$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j},$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Следовательно: $x_{ij} = a_{ij}x_j$, где $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда это уравнение мы можем записать в виде системы уравнений для n конечного количества отраслей:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 \\ \ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n . \end{cases}$$

Введем к рассмотрению матрицы, где X – вектор валового (общего) производства, Y – вектор конечного потребления, а A – матрица прямых затрат:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений принимает вид:

$$X = AX + Y;$$

$$Y = (E - A)X;$$

$$X = (E - A)^{-1}\,Y = SY.$$

где S – матрица полных затрат, а s_{ij} – объем валового (общего) производства i-ой отраслью, необходимый для производства единицы конечного продукта j-й отрасли.

И тогда цель межотраслевого баланса заключается в нахождении вектора валового (общего) производства X при известных постоянных значениях прямых затрат A и определенном необходимом векторе конечного потребления Y.

Но модель Леонтьева считается продуктивной только тогда, когда матрица A является продуктивной. Матрица Аявляется продуктивнойтогда и только тогда, когда матрица S существует и ее элементы неотрицательны. Также матрица A считается продуктивной, если все ее элементы неотрицательны и сумма элементов любого ее ряда не превышает 1.

Рассмотрим модель Леонтьева на простом примере, где n=2 (две отрасли производства). В таблице приведены данные.

$$A = \begin{pmatrix} 0,03 & 0,09 \\ 0,05 & 0,07 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A является продуктивной. Далее найдем матрицу полных затрат:

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{\widetilde{(E - A)}}{|E - A|};$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,97 & -0,09 \\ -0,05 & 0,93 \end{pmatrix};$$

$$|E - A| = 0,9021 - 0,0045 = 0,8976;$$

$$\widetilde{(E - A)} = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,09 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{0,8976}\begin{pmatrix} 0,93 & 0,09 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}.$$

Зная по условию вектор Y конечного продукта, найдем вектор X валового (общего) производства

$$Y = \begin{pmatrix} 178 \\ 88 \end{pmatrix};$$

$$X = \frac{1}{0,8976}\begin{pmatrix} 0,93 & 0,09 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 178 \\ 88 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{0,8976}\begin{pmatrix} 173,46 \\ 94,26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 193,2 \\ 105,0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили результат, согласно которому производство в энергетической отрасли нужно увеличить до 193,2 условных единиц, а в машиностроительной – до 105 условных единиц.

Список литературы

1. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б. Совершенствование математической подготовки студентов аграрных вузов // Инновационные векторы современного образования. – 2012. – С. 11-16.

2. Мелешко С.В., Невидомская И.А., Гулай Т.А. Самостоятельная работа студентов и ее организация при изучении теории вероятностей. – 2014. – С. 246-251.

3. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б., Донец З.Г. Экономико-математическое моделирование факторов экономического анализа посредством метода линейного программирования // Аграрная наука, творчество, рост Сборник научных трудов по материалам IV Международной научно-практической конференции / Отв. за вып. Т.А. Башкатова, 2014. – С. 329-332.

4. Абросимова М.В. Межстрановая предпринимательская деятельность в условиях глобализации. – 2012. – № 24 (222). – С. 33-38.

Отрасль	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовый (общий) выпуск
	Энергетика	Машиностроение		
Энергетика	3	8	89	100
Машиностроение	5	7	88	100

Из данных таблицы следует:

$$x_1 = 100; x_2 = 100; x_{11} = 3; x_{12} = 8; x_{21} = 5;$$

$$x_{22} = 7; y_1 = 89; y_2 = 88.$$

По формуле находим коэффициенты прямых затрат и составляем матрицу А:

$$a_{11} = \frac{3}{89} = 0,03;\ a_{12} = \frac{8}{88} = 0,09;$$

$$a_{21} = \frac{5}{89} = 0,05;\ a_{22} = \frac{7}{88} = 0,07;$$

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Галаян Д.В., Онищенко Л.И., Гулай Т.А.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

Понятие предела несомненно занимает ключевое место в математике. Оно является основным понятием математического анализа, без которого невозможны многие экономические расчеты. Представление о понятии предела является очень древним, основанным на эмпирических исследованиях, а современная теория – результат систематизации и эволюции этих представлений. Такие математики древности, как Евклид и Аристотель, выдвигали идею существования предела. Но лишь спустя несколько столетий Ньютон обратил внимание на эту идею и ввел термин limes (предел).

Определение предела последовательности

Число a называется пределом последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n$, если по мере возрастания номера n член y_n неограниченно приближается к a:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Теория пределов часто используется в различных экономических вычислениях, например, в подсчитывании сложных процентов.

В основном практических расчетах применяют дискретные проценты (начисляемые с определённой периодичностью). Время – дискретная переменная. В некоторых случаях возникает необходимость в применении непрерывных процентов (например, в доказательствах расчётов, в которых происходят непрерывные процессы). Рассмотрим формулу сложных процентов

$$S = P(1+i)^n,$$

где P – первоначальная сумма; i – ставка процентов (десятичная дробь); S – сумма, которая образовалась к концу срока ссуды в конце n-го года.

Пример. Найти прибыль от 30000 долларов, положенных на депозит на 3 года под 10% годовых, если в конце каждого года проценты добавлялись к депозитному вкладу.

Решение. Используем формулу для вычисления сложных процентов:

$$3000\left(1+\frac{10\%}{100\%}\right)^3 = 30000\cdot 1{,}1^3 = 39930 \text{ долл.}$$

В данном случае прибыль будет равна:

$$39930 - 30000 = 9930 \text{ долл.}$$

Ответ: 9930 долл.

Зачастую в финансовой практике возникают задачи, обратные определению наращенной суммы: по заданной сумме, которую следует уплатить через некоторое время, необходимо определить сумму полученной ссуды. Имеем:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P = \lim_{n\to\infty} \frac{S}{(1+i)^n},$$

где S – заданная сумма; n – время; P – полученная ссуда.

Следовательно, при очень больших сроках платежа сумма последнего будет крайне незначительна. В финансово-кредитных операциях непрерывные процессы наращения денежных сумм почти не используются, однако при выборе и обосновании инвестиционных решений они необходимы (многие экономические явления по своей природе непрерывны). Разновидность формулы сложных процентов в случае, когда проценты начисляются m раз в году:

$$S = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn},$$

где m – число периодов начисления в году, i – годовая ставка.

Логично, что чем больше m, тем меньше n между моментами начисления процентов. В пределе при $m \to\infty$ имеем:

$$\overline{S} = \lim_{m\to\infty} P(1+\frac{i}{m})^{mn} = P\lim_{m\to\infty}((1+\frac{i}{m})^m)^n.$$

Так как $\lim_{m\to\infty}(1+\frac{i}{m})^m = e^i$, то $\overline{S} = Pe^{in}$.

Чтобы было возможно отличать ставки непрерывных и дискретных процентов, непрерывную ставку обозначим δ, тогда $\overline{S} = Pe^{\delta n}$.

Пределы так же применяются при использовании производной в экономике. Если функция $u=u(t)$ – объем произведенной продукции за время t, то производная $u'(t_0)$ есть производительность труда в момент времени t_0. Если $y=f(x)$ – издержки производства при производстве хединиц продукции, то производная $y'=f'(x_0)$ выражает предельные издержки производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство дополнительной продукции. Также существуют другие величины, характеризующие предельные процессы выручки, дохода, продукта, полезности, производительность и т.д.

Если предельные издержки и цена продукции равны, то в таких случаях говорят, что выпуск продукции является оптимальным для производителя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = p,$$

где Δy – изменение денежных единиц, Δx – изменение выпуска продукции, p – цена продукции.

Рассмотрим соотношение между предельным и средним доходами. Пусть p – цена, а q–количество продукции, тогда $r = pq$, где r – суммарный доход.

Рассмотрим монопольный рынок (на цену влияет одна фирма (иногда несколько): пусть $p=aq+b$ – кривая спроса, тогда $r=(aq+b)\ q=aq^2+bq$ – суммарный доход, $r_{\text{ср}} = \frac{r}{q} = aq+b$ – средний доход, $r'_q = 2aq+b$ – предельный доход. В таких условиях действует следующая закономерность: чем большее количество продукции продано, тем предельный доход ниже, а значит и средний доход уменьшается.

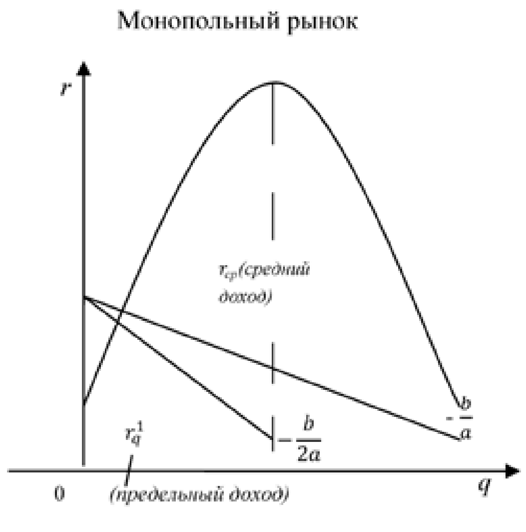
В условиях свободного конкурентного рынка товары продают по фиксированной цене ($p=b$), тогда $r = bq$ – суммарный доход, $r'_{\text{ср}} = b$ – предельный доход, $r_{\text{ср}} = \frac{r}{q} = b$ – средний доход. Значит, при совершенной конкуренции предельный и средний доходы совпадают.

От 0 до $-\frac{b}{2a}$ эластичный спрос, от $-\frac{b}{2a}$ до $-\frac{b}{a}$ – неэластичный спрос.

Эластичностью функции $E_x(y)$ называется предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x\to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}y'.$$

Эластичность функции приближенно показывает, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении переменной x на 1% (другими словами, эластичность показывает, на сколько процентов в среднем произойдет изменение спроса при изменении цены на 1%). Если модуль найденной эластичности больше единицы, то спрос эластичный ($|E_x(y)| > 1$); если меньше либо равен единице, тогда спрос называют неэластичным ($|E_x(y)| \le 1$); если равен единице, то говорят о спросе с единичной эластичностью $|E_x(y)| = 1$.



При $p = p(q)$ – произвольной кривой спроса, предельный доход (r'_q) равен:

$$r'_q = r'_q = (pq)'_q = p\left(1+\frac{q}{p}p'_q\right) = p\left(1+E_q\left(p\right)\right),$$

или иначе

$$r'_q = p\left(1-\frac{1}{|E_q(p)|}\right) \text{ так как } E_p(q) < 0.$$

С возрастанием цены р суммарный доход от продажи продукции увеличивается (при эластичном спросе ($|E_x(q)|<1$, то $r'_q<0$)) или уменьшается (при неэластичном спросе ($|E_x(q)|>1$, то $r'_q>0$)).

Пример: даны функции спроса $q=\frac{p+8}{p+2}$ и предложения $s = p + 0{,}5$, где p – цена товара, q – количество покупаемого товара (спрос), а s – количество предлагаемого товара (предложение). Найти рыночную цену и эластичность спроса и предложения для этой цены.

Решение. Рыночную цену найдем с помощью равенства q из:

$$\frac{p+8}{p+2} = p+5 \Rightarrow p=2 \text{ (ден. ед.)}.$$

Эластичность спроса и предложения найдем по формуле

$$E_p\left(q\right) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)} -$$

эластичность спроса, $E_p\left(s\right)=\frac{2p}{2p+1}$ – эластичность предложения.

Т.к. $p = 2$, то $E_{p=2}\left(q\right)=-0{,}3$, а $E_{p=2}\left(s\right)=0{,}8$. Значит, спрос и предложение на этот товар при рыночной цене являются неэластичными: при увеличении цены на 1 % спрос уменьшится на 0,3 %, а предложение возрастет на 0,8 %.

В ходе работы показана актуальность теории пределов при нахождении показателей в различных экономических ситуациях. Следовательно, теория пределов играет важную роль не только в математике, но и в экономике.

Список литературы

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 301 с.

2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики. – М., 2007. – 145-187 с.

3. Музенитов Ш.А., Синельников М.Б., Музенитов Э.Ш. Математическая экономика. – Ставрополь, 2003. – 11-75 с.

4. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б. Совершенствование математической подготовки студентов аграрных вузов // Инновационные векторы современного образования, 2012. – С. 11-16.

5. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б., Донец З.Г. Экономико-математическое моделирование факторов экономического анализа посредством метода линейного программирования // Аграрная наука, творчество, рост: Сборник научных трудов по материалам IV Международной научно-практической конференции / Отв. за вып. Башкатова Т.А., 2014. – С. 329-332.

6. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б. Анализ и оценка приоритетности разделов математических дисциплин, изучаемых студентами экономических специальностей аграрных вузов // Вестник АПК Ставрополья. 2013. – № 1 (9). – С. 6–10.

ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Герасимова А.С.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

Дискретная математика или дискретный анализ – направление в математике, соединяющее отдельные ее сегменты, ранее сформировавшиеся как самостоятельные теории. К ним можно отнести математическую логику и теорию множеств, графов, кодирования, автоматов. Дискретная математика исследует объекты, чаще всего не имеющие ни физической, ни числовой интерпретации. В классической математике закономерности можно представить соотношений, а характеристики реальных объектов можно представить в виде чисел. В отличие от настоящих характеристик информационных объектов могут послужить такие понятия, как «структура», «отношение», «связь». Чаще всего объекты информатики рассматриваются в виде некоторых знаков, над которыми можно производить различные операции.

В данное время в обществе возникают разногласия, не позволяющие методами классической высшей математики моделировать интеллектуальные и кибернетические системы. Следовательно, появилась дискретная математика, которая работает для описания основных систем информационного периода. Дискретная математика является основой проектирования цифровых электронных устройств. Первое применениедискретной математики в данной области будут связаны с именами К.Э. Шеннона, В.А. Котель-