(t)$ – скорость поступления из внешней среды в момент времени τ в подсистему Ановых РМ, как сотрудников СО (не только преподавателей, но и всех, кто принимает участие в подготовке студентов: сотрудников администрации, бухгалтерии и т.п.), так и выпускников других СО; $x_0(t)f(t)$ – скорость поступления из внешней среды в подсистему А СО в момент времени τ новых РМ, которые в дальнейшем создаютизменение технологии производства продуктов первого рода $\alpha(t,\tau)$; $x_1(t)f(t)$ – скорость поступления из внешней среды в подсистему А СО в момент времени τ новых РМ, которые в дальнейшем создают новые РМ сотрудников СО, $0 \le x_0(t) \le 1$; $x_i(t)f(t)$ – скорость поступления из внешней среды в момент времени τ в подсистему Б СО новых РМ специальности i, $0 \le x_i \le 1$, $i = 2,3,...,n$; $m(t)$ и $c_i(t)$ – скорости появления в момент t количества новых РМ сотрудников СО и новых рабочих мест выпускников СО специальности i; $a(t)$ – максимальный момент времени, ранее которого появившиеся РМ сотрудников СО не участвуют в момент времени t в производстве как в подсистеме А, так и в подсистеме Б, а появившиеся позже участвуют стопроцентно (при этом, возможно, с нулевой эффективностью), $0 \le a(t) \le t$, $a(t_0) = 0$, t_0 – момент начала моделирования (т.е. $a(t)$ – временная граница ликвидации устаревших технологий производства РМ как сотрудников СО, так и РМ выпускников всех специальностей); согласно [13, с. 235] положим $\alpha(t,\tau) = \alpha_1(\tau)\exp(-d_1(t-\tau))$, $\alpha(t,\tau)$ – показатель эффективности производства (удельная производительность) как новой технологии производства в подсистеме А, так и производства новых РМ в этой подсистеме А, $d_1 = \text{const} > 0$, функция $\alpha(t,\tau)$ (а, значит, и функция $\alpha_1(\tau)$) должна возрастать по переменной $\tau, 0 \le \tau \le t$, (это отражает нашу веру в научно-технический прогресс: с течением времени появляются более эффективные технологии производства) и убывать по переменной t (это предположение отражаетнашу убежденность, что с течением времени любая ранее созданная технология устаревает, становится неэффективной); $\alpha(t,\tau)$ – количество единиц $\alpha'(t)$ и количество новых РМ в подсистеме А, произведенных в единицу времени, начиная с момента t, приходящихся на одну единицу РМ, появившихся в СО в единицу времени, начиная с момента τ, $0 \le \tau \le t$; аналогично [13, с. 235] $\beta_j(t,\tau) = \beta_{j1}(t)\exp(-d_2(t-\tau))$, $d_2 = \text{const} > 0$, интерпретация функции $\beta_j(t,\tau)$ аналогична интерпретации функции $\alpha(t,\tau)$: $\beta_j(t,\tau)$ – показатель удельной производительности в подсистеме Б: количество новых РМ выпускников высокой квалификации по специальности j в единицу времени, начиная с момента t, приходящихся на одну единицу РМ сотрудников, появившихся в единицу времени, начиная с момента τ (уровень требуемой квалификации определяется, например, в результате экзаменов или тестирования); $m(t)$ – скорость появления в момент времени t в подсистеме А РМ сотрудников СО (в результате как создания внутри подсистемы А, так и поступления в подсистему А извне); $y_0(\tau)m(\tau)$ – доля РМ сотрудников СО, появившихся в единицу времени, начиная с момента τ участвующих в момент времени t в изменении технологии а, $0 \le y_0 \le 1$, $\tau \le t$; $y_1(\tau)m(\tau)$ – доля РМ сотрудников СО, появившихся в единицу времени, начиная с момента τ, участвующих в момент времени t в производстве новых РМ сотрудников в подсистеме А, $0 \le y_1 \le 1$, $\tau \le t$; $y_i(\tau)m(\tau)$ – доля РМ сотрудников СО, появившихся в единицу времени, начиная с момента τ, участвующих в момент времени t в производстве новых РМ специалистов (выпускников) требуемой квалификации, $0 \le y_i \le 1$, $\tau \le t$; $P_{A0}(t)$, $P_{A1}(t)$ и $P_{Бi}(t)$ – количество функционирующих в момент t соответственно РМ сотрудников СО (как в подсистеме А, так и в подсистеме Б), так и РМ выпускников по специальности i; будем предполагать, что на отрезке времени $[0 = a(t_0), t_0]$ задана начальная предыстория: все функции, область определения которых $[0, t_0]$, будем считать известными и обозначать теми же буквами с индексом 0: $m(\tau) \equiv m_0(\tau)$, $\tau \in [0, t_0]$.

Согласно введенным определениям можно доказать аналогично [2], что справедливы соотношения:

$$\alpha_1'(t) = \int_{a(t)}^{t} \alpha_1(\tau)\exp(-d_1(t-\tau))y_{A0}(\tau)m(\tau)d\tau + x_{A0}(t)f(t),$$

$$\alpha_1(t) = \alpha(t,t),$$

$$m(t) = \int_{a(t)}^{t} \alpha_1(\tau)\exp(-d_1(t-\tau))y_{A1}(\tau)m(\tau)d\tau + x_{A1}(t)f(t),$$

$$\beta_i(t) = \int_{a(t)}^{t} \alpha_1(\tau)\exp(-d_1(t-\tau))u_i(\tau)m(\tau)d\tau + x_i(t)f(t),$$

$$\beta_i(t) = \beta_i(t,t),$$

$$c_i(t) = \int_{a(t)}^{t} \beta_i(\tau)\exp(-d_2(t-\tau))y_i(\tau)m(\tau)d\tau + x_{ci}(t)f(t),$$

$$P_{A0}(t) = \int_{a(t)}^{t} y_{A0}(\tau)m(\tau)d\tau,$$

$$P_{A1}(t) = \int_{a(t)}^{t} y_{A1}(\tau)m(\tau)d\tau,$$

$$P_{Бi}(t)=\int_{a(t)}^{t} y_i(\tau)m(\tau)d\tau,$$

$$0 \le x_{A0}, y_{A0}, x_{A1}, y_{A1}, u_i, x_i, x_{ci}, y_i \le 1,$$

$$x_{A0}+x_{A1}+\sum_{i=1}^{n} x_i+\sum_{i=1}^{n} x_{ci}=1,$$

$$y_{A0}+y_{A1}+\sum_{i=1}^{n} u_i+\sum_{i=1}^{n} y_i=1,$$

$$0 \le a(t) \le \tau \le t,\ 0=a(t_0),\ t\in[t_0,T],$$

$$0<t_0<T<+\infty. \qquad (*)$$

Теорема. Если заданы

1) непрерывные на отрезке $[t_0,T]$ функции $f(t)$, $P_{A0}(t)$, $P_{A1}(t)$, $P_{Бi}(t)$, положительное число d_1,

2) кусочно непрерывные на отрезке $[t_0,T]$ функции $x_{A0}(t)$, $x_{A1}(t)$, $x_i(t)$, $x_{ci}(t)$, $i=1,2,...,n$,

3) кусочно непрерывные на отрезке $[0,t]$ функции $y_{A0}(\tau)$, $y_{A1}(\tau)$, $u_i(\tau)$, $y_i(\tau)$, $i=1,2,...,n$, дифференцируемая функция $\alpha(\tau)\equiv\alpha_0(\tau)$, $\tau\in[0,t_0]$, кусочно непрерывная и ограниченная на отрезке $[0, t_0]$ функция $m(\tau)\equiv m_0(\tau)$, то система уравнений и неравенств (*) имеет единственное на $[t_0,T]$ решение $\alpha(t)$, $m(t)$, $a(t)$, $\beta_i(t)$, $c_i(t)$, $i=1,2,...,n$, причем на $[t_0,T]$ функции $m(t)$, $\beta_i(t)$ и $c_i(t)$, $i=1,2,...,n$, кусочно непрерывны, функция $a(t)$ непрерывна, а функция $\alpha(t)$ дифференцируема. Решение это может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство теоремы проводится совершенно аналогично [5, с. 72-77, 101–106] (уравнения решенной системы являются нелинейными, так как одна из искомых функций, $a(t)$ находится в нижних пределах интегралов).

Очевидно, что если задано положительное число d_2, то можно найти и $\beta_i(t,\tau)$, $(t,\tau)\in[t_0,T]\times[0,T]$, $i=1,2,...,n$.

Поставим теперь следующую оптимизационную задачу наилучшего распределения внешних ресурсов.

Пусть выполнены условия теоремы 1), 3). Требуется найти такие кусочно непрерывные на $[t_0,T]$ функции $Z^*=\{x^*_{A0}(t),\ x^*_{A1}(t),\ x^*_i(t),\ x^*_{ci}(t),\ i=1,2,...,n\}$, а также зависящие от них функции $\alpha^*(t)$, $\beta^*_i(t)$, $m^*(t)$, $a^*(t)$, $c^*_i(t)$, $i=1,2,...,n$, $t\in[t_0,T]$, которые с учетом соотношений (*) и ограничений $n^-_i(t)\le c_i(t)\le n^+_i(t)$ максимизируют функционал

$$\Phi(Z)=\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{T} c_{i_k}(t):$$

$$\Phi(Z^*)=\max_Z \Phi(Z)=\max_Z \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{T} c_{i_k}(t),$$

где функции $n^-_i(t)$ и $n^+_i(t)$, определяемые каксоответственно минимальные и максимальные скорости выпуска специалистов i-й специальности, известныили должны быть известны из плана Министерства образования, $i=1,2,...,n$, $Z=\{x_{A0},x_{A1},\{x_i\}_{i=1}^n,\{x_{ci}\}_{i=1}^n\}$, $i_k\in J_0$.

Выводы. Предложенная в [2] модель СО в настоящей работе существенно уточнена и дополнена. Поставлена оптимизационная задача максимизации выпуска специалистов требуемых обществу специальностейпри помощи наилучшего распределения внешних ресурсов, поступающих в СО.

Дальнейшие исследования должны проводиться педагогами – методистами (для получения функций α, β_i, $n^-_i(t)$ и $n^+_i(t)$, $i=1,2,...,n$), математиками – специалистами в области разностных уравнений и численных методов, программистами (для компьютерного моделирования динамики СО, так как сложность задачи не позволяет решать ее в общем случае аналитически).

Список литературы

1. Антонюк Ю.Ю., Гирлин С.К. Интегральная модель системы образования и колебательные решения ее уравнений // Международный студенческий вестник. – 2015. – № 3. ч.4. – С. 429-431.
2. Гирлин С.К. Моделирование возникающих развивающихся систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 10. – С. 65-67.
3. Гирлин С.К. О построении математической теории обучения в системе образования // Проблеми сучасної педагогічної освіти. Сер.: Педагогіка і психологія. – Зб. статей: Вип..8.Ч.2 – Ялта: РВВ КГУ, 2005. – С.220-228.
4. Гирлин С.К., Иванов В.В. Моделирование взаимодействия развивающихся систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 1. – С. 58-60.
5. Гирлин С.К., Михайлова М.Е. Основная идея и результаты моделирования задачи управления качеством учебного процесса // Професіоналізм педагога в контексті європейського вибору України: Матеріали міжнародної науково-практичної конференції (Ялта, 18-22 вересня 2008 р.). – Ч.III. – Ялта: РВВ КГУ, 2009. – С. 42-45.
6. 6. Гирлин С.К. Лекции по интегральным уравнениям: Учебное пособие для студентов математических специальностей / Гирлин С.К. – 2-е изд. –Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2014. – 178 с.
7. Глушков В.М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. – 1977. – №2. – С. 3-6.
8. Глушков В.М., Иванов В.В. Моделирование оптимизации распределения рабочих мест между отраслями производства А и Б // Кибернетика. – 1977. – №6.– С. 117-131.
9. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука, 1983.– 352 с.
10. Канторович Л.В., Горьков Л.И. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели // Докл. АН СССР. – 1959. – 129, № 4. – С. 732-736.
11. Канторович Л.В., Жиянов В.И. Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса // Там же. – 1973. – 211, №6. – С. 1280-1283.
12. Яценко Ю.П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. – К.: Наук.думка, 1991. – 220 с.
13. Girlin S.K., Ivanov V.V. Mathematical Theory of Development. A Course od Lectures: Учебноепособиедлястудентовматематическихспециальностей / S.K. Girlin, V.V. Ivanov. – Simferopol: PP “ARIAL”, 2014. – 140 p.
14. Ivanov V.V. Model Development and Optimization.– Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 249 p.
15. Ivanov V.V., Ivanova N.V. Mathematical Models of the Cell and Cell Associated Objects. – Amsterdam: Elsevier, 2006.– 333 p.

МЕТОД ЛАГРАНЖА РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Макаркин В.М., Апайчева Л.А.

Нижнекамский химико-технологический институт, Нижнекамск, e-mail: mak.nk16rus@gmail.com

Развитие областей науки и техники существенно зависят от развития различных направлений математики. В настоящее время математика становится средством решения проблем организации производства, помогает в поиске оптимальных решений, что содействует повышению производительности труда.

Многие прикладные задачи сводятся к исследованию функции на экстремум. В частности, в экономической теории задача математического программирования часто сводится к задаче на условный экстремум. Одним из наиболее удобных способов поиска экстремума функции при наличии ограничений на ее переменные, т.е. решения задачи условной оптимизации, является метод множителей Лагранжа. Основное практическое значение метода Лагранжа заключается в том, что он позволяет перейти от условной оптимизации к безусловной.

Ниже рассматривается задача о нахождении условного экстремума функции нескольких переменных.