$$x^2 - 6\cdot|x| + 8 = 0.$$

По определению модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Поэтому характеристической точкой разбивающей область допустимых значений будет $x = 0$, получается два интервала:

а) Пусть $x \geq 0$, тогда уравнение, освобождаясь от модуля, принимает вид $x^2 - 6x + 8 = 0$, решая его обычным образом, находим корни $x_1 = 2;\ x_2 = 4$. Оба корня попадают в рассматриваемый интервал.

б) Пусть $x < 0$, тогда, раскрывая модуль по определению, получаем иное квадратное уравнение $x^2 + 6x + 8 = 0$, корнями которого будут числа $x_3 = -2;\ x_4 = -4$, которые тоже попадают во второй интервал.

Таким образом, окончательное решение уравнения состоит из четырех корней:

$$x_1 = 2;\ x_2 = 4,\ x_3 = -2;\ x_4 = -4.$$

Ответ: уравнение $x^2 - 6\cdot|x| + 8 = 0$ имеет 4 различных корня $x_1 = 2;\ x_2 = 4,\ x_3 = -2;\ x_4 = -4$.

Этого кстати можно было ожидать еще до решения, так как трехчлен, стоящий в левой части уравнения представляет собой четную функцию, следовательно, его корни должны быть симметричны относительно начала координат.

Все наши предыдущие рассуждения сводились к тому, что квадратное уравнение имеет два и только два корня, а вот вам уравнение с четырьмя корнями. Никто ведь отдельно не подчеркивает, есть ли в уравнении знак модуля. Но не зря в условии задачи написано не квадратное уравнение, а уравнение второй степени. В этом вся тонкость. По определению квадратное уравнение имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$, то есть, в нем модуля нет, а полученное нами уравнение – это уравнение второй степени, но не квадратное.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Денисова Д.А., Зотова С.А., Агишева Д.К., Матвеева Т.А.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: mathemat@volpi.ru

Изучая какое-либо явление, мы должны, прежде всего, создать его математическую модель. Зачастую это можно сделать с помощью дифференциальных уравнений. Математическая модель даёт возможность изучать явление в целом, а также спрогнозировать его развитие с течением времени. Теория дифференциальных уравнений представляет собой раздел математики, тесно связанный с другими областями математики и с её приложениями.

Как известно, многие экономические процессы взаимосвязаны. Любому из них свойственен циклический характер. Часто для исследования таких экономических систем, где независимой переменной является время *T*, применяются дифференциальные уравнения.

Рассматрим применение дифференциальных уравнений 1-го порядка в моделях экономики на примере неоклассической модели роста. Пусть $Y = F(K, L)$ – национальный доход, где F – однородная производственная функция первого порядка $F(TK, TL) = TF(K, L)$, K – объём капиталовложений (производственных фондов), L – объём затрат труда.

Величина фондовооружённости выражается формулой $k = \dfrac{K}{L}$.

Производительность труда выражается формулой

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = F(k,l). \qquad (1)$$

Динамика фондовооружённости есть функция от времени Т. Для описания модели необходимо ввести параметры.

Естественный прирост во времени трудовых ресурсов

$$L' = \alpha L. \qquad (2)$$

Инвестиции, расходуемые на увеличение производственных фондов и на амортизацию

$$I = K' + \beta K,$$

где β – норма амортизации. Причём, если l – норма инвестиций, то

$$I = lY = K' + \beta K \text{ или } K' = lF(K, L) - \beta K. \qquad (3)$$

Из определения фондовооружённости К вытекает, что $\ln k = \ln K - \ln L$.

Продифференцируем это равенство по переменной T

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}. \qquad (4)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в равенство (4), получаем уравнение относительно неизвестной функции k:

$$k' = l f(k) - (\alpha + \beta)k. \qquad (5)$$

Равенство (5) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными. Т.к. по условию $k' = 0$, то

$$l f(k) - (\alpha + \beta)k = 0.$$

Таким образом, $k = \text{const}$ – постоянная величина, являющаяся корнем этого нелинейного алгебраического уравнения.

Применение данного метода можно рассмотреть на примере конкретной задачи. Для уравнения (5) найдём интегральные кривые. Исходя из уравнения (1), получаем $f(k) = \sqrt{k}$. При этом уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{dk}{dt} = l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k.$$

Для найденного уравнения определим стационарное решение

$$l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0.$$

Отсюда получим частное решение уравнения (5)

$$K_{st} = L^2 / (\alpha + \beta)^2.$$

Разделим переменные в (5) и решим полученное дифференциальное уравнение:

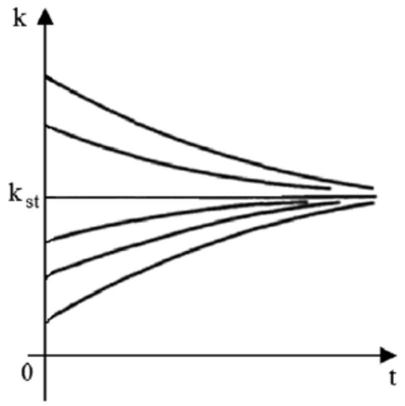
$$\frac{dk}{\sqrt{k}\left(l - (\alpha + \beta)\sqrt{k}\right)} = dt.$$

Проинтегрируем обе части, получим общее решение в виде:

$$k(t)=\left(\frac{1}{(\alpha+\beta)}+C\cdot\exp\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}t\right)\right)^2.$$

Заметим, что интегральные кривые сходятся к стационарному решению (рисунок), то есть

$$K \to K_{st} \text{ при } T \to \infty.$$



Таким образом, если параметры задачи L, α и β фиксированны, то независимо от начальных условий функция фондовооружённости стремится к стационарному положению. Стационарная точка $K=K_{st}$ – есть точка устойчивого равновесия.

Список литературы

1. http://fislac.ru/lin_prog/veroatnoct35.htm.

2. Соловьева А.А., Коробкина А.В., Зотова С.А., Агишева Д.К., Светличная В.Б. Математический анализ в экономических приложениях. Проведение анализа дифференциального исчисления функции одной переменной в экономике // Международный студенческий научный вестник. – 2015. – № 3; URL: www.eduherald.ru/140-14157.

3. Светличная В.Б., Матюнина Е.В. Разные способы решения линейного дифференциального уравнения // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5-2. – С. 195-196; URL: http://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=34067.

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ МНОГОЧЛЕНА ЧЕБЫШЁВА

Зашеловский А.Е., Агишева Д.К., Матвеева Т.А., Зотова С.А.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: mathemat@volpi.ru

Многочлены Чебышёва первого рода $T_n(x)$ могут быть определены с помощью рекуррентных соотношений:

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\ \ldots,T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x).$$

Первые многочлены Чебышёва имеют вид:

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,$$

$$T_2(x)=2x^2-1,\ T_3(x)=4x^3-3x,$$

$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$$

$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,$$

$$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1,$$

$$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x, \text{ и т.д.}$$

В работе рассматривается аппроксимация экспериментальных зависимостей с помощью ортогональных полиномов Чебышёва, которые преобразованы в алгебраические многочлены. Такие многочлены легко вычислять, дифференцировать и интегрировать.

Пусть необходимо аппроксимировать экспериментальную зависимость вида:

x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

x_i – значения входных параметров исследуемого процесса, x_i – значения выходных параметров исследуемого процесса. Аппроксимирующую функцию будем искать в виде суммы многочленов Чебышёва, т.е.

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}c_iT_i(x).$$

Используя узловые точки, запишем формулу для вычисления коэффициентов

$$c_i=\frac{\sum_{j=0}^{n}f(x_j)T_i(x_j)}{\sum_{j=0}^{n}T_i^2(x_j)}.$$

Процедуры, написанные средствами системы Mathcad 15, позволяют рассчитывать их коэффициенты.

Для исходных данных

x_i	5	10	20	30	40	50
y_i	45	30	35	30	25	20

была получена приближающая функция. На графике (рис. 1) изображены экспериментальные данные в виде точек и аппроксимирующий многочлен.