

Задача. Найти наименьшее значение выражения $(x-y)^2 + (z-u)^2$ при условии связи

$$(x-1)^2 + (y-u)^2 + (z-3)^2 + (u-2)^2 = 1.$$

Решение будем искать методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа в этом случае принимает вид:

$$F(x, y, z, u, \lambda) = (x-y)^2 + (z-u)^2 + \lambda((x-1)^2 + (y-u)^2 + (z-3)^2 + (u-2)^2 - 1).$$

Для нахождения стационарных точек составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} F'_x = 2(x-y) + 2\lambda(x-1) = 0, \\ F'_y = -2(x-y) + 2\lambda(y-u) = 0, \\ F'_z = 2(z-u) + 2\lambda(z-3) = 0, \\ F'_u = -2(z-u) + 2\lambda(u-2) = 0, \\ F'_\lambda = (x-1)^2 + (y-u)^2 + (z-3)^2 + (u-2)^2 - 1. \end{cases} \quad (1)$$

Складывая первое уравнение системы (1) со вторым, а третье уравнение – с четвертым, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ z+u=5, \\ 2(x-y) + \lambda(x-y+3) = 0, \\ 2(z-u) + \lambda(z-u-1) = 0, \\ (x-1)^2 + (y-u)^2 + (z-3)^2 + (u-2)^2 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} y = 5 - x, \\ u = 5 - z, \\ (x-1)^2 + (z-3) = \frac{1}{2}, \\ (2x-5) + \lambda(x-1) = 0, \\ (2z-5) + \lambda(z-3) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Из системы (3), выражая λ :

$$\lambda = \frac{5-2x}{x-1}, \quad \lambda = \frac{5-2z}{z-3},$$

получаем соотношение

$$(5-2x)(z-3) = (5-2z)(x-1).$$

Отсюда имеем

$$x = 10 - 3z. \quad (4)$$

Подставляя соотношение (4) в третье уравнение системы (3), находим:

$$z_1 = 3 + \frac{1}{2\sqrt{5}}, \quad z_2 = 3 - \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Далее из системы (3) получаем два решения системы (1):

$$M_1 \left(x_1 = 1 - \frac{3}{2\sqrt{5}}; y_1 = 4 + \frac{3}{2\sqrt{5}}; u_1 = 2 - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right);$$

$$\lambda_1 = -2(\sqrt{5}+1);$$

$$M_2 \left(x_2 = 1 + \frac{3}{2\sqrt{5}}; y_2 = 4 - \frac{3}{2\sqrt{5}}; u_2 = 2 + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right);$$

$$\lambda_2 = 2(\sqrt{5}+1).$$

Поскольку $F''_{xx} = 2 + 2\lambda$, то при $\lambda = -2(\sqrt{5}+1)$ имеем $F''_{xx} < 0$, и M_1 является точкой условного максимума, при $\lambda = 2(\sqrt{5}+1)$ получаем $F''_{xx} > 0$, и M_2 – точка условного минимума. Итак, минимальное значение выражения $(x-y)^2 + (z-u)^2 = 12 - 4\sqrt{5}$.

Список литературы

1. Бутузов В.Ф., Крутицкий Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах: Уч. пособие / Под ред. В.Ф. Бутузова, 6-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2008. – С. 261 – 264.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ГРАДИЕНТА НА ПЕРЕХОД ВОДЫ СО ЛЬДА В ДИСПЕРСНУЮ СРЕДУ

Рябова Н.В., Копосов Г.Д.

Северный (Арктический) федеральный университет
им. М.В. Ломоносова, Архангельск,
e-mail: nataliya.strannaya@gmail.com

Дисперсные системы часто встречаются в нашей жизни, поэтому в последние годы все больше проявляют особый интерес к изучению физике дисперсных систем. В более ранних исследованиях проведенных в лабораториях в физике дисперсных систем обнаружен эффект влагопереход с поверхности льда. В работах [1,2,3] представлены результаты по исследованию влагоперехода на границе льда с различными материалами. Обнаружено две фазы влагоперехода описываемые разными математическими моделями.

Задача исследования состояла в изучении влияния температурного градиента в грунте на переход воды со льда в дисперсную среду. Для данного эксперимента был выбран в качестве дисперсной среды – песок.

Методика проведения

В чашки насыпался очищенный и охлажденный до -15°C песок. Далее сверху помещали льдинки толщиной примерно 1 см. Затем 4 из 5 сосудов ставили на нагревательные элементы разной мощности, которые находились в холодильнике. Термопары располагали на границе лед – дисперсная среда, а вторая под чашкой. Последующие дни измеряли массу песка, термоэдс и напряжение на нагревателях 2 раза в сутки с интервалом ≈ 6 часов при постоянной силе тока.

Экспериментальные результаты

На рис. 1 представлены временные зависимости массы воды, перешедшей с поверхности льда в песок при различных мощностях подогрева ($P_1=0,12$ Вт; $P_2=0,17$ Вт; $P_3=0,24$ Вт; $P_4=0,40$ Вт; $P_5=0$ Вт). На рис. 2 изображена зависимость разности температур от мощности подогрева. Рис. 1 демонстрирует, что нижний подогрев в целом увеличивает скорость влагоперехода. Но при этом увеличение мощности подогрева уменьшает влагопереход. При этом, как свидетельствует рис. 2, не наблюдается монотонность в зависимости от мощности подогрева. Это свидетельствует о многофакторности исследуемой проблемы.

Обсуждение результатов

Сначала поступим формально и определим зависимость коэффициента теплопроводности на основании формулы:

$$P = \lambda S \frac{\Delta T}{h} = \lambda S \frac{U}{\alpha h}, \quad (1)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, S – площадь сечения песка, U – термоэдс термопары, измеряющей разность температур, h – толщина слоя песка и α – коэффициент термоЭДС.

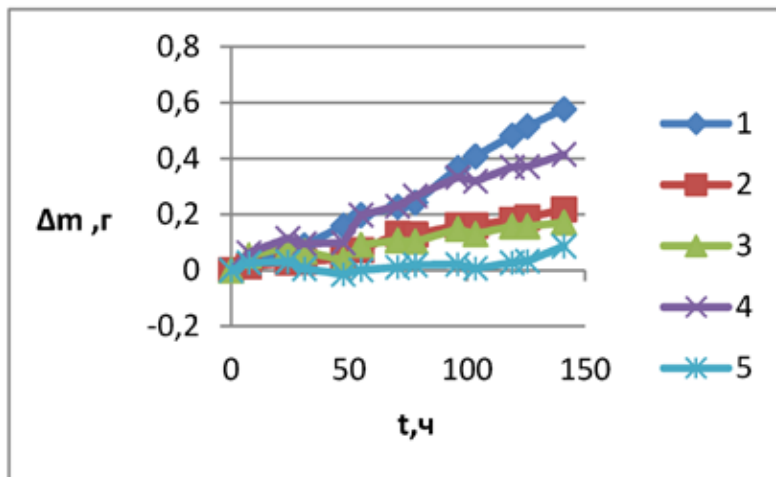


Рис. 1

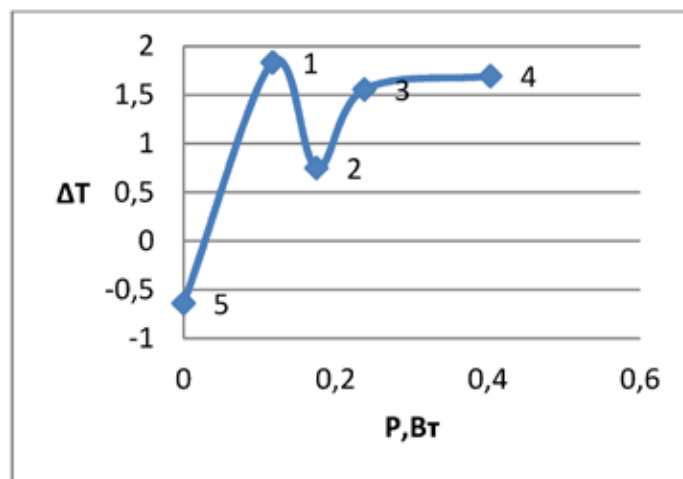


Рис. 2

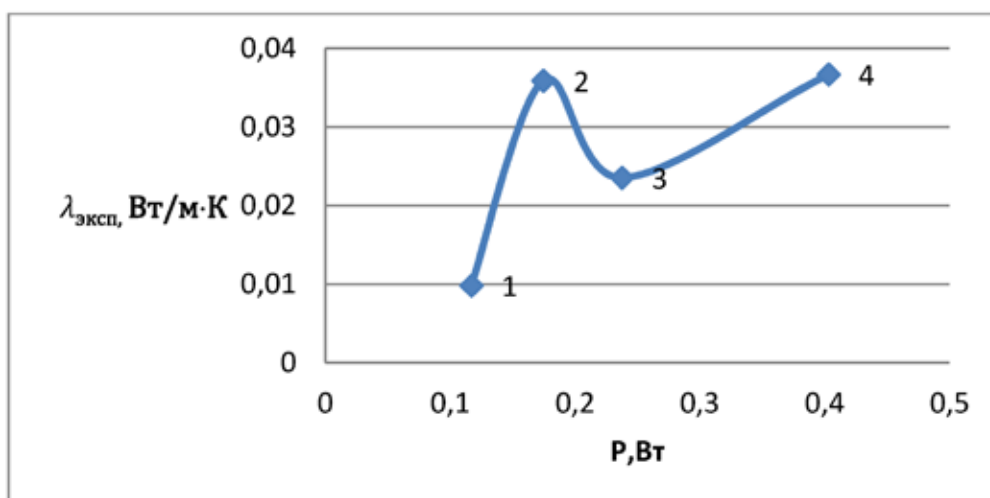


Рис. 3

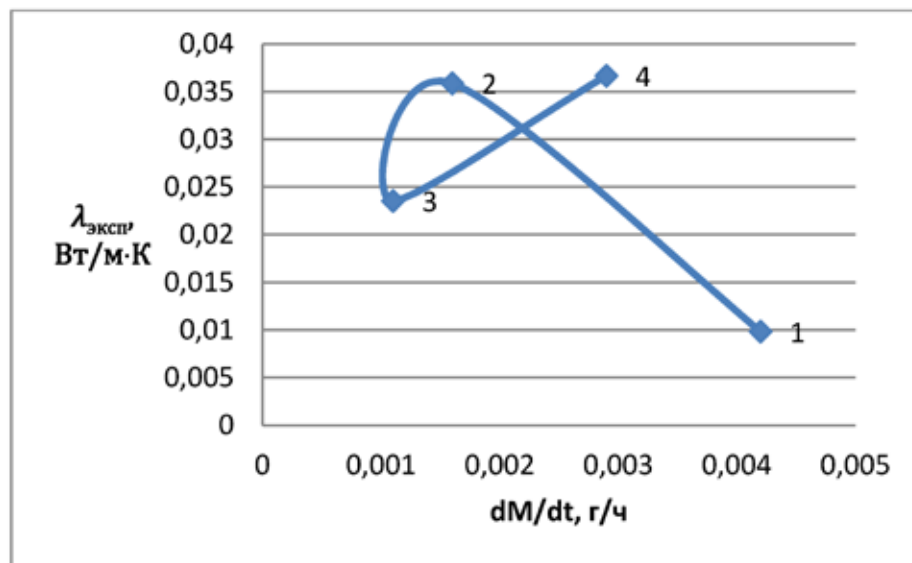


Рис. 4

На рис. 3 представлена зависимость, наблюдаемая $\lambda_{\text{эксп}}$ от мощности подогрева. Тот факт, что $\lambda = f(P)$ и то, что коэффициент теплопроводности меньше, чем табличные ($\lambda = 2,2$ Вт/м·К) для песка, свидетельствует о наличии дополнительного теплового сопротивления. Возникновение дополнительного теплового сопротивления связано с диффузией молекул H_2O при переходе с поверхности льда в грунт. Плотность потока числа молекул H_2O через границу составляет

$$j = \frac{dM}{dt} \frac{1}{m_0 S} \quad (2)$$

и определяет перенос тепла

$$P = jk \Delta T_{\text{диф}} S.$$

Это эквивалентно

$$\Delta\lambda = \frac{dM}{dt} \frac{kh}{m_0 S} \frac{\Delta T_{\text{диф}}}{\Delta T_{\text{тепл}}}.$$

Это приводит к тому, что $\lambda_{\text{эксп}} = \lambda_0 - \Delta\lambda$. Полученная зависимость

$$\lambda_{\text{эксп}} = f\left(\frac{dM}{dt}\right)$$

представлена на рис. 4. Общая наблюдаемая тенденция определяет убывание $\lambda_{\text{эксп}}$ от $\frac{dM}{dt}$. При этом са-

мые большие значения $\frac{dM}{dt}$ соответствует малому значению мощности. При других мощностях наблюдается колебания $\lambda_{\text{эксп}}$ в пределах 17%.

Относительно основного вопроса о влиянии разности температур на переход воды с поверхности льда в песок. Замечаем, что небольшой градиент способствует увеличению скорости перехода по причине увеличения диффузии H_2O от границы перехода. Увеличение же градиента приведет к увеличению градиента на границе перехода, что приведет к замедлению скорости перехода через границу лед-песок. Для окончательного ответа необходимо продолжение экспериментов.

Список литературы

1. Копосов Г.Д. Исследования влияния размеров гранул дисперсной среды на переход квазизжидкого слоя с поверхности льда / Г.Д. Копосов, К.О. Митюгова, А.В. Тягунин // Физический вестник Института естественных наук и технологий САФУ: Сб. научн. тр. Вып.13. – Арх-ск: Кира, 2014. – С. 41–44.
2. Егочина В.И. Исследование процесса перехода воды через границу лед – порошок неорганического материала при отрицательных температурах / В.И. Егочина, А.В. Тягунин, А.В. Булыгина // Физический вестник Института естественных наук и технологий САФУ: Сб. научн. тр. Вып.14. – Арх-ск: Кира, 2015. – С. 14–19.
3. Егочина В.И. Исследование влагоперехода через границу лед-порошок органических материалов / В.И. Егочина, А.В. Тягунин, Г.Д. Копосов // Физический вестник Института естественных наук и технологий САФУ: Сб. научн. тр. Вып.14. – Арх-ск: Кира, 2015. – С. 19–27.

Секция «Актуальные вопросы физики и техники информационных систем», научный руководитель – Глуценко А.Г., д-р физ.-мат. наук, профессор

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЗЕРКАЛА

Агаповичева А.С., Жуков С.В.

Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, Самара,
e-mail: alla.agapovicheva@mail.ru

Антенны радио и оптического диапазона являются важной частью устройств, связанных с передачей

информации, телекоммуникационных систем [1,2]. Параболическое зеркало – это фокусирующее свойство, т.е. все лучи параллельного пучка света, падающие на него, фокусируются в одной точке, как и все лучи света, испущенные из фокуса такого зеркала, образуют параллельный пучок света, как показано на рис. 1.

Расчётная схема отражения лучей представлена на рис. 2.