$$P_{Бi}(t) = \int_{a(t)}^{t} y_i(\tau)m(\tau)d\tau,$$

$$0 \le x_{A0}, y_{A0}, x_{A1}, y_{A1}, u_i, x_i, x_{ci}, y_i \le 1,$$

$$x_{A0} + x_{A1} + \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_{ci} = 1,$$

$$y_{A0} + y_{A1} + \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = 1,$$

$$0 \le a(t) \le \tau \le t,\ 0 = a(t_0),\ t \in [t_0, T],$$

$$0 < t_0 < T < +\infty. \qquad (*)$$

Теорема. Если заданы

1) непрерывные на отрезке $[t_0, T]$ функции $f(t)$, $P_{A0}(t)$, $P_{A1}(t)$, $P_{Бi}(t)$, положительное число d_1,

2) кусочно непрерывные на отрезке $[t_0, T]$ функции $x_{A0}(t)$, $x_{A1}(t)$, $x_i(t)$, $x_{ci}(t)$, $i = 1, 2, ..., n$,

3) кусочно непрерывные на отрезке $[0,t]$ функции $y_{A0}(\tau)$, $y_{A1}(\tau)$, $u_i(\tau)$, $y_i(\tau)$, $i = 1, 2, ..., n$, дифференцируемая функция $\alpha(\tau) \equiv \alpha_0(\tau)$, $\tau \in [0, t_0]$, кусочно непрерывная и ограниченная на отрезке $[0, t_0]$ функция $m(\tau) \equiv m_0(\tau)$, то система уравнений и неравенств (*) имеет единственное на $[t_0,T]$ решение $\alpha(t)$, $m(t)$, $a(t)$, $\beta_i(t)$, $c_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, причем на $[t_0,T]$ функции $m(t)$, $\beta_i(t)$ и $c_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, кусочно непрерывны, функция $a(t)$ непрерывна, а функция $\alpha(t)$ дифференцируема. Решение это может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство теоремы проводится совершенно аналогично [5, с. 72-77, 101–106] (уравнения решенной системы являются нелинейными, так как одна из искомых функций, $a(t)$ находится в нижних пределах интегралов).

Очевидно, что если задано положительное число d_2, то можно найти и $\beta_i(t,\tau)$, $(t,\tau) \in [t_0, T] \times [0, T]$, $i = 1, 2, ..., n$.

Поставим теперь следующую оптимизационную задачу наилучшего распределения внешних ресурсов.

Пусть выполнены условия теоремы 1), 3). Требуется найти такие кусочно непрерывные на $[t_0,T]$ функции $Z^* = \{x^*_{A0}(t),\ x^*_{A1}(t),\ x^*_i(t),\ x^*_{ci}(t),\ i = 1, 2, ..., n\}$, а также зависящие от них функции $\alpha^*(t)$, $\beta^*_i(t)$, $m^*(t)$, $a^*(t)$, $c^*_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, $t \in [t_0, T]$, которые с учетом соотношений (*) и ограничений $n^-_i(t) \le c_i(t) \le n^+_i(t)$ максимизируют функционал

$$\Phi(Z) = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{T} c_{i_k}(t):$$

$$\Phi(Z^*) = \max_Z \Phi(Z) = \max_Z \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{T} c_{i_k}(t),$$

где функции $n^-_i(t)$ и $n^+_i(t)$, определяемые каксоответственно минимальные и максимальные скорости выпуска специалистов i-й специальности, известныили должны быть известны из плана Министерства образования, $i = 1, 2, ..., n$, $Z = \{x_{A0}, x_{A1}, \{x_i\}_{i=1}^{n}, \{x_{ci}\}_{i=1}^{n}\}$, $i_k \in J_0$.

Выводы. Предложенная в [2] модель СО в настоящей работе существенно уточнена и дополнена. Поставлена оптимизационная задача максимизации выпуска специалистов требуемых обществу специальностейпри помощи наилучшего распределения внешних ресурсов, поступающих в СО.

Дальнейшие исследования должны проводиться педагогами – методистами (для получения функций α, β_i, $n^-_i(t)$ и $n^+_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$), математиками – специалистами в области разностных уравнений и численных методов, программистами (для компьютерного моделирования динамики СО, так как сложность задачи не позволяет решать ее в общем случае аналитически).

Список литературы

1. Антонюк Ю.Ю., Гирлин С.К. Интегральная модель системы образования и колебательные решения ее уравнений // Международный студенческий вестник. – 2015. – № 3. ч.4. – С. 429-431.
2. Гирлин С.К. Моделирование возникающих развивающихся систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 10. – С. 65-67.
3. Гирлин С.К. О построении математической теории обучения в системе образования // Проблеми сучасної педагогічної освіти. Сер.: Педагогіка і психологія. – Зб. статей: Вип..8.Ч.2 – Ялта: РВВ КГУ, 2005. – С.220-228.
4. Гирлин С.К., Иванов В.В. Моделирование взаимодействия развивающихся систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 1. – С. 58-60.
5. Гирлин С.К., Михайлова М.Е. Основная идея и результаты моделирования задачи управления качеством учебного процесса // Професіоналізм педагога в контексті європейського вибору України: Матеріали міжнародної науково-практичної конференції (Ялта, 18-22 вересня 2008 р.). – Ч.III. – Ялта: РВВ КГУ, 2009. – С. 42-45.
6. 6. Гирлин С.К. Лекции по интегральным уравнениям: Учебное пособие для студентов математических специальностей / Гирлин С.К. – 2-е изд. –Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2014. – 178 с.
7. Глушков В.М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. – 1977. – №2. – С. 3-6.
8. Глушков В.М., Иванов В.В. Моделирование оптимизации распределения рабочих мест между отраслями производства А и Б // Кибернетика. – 1977. – №6.– С. 117-131.
9. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука, 1983.– 352 с.
10. Канторович Л.В., Горьков Л.И. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели // Докл. АН СССР. – 1959. – 129, № 4. – С. 732-736.
11. Канторович Л.В., Жиянов В.И. Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса // Там же. – 1973. – 211, №6. – С. 1280-1283.
12. Яценко Ю.П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. – К.: Наук.думка, 1991. – 220 с.
13. Girlin S.K., Ivanov V.V. Mathematical Theory of Development. A Course od Lectures: Учебноепособиедлястудентовматематических-специальностей / S.K. Girlin, V.V. Ivanov. – Simferopol: PP "ARIAL", 2014. – 140 p.
14. Ivanov V.V. Model Development and Optimization.– Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 249 p.
15. Ivanov V.V., Ivanova N.V. Mathematical Models of the Cell and Cell Associated Objects. – Amsterdam: Elsevier, 2006.– 333 p.

МЕТОД ЛАГРАНЖА РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Макаркин В.М., Апайчева Л.А.

Нижнекамский химико-технологический институт, Нижнекамск, e-mail: mak.nk16rus@gmail.com

Развитие областей науки и техники существенно зависят от развития различных направлений математики. В настоящее время математика становится средством решения проблем организации производства, помогает в поиске оптимальных решений, что содействует повышению производительности труда.

Многие прикладные задачи сводятся к исследованию функции на экстремум. В частности, в экономической теории задача математического программирования часто сводится к задаче на условный экстремум. Одним из наиболее удобных способов поиска экстремума функции при наличии ограничений на ее переменные, т.е. решения задачи условной оптимизации, является метод множителей Лагранжа. Основное практическое значение метода Лагранжа заключается в том, что он позволяет перейти от условной оптимизации к безусловной.

Ниже рассматривается задача о нахождении условного экстремума функции нескольких переменных.

Задача. Найти наименьшее значение выражения $(x-y)^2+(z-u)^2$ при условии связи

$$(x-1)^2+(y-u)^2+(z-3)^2+(u-2)^2=1.$$

Решение будем искать методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа в этом случае принимает вид:

$$F(x,y,z,u,\lambda)=(x-y)^2+(z-u)^2+$$
$$+\lambda((x-1)^2+(y-u)^2+(z-3)^2+(u-2)^2-1).$$

Для нахождения стационарных точек составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} F'_x = 2(x-y)+2\lambda(x-1)=0, \\ F'_y=-2(x-y)+2\lambda(y-u)=0, \\ F'_z=2(z-u)+2\lambda(z-3)=0, \\ F'_u=-2(z-u)+2\lambda(u-2)=0, \\ F'_\lambda=(x-1)^2+(y-u)^2+(z-3)^2+(u-2)^2-1. \end{cases} \quad (1)$$

Складывая первое уравнение системы (1) со вторым, а третье уравнение – с четвертым, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ z+u=5, \\ 2(x-y)+\lambda(x-y+3)=0, \\ 2(z-u)+\lambda(z-u-1)=0, \\ (x-1)^2+(y-u)^2+(z-3)^2+(u-2)^2=1. \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} y=5-x, \\ u=5-z, \\ (x-1)^2+(z-3)=\frac{1}{2}, \\ (2x-5)+\lambda(x-1)=0, \\ (2z-5)+\lambda(z-3)=0. \end{cases} \quad (3)$$

Из системы (3), выражая l:

$$\lambda=\frac{5-2x}{x-1},\ \lambda=\frac{5-2z}{z-3},$$

получаем соотношение

$$(5-2x)(z-3)=(5-2z)(x-1).$$

Отсюда имеем

$$x=10-3z. \quad (4)$$

Подставляя соотношение (4) в третье уравнение системы (3), находим:

$$z_1=3+\frac{1}{2\sqrt{5}},\ z_2=3-\frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Далее из системы (3) получаем два решения системы (1):

$$M_1\left(x_1=1-\frac{3}{2\sqrt{5}};y_1=4+\frac{3}{2\sqrt{5}};u_1=2-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right);$$

$$\lambda_1=-2\left(\sqrt{5}+1\right);$$

$$M_2\left(x_2=1+\frac{3}{2\sqrt{5}};y_2=4-\frac{3}{2\sqrt{5}};u_2=2+\frac{1}{2\sqrt{5}}\right);$$

$$\lambda_2=2\left(\sqrt{5}+1\right).$$

Поскольку $F''_{xx}=2+2\lambda$, то при $\lambda=-2(\sqrt{5}+1)$ имеем $F''_{xx}<0$, и M_1 является точкой условного максимума, при $\lambda=2\left(\sqrt{5}+1\right)$ получаем $F''_{xx}>0$, и M_2 – точка условного минимума. Итак, минимальное значение выражения $(x-y)^2+(z-u)^2=12-4\sqrt{5}$.

Список литературы

1. Бутузов В.Ф., Крутицкий Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах: Уч. пособие / Под ред. В.Ф. Бутузова, 6-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2008. – С. 261 – 264.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ГРАДИЕНТА НА ПЕРЕХОД ВОДЫ СО ЛЬДА В ДИСПЕРСНУЮ СРЕДУ

Рябова Н.В., Копосов Г.Д.

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск, e-mail: nataliya.strannaya@gmail.com

Дисперсные системы часто встречаются в нашей жизни, поэтому в последние годы все больше проявляют особый интерес к изучению физике дисперсных систем. В более ранних исследованиях проведенных в лабораториях в физике дисперсных систем обнаружен эффект влагопереход с поверхности льда. В работах [1,2,3] представлены результаты по исследованию влагоперехода на границе льда с различными материалами. Обнаружено две фазы влагоперехода описываемые разными математическими моделями.

Задача исследования состояла в изучении влияния температурного градиента в грунте на переход воды со льда в дисперсную среду. Для данного эксперимента был выбран в качестве дисперсной среды – песок.

Методика проведения

В чашки насыпался очищенный и охлажденный до –15°С песок. Далее сверху помещали льдинки толщиной примерно 1 см. Затем 4 из 5 сосудов ставили на нагревательные элементы разной мощности, которые находились в холодильнике. Термопары располагали на границе лед – дисперсная среда, а вторая под чашкой. Последующие дни измеряли массу песка, термоэдс и напряжение на нагревателях 2 раза в сутки с интервалом ≈ 6 часов при постоянной силе тока.

Экспериментальные результаты

На рис. 1 представлены временные зависимости массы воды, перешедшей с поверхности льда в песок при различных мощностях подогрева (P_1= 0,12 Вт; P_2=0,17 Вт; P_3=0,24 Вт; P_4=0,40 Вт; P_5=0 Вт). На рис. 2 изображена зависимость разности температур от мощности подогрева. Рис. 1 демонстрирует, что нижний подогрев в целом увеличивает скорость влагоперехода. Но при этом увеличение мощности подогрева уменьшает влагопереход. При этом, как свидетельствует рис. 2, не наблюдается монотонность в зависимости от мощности подогрева. Это свидетельствует о многофакторности исследуемой проблемы.

Обсуждение результатов

Сначала поступим формально и определим зависимость коэффициента теплопроводности на основании формулы:

$$P=\lambda S\frac{\Delta T}{h}=\lambda S\frac{U}{\alpha h}, \quad (1)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, S – площадь сечения песка, U – термоэдс термопары, измеряющей разность температур, h – толщина слоя песка и α – коэффициент термоЭДС.