$$\Pi = -20\int_{0}^{-1}(-400s^2 - 400s + 5)e^s =$$

$$= 20\int_{-1}^{0}(-400s^2 - 400s + 5)e^s ds.$$

К последнему интегралу применим формулу интегрирования по частям, полагая, что

$$u = -400s^2 - 400s + 5,\ du = (-800s - 400)ds,$$
$$dv = e^s ds,\ v = e^s.$$

Следовательно:

$$\Pi = 20\left(-400s^2 - 400s + 5\right)e^s\Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^s(800s + 400)ds.$$

В первом слагаемом подставим пределы интегрирования, а ко второму слагаемому применим еще раз формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = 800s + 400,\ du = 800ds.$$

Имеем

$$\Pi = 20(5 - 5e^{-1} + \left(800s + 400\right)e^s\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 800e^s ds =$$

$$=20(5 - 5e - 1 + 400 + (800 - 400)e - 1 - 800 +$$
$$+800e - 1) = 20(1195e - 1 - 395).$$

Окончательно получим поток равный 892 (у.е.).

Решим задачи связанные с объемом продукции.

Найдем объем продукции выпущенной в течение года, считая количество рабочих дней равным 240, если производительность труда рабочего выражается функцией

$$y = -0,0033x^2 - 0,089x + 20,96;$$

где x – производительность труда за 1 ч. Объем продукции, выпускаемой в течение смены, выражается интегралом:

$$V = \int_{0}^{8}(-0,0033x^2 - 0,089x + 20,96)dx,$$

$$V = \int_{0}^{8}(-0,0033x^2 - 0,089x + 20,96)dx =$$

$$= \left(-0,033\frac{x^2}{3} - 0,089\frac{x^2}{2} + 20,96x\right) =$$

$$= (-0,563 - 2,748 + 167,68) = 164,37 \text{ (шт.)}.$$

Следовательно, объем продукции, выпускаемой за год равен:

$$164,37 \cdot 240 = 37449 \text{ (шт.)}.$$

На складе запас товара составляет 100 единиц, товар, поступающий ежедневно, выражается функцией:

$$y = 22 - 0,5x + 0,06x^2,$$

где x – количество дней. Обозначаем количество товара через W. Через 40 дней количество товара будет равно:

$$W = 100 + \int_{0}^{40}(22 - 0,5x + 0,06x^2)dx =$$

$$= 100 + \left(22x - 0,5\frac{x^2}{2} + 0,06\frac{x^2}{3}\right) =$$

$$= 100 + 880 - 400 + 1260 = 1860 \text{ (шт.)}.$$

Конечно, экономика далеко не единственная сфера применения интегралов, но решение экономических задач с помощью определенного интеграла помогло нам осознать важность применения метода интегральных исчислений. Приведенные примеры только подчеркивают необходимость применения математического аппарата для решения задач с экономическим содержанием

Список литературы

1. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Математическое моделирование социально-экономических систем // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона Ежегодная 76-я научно-практическая конференция Ставропольского государственного аграрного университета «Аграрная наука – Северо-Кавказскому региону». – 2012. – С. 283-286.

2. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б. Совершенствование математической подготовки студентов аграрных вузов // Инновационные векторы современного образования. – 2012. – С. 11-16.

3. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б., Донец З.Г. Экономико-математическое моделирование факторов экономического анализа посредством метода линейного программирования // Аграрная наука, творчество, рост: Сборник научных трудов по материалам IV Международной научно-практической конференции / Отв. за выпуск Т.А. Башкатова, 2014. – С. 329-332.

4. Музенитов Ш.А. Сборник математических задач с экономическим содержанием. – Ставрополь: СевКавГТУ, 2002. – 224 с.

5. Музенитов Ш.А. Математические основы экономики труда и производства: методические рекомендации. – М.: АПН СССР, 1986. – 74 с. (в соавт.)

МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЯ СЛУЦКОГО ДЛЯ АНАЛИЗА ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА

Буханцов С.А., Михненко Е.В.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

Уравнение, носящее имя нашего соотечественника Е. Слуцкого, известно в науке начиная с первой половины XX в. Оно состоит в том, что изменение спроса на некоторый товар при повышении или снижении его цены складывается из влияния непосредственного изменения спроса и косвенного влияния в результате переключения спроса на другие товары при условии неизменности уровня благосостояния. Данное уравнение показывает, что изменение в спросе на i-й товар при изменении цены j-го товара является результатом двух эффектов: эффекта замещения и эффекта дохода. Эффект замещения иногда называют изменением компенсированного спроса [1]. Идея состоит в том, что потребителю компенсируют повышение цены таким увеличением его дохода, которое позволяет ему купить старый потребительский набор. Разумеется, если цена снижается, то «компенсация» заключается в том, что у него отбирают часть денежного дохода [2].

Уравнение Слуцкого описывает поведение точки спроса $\vec{x}$ при компенсации, когда изменения вектора цен $\vec{p}$ и размера бюджета (дохода) q согласованы таким образом, что значение функции полезности $u(\vec{x})$ (далее ФП) остается постоянным. В точке спроса выполняются стандартные условия достижения максимума ФП [3]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \vec{x}} = \lambda \vec{p}^T \\ \vec{p}^T \cdot \vec{x} = q \end{cases} \quad (1)$$

где λ – множитель Ланграджа, в данном случае натуральная предельная стоимость денег.

Точка спроса $\vec{x}(\vec{p}, q)$ есть однородная функция нулевого порядка, и, следовательно, она подчиняется уравнению Эйлера [4]:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{p}} \cdot \vec{p} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q} \cdot q = \vec{0}. \quad (2)$$

Так как по условию u=const, то

$$du = \frac{\partial u}{\partial \vec{x}} d\vec{x} = 0.$$

А следовательно, согласно первому уравнению системы (1):

$$\vec{p}^T \cdot d\vec{x} = 0. \qquad (3)$$

Изменение точки спроса при компенсации (compensation):

$$d\vec{x}_c = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{p}} d\vec{p} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q} dq,$$

где согласно (3) приращение дохода равно:

$$dq = d(\vec{p}^T \cdot \vec{x}) = \vec{p}^T d\vec{x} + \vec{x}^T d\vec{p} = \vec{x}^T dp, \qquad (4)$$

т.е. $d\vec{x}_c = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{p}} d\vec{p} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q} \vec{x}^T d\vec{p}.$

Откуда следует классический вид уравнения Слуцкого [10]:

$$\frac{\partial \vec{x}_c}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{p}} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q} \vec{x}^T; \qquad (5)$$

($\vec{x}$ – столбец; $\vec{x}^T$ – строка).

Для дальнейшего исследования целесообразно ввести диагональные матрицы P и X:

$$P = diag(p_1, p_2, ..., p_n); \;\; X = diag(\vec{x}).$$

Они позволяют находить матрицу эластичности спроса e и вектор эластичности спроса $\vec{e}$:

$$\varepsilon = \left\| \frac{p_j}{x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right\| = X^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{p}} \cdot P;$$

$$\vec{e} = q \cdot X^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q} \cdot \qquad (6)$$

Непосредственно из уравнений (6) следует [11]:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{p}} = X \cdot \varepsilon \cdot P^{-1}; \frac{\partial \vec{x}}{\partial q} = \frac{1}{q} X\vec{e}. \qquad (7)$$

Умножив обе части уравнения (5) на X^{-1} слева и на P справа, получим уравнение Слуцкого, выраженное в терминах эластичности [6]:

$$\varepsilon_c = \varepsilon + \frac{1}{q} \vec{e} \cdot \vec{q}^T, \qquad (8)$$

где ε, ε_c – соответственно матрицы эластичности без компенсации и при ее наличии; $\vec{q}^T = \vec{x}^T \cdot P$ – вектор расходов.

Введем вектор распределения относительных расходов:

$$r = \frac{\vec{q}}{q}.$$

Тогда уравнение Слуцкого (8) можно записать максимально простым образом [7]

$$\varepsilon_c = \varepsilon + \vec{e} \cdot \vec{r}^T. \qquad (9)$$

Введем векторы относительных изменений спроса:

$$\vec{\delta}_x = \left(\frac{dx_1}{x_1}, ..., \frac{dx_n}{x_n} \right) = \left\| \frac{dx_i}{x_i} \right\|.$$

Аналогично запишем вектор относительных изменений цен

$$\vec{\delta}_p = \left\| \frac{dp_i}{p_i} \right\|.$$

При малых величинах этих двух векторов с достаточной точностью можно считать, что они линейно зависят друг от друга

$$\vec{\delta}_{xc} = \varepsilon_c \cdot \vec{\delta}_p. \qquad (10)$$

Теперь предположим, что ФП – однородная функция порядка α.

Известно, что в этом случае выполняется равенство:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial p} = \frac{1}{q} \vec{x}.$$

Поэтому уравнение Слуцкого (5) в случае произвольной однородной ФП приобретает вид [8]

$$\frac{\partial \vec{x}_c}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{p}} + \frac{1}{q} \vec{x} \cdot \vec{x}^T. \qquad (11)$$

Умножив каждую сторону уравнения (11) на X^{-1} слева и на P справа, получим соответствующее уравнение для эластичностей:

$$\varepsilon_c = \varepsilon + \vec{1} \cdot \vec{r}^T. \qquad (12)$$

Рассмотрим частный случай, когда однородная ФП является функцией Кобба-Дугласа. Тогда, как рассмотрено выше, спрос оказывается равным:

$$\vec{x} = \frac{q}{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{p_1}, ..., \frac{\alpha_n}{p_n} \right) = \frac{q}{\alpha} \cdot \left\| \frac{\alpha_i}{p_i} \right\|,$$

отсюда

$$\vec{q} = \frac{q}{\alpha} \cdot \vec{\alpha}^T, \qquad (13)$$

где $\vec{\alpha}^T = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – вектор степеней.

Далее: $\varepsilon = -E$ (E единичная матрица) – эластичность без компенсации.

Отсюда следует выражение для эластичности при наличии компенсации

$$\varepsilon_c = \frac{1}{\alpha} \vec{1} \cdot \vec{\alpha}^T - E. \qquad (14)$$

Рассмотрим пример с тремя видами товара.

Задается вектор $\vec{\alpha}^T = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ функции Кобба-Дугласа. Задается вектор относительных изменений цен $\vec{\delta}_p$ (в процентах).

Требуется найти вектор относительных изменений вектора потребления при компенсации $\vec{\delta}_c$ (в процентах).

Пусть, например, векторы $\vec{\alpha}$ и $\vec{\delta}_p$ равны:

$$\vec{\alpha}^T = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6} \right); \vec{\delta}_p^T = (-10, 5, 15).$$

Матрица эластичности спроса при компенсации в общем случае равна:

$$\varepsilon_c = \frac{1}{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 - \alpha & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 - \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

В данном примере сумма степеней

$$\alpha = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = 1;$$

$$\varepsilon_c=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{6}-1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3}-1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}-1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 2 & 3\\ 1 & -4 & 3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}-$$

матрица эластичности.

Отсюда в соответствии с равенством (10) получаем вектор относительных изменений вектора потребления:

$$\vec{\delta}_c=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-5 & 2 & 3\\ 1 & -4 & 3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10\\ 5\\ 15\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}50+10+45\\ -10-20+45\\ -10+10-45\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}105\\ 15\\ -45\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17{,}5\\ 2{,}5\\ -7{,}5\end{pmatrix}.$$

Можно видеть, что спрос на первый и второй виды товара возрос соответственно на 17,5 и на 2,5%, а спрос на третий вид товара снизился на 7,5%.

Нетрудно заметить, что равенство (10) позволяет решать и обратную задачу: задавшись желаемым относительным изменением спроса, определить, каким образом для этого необходимо изменить цены:

$$\vec{\delta}_p=\varepsilon_c^{-1}\cdot\vec{\delta}_{xc}.$$

Таким образом, построена модель, в рамках которой определяется относительное изменение вектора спроса при компенсации. Одновременно решается и обратная задача на определение компенсированных изменений цен.

Показывается, что привлечение понятия эластичности спроса упрощает запись уравнения Слуцкого и его решение. Доказывается, что знание матрицы эластичности и вектора относительных расходов достаточно для определения реакции спроса для любых сравнительно небольших компенсированных изменений цен. Разумеется, если имеется информация о функции полезности потребителя, то упомянутые матрица эластичности ε_c и распределение расходов $\vec{r}$ в принципе теоретически всегда можно вычислить.

Список литературы

1. Литвин Д.Б., Шайтор А.К., Роговая Н.А. Метод коррекции свойств объекта управления // Моделирование производственных процессов и развитие информационных систем: сб. науч. статей по материалам III Междунар. науч.-практ. конф. – Ставрополь: СтГАУ, 2012. – С. 5–8.

2. Система контроля условий транспортировки ценных грузов / Д.Б. Литвин, И.П. Шепеть, С.М. Бражнев, К.А. Протасов, Е.Д. Литвина // Экономические, инновационные и информационные проблемы развития региона: сб. науч. статей по материалам Междунар. науч.-практ. конф. – Ставрополь: СтГАУ, 2014. – С. 184–186.

3. Экономико-математическое моделирование факторов экономического анализа посредством метода линейного программирования / Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова, Д.Б. Литвин, З.Г. Донец. // Аграрная наука, творчество, рост. 2014. – С. 329–332.

4. Решение систем алгебраических уравнений в среде MATLAB / И.П. Шепеть, С.М. Бражнев, Д.Б. Литвин, Е.Д. Литвина, К.А. Протасов // Инновационные направления развития в образовании, экономике, технике и технологиях: сб. науч. статей в 2-х ч. по материалам Междунар. науч.-практ. конф.; под общ. науч. ред. д.т.н., проф. В.Е. Жидкова. Ставрополь, 2014. Ч. 1. – С. 158–162.

5. Литвин Д.Б., Цыплакова О.Н., Родина Е.В. Моделирование экономических процессов в пространстве состояний // Теоретические и прикладные аспекты современной науки: сб. науч. тр. по материалам Международной науч.-практ. конф. Ставрополь, 2014. – С. 62–66.

6. Метод повышения точности измерения векторных величин / Д.В. Бондаренко, С.М. Бражнев, Д.Б. Литвин, А.А. Варнавский // НаукаПарк, 2013. – № 6 (16). – С. 66–69.

7. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б. Анализ и оценка приоритетности разделов математических дисциплин, изучаемых студентами экономических специальностей аграрных вузов // Вестник АПК Ставрополья. – 2013. – № 1 (9). – С. 6–10.

8. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б. Государственное регулирование в системе агробизнеса // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона: сб. науч. тр. по материалам Ежегодной 76-й науч.-практ. конф. (г. Ставрополь, 24 апреля 2012 г.). – Ставрополь: СтГАУ, 2012. – С. 202–207.

9. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Долгополова А.Ф. Применение операционного исчисления в моделировании экономических систем // Аграрная наука, творчество, рост. – 2013. – С. 263–265.

10. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Совершенствование экономических механизмов для решения проблем экологической безопасности // Информационные системы и технологии как фактор развития экономики региона. – 2013. – С. 68–71.

11. Литвин Д.Б., Дроздова Е. А. Математическое моделирование в среде визуального программирования // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 6. – С. 77–78.

12. Литвин Д.Б., Шепеть И.П. Моделирование роста производства с учетом инвестиций и выбытием фондов // Социально-экономические и информационные проблемы устойчивого развития региона: Международная науч.-практ. конф., 2015. – С. 114-116.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

Бытдаева Ф.А., Рудская Ю.Ю.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

Мы задались вопросом о возможности использования методов и инструментария математической статистики и теории вероятностей в экономической сфере.

Студенты экономических специальностей при изучении дисциплины «теория вероятностей и математическая статистика» нередко задаются вопросом о возможности использования полученных знаний в реальной жизни и их предстоящей деятельности. Одним из важнейших инструментов эконометрических исследований являются методы математической статистики. Это обусловлено тем, что подавляющее большинство микро- и макроэкономических показателей носит характер случайных величин, предсказание точных значений которых почти не представляется вероятным. Связи между этими параметрами обычно не носят строгий функциональный характер, а допускают присутствие случайных отклонений. Вследствие этого использование аппарата математической статистики в экономике имеет естественный характер. Теория вероятностей – основа вероятностно-статистических методов принятия решений в управлении. Чтобы получить возможность использовать в них математический аппарат, нужно задачи принятия решений выразить в терминах вероятностно-статистических моделей. Применение конкретного вероятностно-статистического метода принятия решений состоит из трех этапов:

– переход от экономических, управленческих и технологических реалий к абстрактной математико-статистической схеме, т.е. создание вероятностной модели управления, технологического процесса, порядка принятия решений, в частности по результатам контроля, основанного на статистических данных.

– проведение расчетов и получение выводов математическими методами в рамках вероятностной модели;

– представление полученных ранее выводов применительно к имеющейся ситуации. Принятие соответствующего решения (например, о соответствии или несоответствии качества продукции и услуг имеющимся стандартам, потребности в корректировке технологического процесса и т.п.), в частности, заключения (о доле единиц продукции в партии, не соответствующих требованиям; о конкретном виде законов распределения контролируемых параметров технологического процесса и др.).