Список литературы

1. Агишева Д.К., Зотова С.А., Матвеева Т.А., Светличная В.Б. Математическая статистика (учебное пособие) // Успехи современного естествознания. – 2010. – № 2 – С. 122-123.
2. Давыдов А.С., Агишева Д.К., Матвеева Т.А. Поиск уравнения параболической зависимости // Международный студенческий научный вестник. – 2015. – № 3; URL: www.eduherald.ru/140-14153.
3. Макарчук Д.А., Шувалова Ю.И., Агишева Д.К., Зотова С.А., Светличная В.Б. Графическая обработка выборочной совокупности // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5 (2). – С. 194-195.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЖИЗНИ СУДЕНТОВ

Горбатов Н.С., Ким В.А., Светличная В.Б., Агишева Д.К., Зотова С.А.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: mathemat@volpi.ru

В учебные дни столовую посещают 100 студентов, которые идут обедать на большой перемене. Имеется две столовые: одна в институте, другая – недалеко от него. Каждый студент с равными вероятностями независимо от выбора других решает, в какую столовую пойти. Директор института желает, чтобы с вероятностью 0,99 все пришедшие студенты могли там одновременно пообедать. Поэтому возникает вопрос, какое количество мест для этого необходимо?

Будем считать, что событие А произошло, если студент пообедал в столовой при институте. По условию задачи $n=100$, $p=P(A)=0,5$. Нас интересует такое наименьшее число посетителей m, что вероятность одновременного прихода не менее чем m студентов из числа $n=100$ с вероятностью успеха $p=0,5$ приблизительно равна вероятности переполнения столовой, то есть $1-0,99=0,01$. Таким образом, нас интересует такое наименьшее число m, что.

Подобные задачи решаются с применением интегральной теоремы Муавра-Лапласа для интервала $[m;\,100]$. Т.к. $\sqrt{npq}=\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5}=5$, $m_1=m$, $m_2=n=100$, то

$$P_{100}(m;100)\approx\Phi\left(\tfrac{100-50}{5}\right)-\Phi\left(\tfrac{m-50}{5}\right)=$$
$$=\Phi(10)-\Phi\left(\tfrac{m}{5}-10\right)\approx 0,01.$$

Отсюда получаем $\Phi(10)-\Phi(x)=0,01$ или

$$\Phi(x)=\Phi(10)-0,01=0,5-0,01=0,49\,.$$

Используя таблицу значений функции Лапласа Ф(x), находим, $x\approx 2,33$, значит, $\frac{m}{5}-10\approx 2,33$. Из этого следует, что $m\approx(2,33+10)\cdot 5\approx 61,65$. Следовательно, в столовой при институте должно быть как минимум 62 места.

Список литературы

1. Агишева Д.К., Зотова С.А., Матвеева Т.А., Светличная В.Б. Математическая статистика: учебное пособие // Успехи современного естествознания. – 2010. – № 2 – С. 122-123.

"«КОРНИ» НЕ ТОЛЬКО ГРУППА".

Грицун Б.М., Коленко К.В., Светличная В.Б.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: mathemat@volpi.ru

В школьной математике есть базовая тема – решение квадратных уравнений во множестве действительных чисел.

В классах с углубленным изучением математики и институтах вводится понятие множества комплексных чисел и тогда справедливо утверждение, что всякий многочлен $f(x)$ степени n, $n\geq 1$ с действительными коэффициентами имеет n корней, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность.

Тогда квадратное уравнение будет иметь ровно два корня, независимо от знака дискриминанта.

Задача 1. В классе может найтись ученик, который скажет: «Докажите, что нет ни одного квадратного уравнения с тремя различными корнями?»

Решение. Предположим, что мы всерьез ищем такое квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, которому удовлетворяли бы три числа m, n, p. Подставляя числа m, n, p последовательно в уравнение, мы находим, что они будут удовлетворять этому уравнению, если

$$\begin{cases} m^2a+mb+c=0,\\ n^2a+nb+c=0,\\ p^2a+pb+c=0.\end{cases}$$

Для того чтобы числа (m, n, p) были корнями настоящего квадратного уравнения (уравнения отличного от тривиального $0x^2+0x+0=0$), система полученных трех однородных уравнений относительно трех неизвестных (a, b, c) должна иметь ненулевое решение, а для этого ее определитель должен равняться нулю, то есть должно выполняться следующее условие

$$\begin{vmatrix} m^2 & m & 1\\ n^2 & n & 1\\ p^2 & p & 1\end{vmatrix}=0\,.$$

Чтобы вычислить определитель, проведем его элементарные преобразования: вычтем из первой и второй строчек третью строку. Элементарные преобразования не изменяют значения определителя, но теперь его легко свести к определителю второго порядка, разложив по третьему столбцу, в котором после преобразования получилось два нуля.

$$\begin{vmatrix} m^2 & m & 1\\ n^2 & n & 1\\ p^2 & p & 1\end{vmatrix}=0\to\begin{vmatrix} m^2-p^2 & m-p & 0\\ n^2-p^2 & n-p & 0\\ p^2 & p & 1\end{vmatrix}=$$
$$=0\to\begin{vmatrix} m^2-p^2 & m-p\\ n^2-p^2 & n-p\end{vmatrix}=$$
$$=0\to\left(m^2-p^2\right)(n-p)-\left(n^2-p^2\right)(m-p)=$$
$$=0\to(m-p)(n-p)(m+p-n-p)=$$
$$=0\to(m-p)(n-p)(m-n)=0.$$

Итак, определитель равен

$$(m-p)(n-p)(m-n)=0\,,$$

откуда следует, что и требовалось доказать m=n или m=p или n=p. Сенсации не состоялось, квадратное уравнение не может иметь трех различных корней.

Но так ли уж все безнадежно с количеством корней?

Задача 2. Составьте хотя бы одно уравнение второй степени, которое имеет четыре различных корня.

Решение. Рассмотрим квадратное уравнение $x^2-6x+8=0$. Его корни легко найти, решая уравнение через дискриминант или же по теореме Виета: $x_1=2;\ x_2=4$. То есть, это уравнение имеет только два корня.

А теперь проделаем с этим уравнением «фокус» – поставим вокруг х две небольшие палочки, которые в математике означают модуль числа

$$x^2 - 6 \cdot |x| + 8 = 0.$$

По определению модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Поэтому характеристической точкой разбивающей область допустимых значений будет $x = 0$, получается два интервала:

а) Пусть $x \geq 0$, тогда уравнение, освобождаясь от модуля, принимает вид $x^2 - 6x + 8 = 0$, решая его обычным образом, находим корни $x_1 = 2;\ x_2 = 4$. Оба корня попадают в рассматриваемый интервал.

б) Пусть $x < 0$, тогда, раскрывая модуль по определению, получаем иное квадратное уравнение $x^2 + 6x + 8 = 0$, корнями которого будут числа $x_3 = -2;\ x_4 = -4$, которые тоже попадают во второй интервал.

Таким образом, окончательное решение уравнения состоит из четырех корней:

$$x_1 = 2;\ x_2 = 4,\ x_3 = -2;\ x_4 = -4.$$

Ответ: уравнение $x^2 - 6 \cdot |x| + 8 = 0$ имеет 4 различных корня $x_1 = 2;\ x_2 = 4$, $x_3 = -2;\ x_4 = -4$.

Этого кстати можно было ожидать еще до решения, так как трехчлен, стоящий в левой части уравнения представляет собой четную функцию, следовательно, его корни должны быть симметричны относительно начала координат.

Все наши предыдущие рассуждения сводились к тому, что квадратное уравнение имеет два и только два корня, а вот вам уравнение с четырьмя корнями. Никто ведь отдельно не подчеркивает, есть ли в уравнении знак модуля. Но не зря в условии задачи написано не квадратное уравнение, а уравнение второй степени. В этом вся тонкость. По определению квадратное уравнение имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$, то есть, в нем модуля нет, а полученное нами уравнение – это уравнение второй степени, но не квадратное.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Денисова Д.А., Зотова С.А., Агишева Д.К., Матвеева Т.А.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: mathemat@volpi.ru

Изучая какое-либо явление, мы должны, прежде всего, создать его математическую модель. Зачастую это можно сделать с помощью дифференциальных уравнений. Математическая модель даёт возможность изучать явление в целом, а также спрогнозировать его развитие с течением времени. Теория дифференциальных уравнений представляет собой раздел математики, тесно связанный с другими областями математики и с её приложениями.

Как известно, многие экономические процессы взаимосвязаны. Любому из них свойственен циклический характер. Часто для исследования таких экономических систем, где независимой переменной является время *T*, применяются дифференциальные уравнения.

Рассматрим применение дифференциальных уравнений 1-го порядка в моделях экономики на примере неоклассической модели роста. Пусть $Y = F(K, L)$ – национальный доход, где F – однородная производственная функция первого порядка $F(TK, TL) = TF(K, L)$, K – объём капиталовложений (производственных фондов), L – объём затрат труда.

Величина фондовооружённости выражается формулой $k = \dfrac{K}{L}$.

Производительность труда выражается формулой

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = F(k,l). \quad (1)$$

Динамика фондовооружённости есть функция от времени Т. Для описания модели необходимо ввести параметры.

Естественный прирост во времени трудовых ресурсов

$$L' = \alpha L. \quad (2)$$

Инвестиции, расходуемые на увеличение производственных фондов и на амортизацию

$$I = K' + \beta K,$$

где β – норма амортизации. Причём, если l – норма инвестиций, то

$$I = lY = K' + \beta K \text{ или } K' = lF(K,L) - \beta K. \quad (3)$$

Из определения фондовооружённости К вытекает, что $\ln k = \ln K - \ln L.$

Продифференцируем это равенство по переменной *T*

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}. \quad (4)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в равенство (4), получаем уравнение относительно неизвестной функции *k*:

$$k' = l f(k) - (\alpha + \beta) k. \quad (5)$$

Равенство (5) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными. Т.к. по условию $k' = 0$, то

$$l f(k) - (\alpha + \beta) k = 0.$$

Таким образом, $k = \text{const}$ – постоянная величина, являющаяся корнем этого нелинейного алгебраического уравнения.

Применение данного метода можно рассмотреть на примере конкретной задачи. Для уравнения (5) найдём интегральные кривые. Исходя из уравнения (1), получаем $f(k) = \sqrt{k}$. При этом уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{dk}{dt} = l\sqrt{k} - (\alpha + \beta) k.$$

Для найденного уравнения определим стационарное решение

$$l\sqrt{k} - (\alpha + \beta) k = 0.$$

Отсюда получим частное решение уравнения (5)

$$K_{st} = L^2 / (\alpha + \beta)^2.$$

Разделим переменные в (5) и решим полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dk}{\sqrt{k}\left(l - (\alpha + \beta)\sqrt{k}\right)} = dt.$$