

**Секция «Теория устойчивости систем дифференциальных уравнений»,
научный руководитель – Елецких И.А., канд. физ.-мат. наук**

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ
УРАВНЕНИЯ МАЯТНИКА**

Мелякова О.Ю.

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный
университет им. И.А. Бунина», Елец,
e-mail: lesikx5@mail.ru

Исследование устойчивости нелинейных систем рассмотрим на примере модели простого маятника, так как уравнения маятника имеют важное практическое значение. Поведение некоторых не связанных непосредственно с маятником физических систем может моделироваться с использованием математической модели, похожей на уравнение маятника. Примером такой системы может служить модель синхронного генератора, соединенного бесконечной шиной.

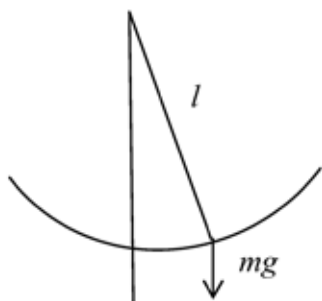


Рис. 1

Пусть l – длина стержня, m – масса груза. Предположим, что стержень абсолютно твердый и имеет нулевую массу. Пусть φ – угол отклонения стержня от вертикальной оси, проходящей через точку подвеса. Маятник свободно качается в вертикальной плоскости, и груз маятника совершает круговое движение с радиусом l . Для записи уравнения движения маятника определим силы, действующие на маятник. В первую очередь это сила тяжести mg , где g – гравитационная постоянная. Имеется также сила трения, препятствующая движению, которую будем полагать пропорциональной скорости вращения (коэффициент пропорциональности k). Используя второй закон Ньютона получаем уравнение движения маятника для продольного движения:

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi - kl \frac{d\varphi}{dt}.$$

Обозначив в качестве переменных $x = \varphi$ и $y = \frac{d\varphi}{dt}$, запишем уравнения состояния в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x - \frac{k}{m} y. \end{cases} \quad (1)$$

Для нахождения точки равновесия положим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$$

и решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\frac{g}{l} \sin x - \frac{k}{m} y = 0 \end{cases}$$

относительно x и y . С физической точки зрения маятник имеет только два положения равновесия $(0; 0)$ и $(\pi; 0)$, которые существенно отличаются друг от друга. Маятник может легко установиться в нижнем положении равновесия $(0; 0)$ и не может удерживаться в верхнем положении $(\pi; 0)$, так как любое малое возмущение выведет его из этого состояния. Отличие этих двух состояний заключается в различных свойствах устойчивости, присущих этим состояниям.

Рассмотрим метод исследования на устойчивость системы (1) с помощью построения фазового портрета в математическом пакете Maple. При этом будем пользоваться понятиями устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову, введенные в [1, с. 152]. Будем так же пользоваться классификацией точек покоя, приведённой в [1, с. 155-157].

Рассмотрим частный случай системы (1) при $g = 10$, $l = 1$, $k = 1$, $m = 1$. Фазовый портрет этой системы получен с помощью компьютерного моделирования. Ниже приводятся расчеты, произведенные в математическом пакете Maple (рис. 2).

Анализируя полученный фазовый портрет, можно сделать следующие выводы:

1. Характерные особенности качественного поведения рассматриваемой системы могут быть изучены в полосе $-\pi \leq x \leq \pi$ в силу периодичности по x с периодом 2π ;

2. Траектории в окрестности точек равновесия $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$ и $(-2\pi, 0)$ и т.д. демонстрируют качественное поведение, характерное для траекторий в окрестности устойчивого узла;

3. Траектории в окрестности точек равновесия $(\pi, 0)$ и $(-\pi, 0)$ и т.д. демонстрируют качественное поведение, характерное для траекторий в окрестности седловой точки.

Таким образом, фазовые портреты, полученные в рассматриваемом примере, показывают, что качественное поведение в окрестности каждой точки равновесия похоже на качественное поведение, которое наблюдается при исследовании линейных систем [1, с. 155-157].

Такое поведение вблизи точек равновесия может быть обнаружено без построения фазовых портретов исследуемой нелинейной системы. Качественное поведение системы (1) может быть определено посредством её линеаризации в окрестности точек равновесия [2, с.53-57]. Соответствующие расчёты для нахождения собственных чисел якобиана, вычисленного в точках $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$, выполнены в математическом пакете Maple (рис. 3).

Так как в точке равновесия $(0, 0)$ якобиан имеет собственные числа

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{39},$$

то эта точка является устойчивым фокусом. В точке $(\pi, 0)$ собственные числа якобиана равны

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{41}.$$

Поэтому $(\pi, 0)$ – седловая точка.

```

> restart :

> f1 := (x,y)→y:

> f2 := (x,y)→- $\frac{g}{l} \cdot \sin(x) - \frac{k}{m} \cdot y$ :

> g := 10 : l := 1 : k := 1 : m := 1 :

> System := diff(x(t),t)=f1(x(t),y(t)),diff(y(t),t)=f2(x(t),y(t)) :

> _EnvAllSolutions := true :

> res := solve({f1(x,y)=0,f2(x,y)=0},{x,y}):

                                     res := {x=π_ZI~,y=0}

> with(DEtools) : with(plots) :

> phaseportrait([System],[x(t),y(t)],t=-5..5,[ [x(0)=0.3,y(0)=0.3], [x(0)=-4,y(0)=0],
[x(0)=4,y(0)=0], [x(0)=-2,y(0)=-4], [x(0)=2,y(0)=4], [x(0)=-2.5,y(0)=0],
[x(0)=2,y(0)=0], [x(0)=-3,y(0)=0], [x(0)=3,y(0)=0], [x(0)=-3.3,y(0)=0],
[x(0)=6,y(0)=0], [x(0)=-6,y(0)=0], [x(0)=3.3,y(0)=0], [x(0)=-4.5,y(0)=0],
[x(0)=4.5,y(0)=0]],x=-8..10,y=-8..10,stepsize=.05,colour=blue,linecolor
=black);
    
```

Рис. 2

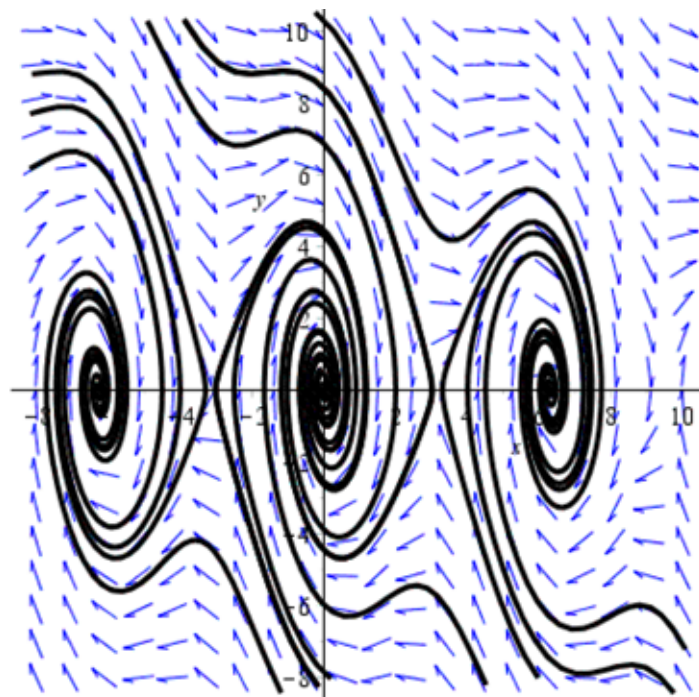


Рис. 3

Таким образом, качественное исследование точек равновесия простого маятника может быть проведено с помощью построения фазового портрета и с использованием соответствующей линеаризованной модели.

Список литературы

1. Елецких И.А. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие для вузов (Гриф УМО) / И.А. Елецких, Р.А. Мельников, О.А. Савина. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2006. – 253 с.
2. Халил Х.К. Нелинейные системы. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 832 с. – ISBN 978-5-93972-724-2.