УДК 519.71

Формирование оптимальной годовой производственной программы многономенклатурного предприятия на основе максимизации прибыли

Власова Ю.Е.
Студентка 4 курса факультета Математической экономики, статистики и информатики Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова
115998, г. Москва, Стремянный переулок д. 36, yuliavlasovaa@gmail.com

В статье рассматривается вопрос формирования производственной программы предприятия на основе максимизации прибыли в стохастические постановки задачи, основные показатели и ограничения, применяемые при использовании данного метода, а также способы реализации поставленной задачи – метод гиперболического программирования и Чарнса и Купера.

Ключевые слова: производственная программа предприятия, стохастическая постановка задачи. Гиперболического программирование, метод Чарнса и Купера.

Building of optimal annual production program multiproduct enterprise on the basis of profit maximization

Vlasova Y. E.
4 st year student Plekhanov Russian University of Economics
115998. Russia, Stremyanny lane 36, Moscow., yuliavlasovaa@gmail.com

In the article discusses the formation of the production program of the enterprise on the basis of profit maximization in the stochastic formulation of the problem, the main indicators and restrictions that apply when use this method, and some ways, which can help solve this problem - the method of hyperbolic programming and method Charnsa and Cooper.

Key words: production program of the enterprise, the stochastic formulation of the problem, hyperbolic programming, method Charnsa and Cooper.

При формировании производственной программы необходимо ориентироваться на потенциальные и фактические возможности предприятия по производству продукции, т.е. на производственную мощность и ограничения по годовому фонду имеющихся ресурсов.

Существует детерминированная и стохастическая постановки задачи планирования производственной программы предприятия. Стохастический подход к решению таких задач позволяет учитывать неопределённость в оптимизационных моделях.

Реальные прикладные задачи содержат либо некоторые неизвестные параметры, либо статистику изменения того или иного процесса. Этим они и отличаются от детерминированных задач оптимизации, которые формулируются с использованием заданных параметров.

Модели стохастического программирования используют знание распределений вероятностей для данных или их оценок. Цель здесь состоит в том, чтобы найти некоторое решение, которое является допустимым для всех (или почти всех) возможных значений данных и максимизируют математическое ожидание некоторой функции решений и случайных переменных. В общем, такие модели формулируются, решаются аналитически или численно, их результаты анализируются, чтобы обеспечить полезную информацию для лиц, принимающих решения.

Рассмотрим исходные данные

Таблица 1 Исходные данные по производимым продуктам

Название показателя	Значения показателей для изделий	
	i=1	*i*=2
Себестоимость	15	20
Стоимость основных производственных фондов	3000	

Емкость рынка по изделию 1 составляет 16 единиц

Прибыль по изделиям	Статистика изменения прибыли								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
i=1	26	30	31	32	29	32	33	37	34
i=2	35	34	36	39	37	41	34	33	38

Таблица 2 Ограничения на использование ресурсов

Ресурсы	Удельные затраты ресурсов		
	j=1	*j*=2	Годовой фонд ресурса
Механический цех	10	16	280
Гальванический цех	16	8	280

В рамках статьи рассмотрим постановку оптимизационной задачи годовой производственной программы многономенклатурного предприятия на основе максимизации прибыли.

Общий вид оптимизационной задачи в детерминированной постановке с дробно-линейной целевой функцией и линейными ограничениями имеет следующий вид:

$$F(x) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{h_0 + \sum_{i=1}^{n} h_i x_i}{q_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i x_i} \to max$$

$i = \overline{1, n},$ виды продукции

$j = \overline{1, m},$ виды ресурса

a_{ij} − норма затрат j ресурса при производстве i вида продукции;

x_j — искомый объем производства;
b_j — располагаемый годовой объем ресурсов j вида;
E_i — емкость рынка, которую определяет отдел маркетинга для i типа продукции;
D_i — объем обязательного производства i вида продукта в соответствии с заключенным договором;
$a_{ij}x_i$ — потребность в объеме j вида ресурса для производства продукции i вида;

Ограничения:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \le b_j, \qquad j = 1,2,\dots,m$$

$$x_i \le E_i, i = 1,2,\dots,n$$

$$x_i \ge D_i, i = 1,2,\dots,n$$

$$x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,n$$

Эквипотенциали гиперболической функции в пространстве E_2 — прямые, образующиеся вокруг некоторой точки. Для целевой функции

$$F(x) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{h_0 + \sum_{i=1}^{n} h_i x_i}{q_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i x_i} \to max$$

Такой точкой будет начало координат. Выражая из последнего уравнения x_2, получим $x_2 = \theta x_1$, где $\theta = \frac{h_1 - Fq_1}{Fq_{2-}h_2}$. Уравнение $x_2 = \theta x_1$ геометрически представляется прямой, проходящей через начало координат. При изменении значения F будет изменяться и θ, и прямая повернется вокруг начала координат. Чтобы установить поведение углового коэффициента θ при монотонном возрастании, необходимо взять производную от θ по F:

$$\frac{\partial\theta}{\partial F} = \frac{h_2 q_1 - h_1 q_2}{(Fq_{2-}h_2)^2}$$

Знаменатель производной всегда положителен, а числитель не зависит от θ. Поэтому, знак производной постоянен, и угловой коэффициент будет либо только возрастать, либо только убывать, а прямая будет производить вращение только в одну сторону. Оптимум достигается в одной из вершин многогранника допустимых решений.

Эффективность использования тех или иных ресурсов для производства продукции является величиной случайной. Поэтому, необходимо максимизировать вероятность того, что прибыль от производства на типе j цеха будет равна или больше заданной величине R.

Тогда задачу можно записать в виде:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i \ge \mathrm{R}\right) \to max.$$

При ограничениях на производственные возможности:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leq b_j, j = 1,2,\ldots,n$$
$$x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n, \text{ где}$$
$x_i -$ производство продукции на $i -$ м цехе, $i = 1,2,\ldots,n$;
$a_{ij} -$ удельные затраты $j -$ го ресурса в $i -$ м цехе ($j = 1,2,\ldots,m$);
$b_j -$ фонд $j -$ го ресурса;

Задачу в вероятностной постановке можно свести к детерминированному эквиваленту. Допустим, прибыль от эксплуатации определяется по формуле: $R_i = R_i^0 + R_i^1\tau(\omega)$, $\tau(\omega)$ –случайная величина.

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i \geq Ɍ\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n}(R_i^0 + R_i^1\tau(\omega))x_i \geq Ɍ\right) == P\left(\tau(\omega) \geq \frac{Ɍ - \sum_{i=1}^{n} R_i^0 x_i}{\sum_{i=1}^{n} R_i^1 x_i \geq}\right) \to min$$

при ограничениях $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leq b_j, j = 1,2,\ldots,n$ и $x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n$

Получим исходя из статистики распределения прибыли. За R_i^0 примем минимальное значение прибыли по каждому изделию, а R_i^1 – среднее отклонение значений прибыли от средней величины по каждому изделию. Тогда получим:

Таблица 3 Численные значения прибыли

Номер изделия	Составляющие расчета прибыли	
	R^0	R^1
1	26	2,272
2	33	2,148

Численное выражение поставленной задачи имеет вид:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3000 - 26x_1 - 33x_2}{2,272x_1 + 2,148x_2} \to min}$$
$$10x_1 + 16x_2 \leq 280$$
$$16x_1 + 8x_2 \leq 280$$
$$x_1 \leq 16,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Для получения оптимального плана производства в поставленной выше задаче необходимо изучить алгоритмы выбранных методов поиска решения.

Первым из них является метод гиперболического программирования. Метод основан на использовании симплексной техники пересчета и специальном выборе разрешающего столбца. Ограничения поставленной задачи записываются в решающую матрицу обычным образом и дополняются базисом. Также симплекс таблица предусматривает еще три дополнительных строки: вторая и третья – это коэффициенты, стоящие в числители и знаменатели соответственно. В первой строке фиксируются признаки оптимальности. Если в исходной задаче знаменатель отличен от нуля, можно переходить к решению. Если же знаменатель обращается в ноль, необходимо сделать шаг модифицированных жордановский исключений для того, чтобы получить опорный план решения задачи. Признаки оптимальности λ_j $(j = 1,2,\ldots,n)$ рассчитываются по формуле $\boldsymbol{\lambda_i = h_i z_2 - q_i z_1}$.

Разрешающий столбец определяется по правилу $\lambda_r = \min_{j=1,2,\dots,n} \{\lambda_j\}$. Выбор разрешающего элемента в столбце r проводится обычным образом – по минимальному симплекс отношению. Симплекс-таблица (за исключением первой строки) пересчитывается по рекуррентным формулам. Признаки оптимальности пересчитываются по формулам выше после пересчета остальных элементов. Критерием окончания процесса является $\lambda_i \geq 0$, $\forall\ i = 1,2, \dots, n$ [1, 274-275].

Таблица 4 Исходная симплекс-таблица решения задачи оптимизации методом гиперболического программирования

	Свободные перменные	Основные переменные		Дополнительные переменные		
признаки оптимальности	F(x)=0	x1	x2	y1	y2	y3
	0	0	0	0	0	0
Базис	3000	26	33	0	0	0
	0	2,272	2,148	0	0	0
y1	280	10	**16**	1	0	0
y2	280	16	8	0	1	0
y3	16	1	0	0	0	1

В точке $x^0 = (0{,}0; 0{,}0)^T$ целевая функция не существует. Поэтому необходимо сделать шаг жордановых исключений и перейти в такую вершину выпуклого многогранника, образованного ограничениями выше, где функция $f(x)$ существует. Применив правило $\min_{j=1,2,\dots,n} \left\{\frac{R_j^0}{R_j^1}\right\} = \min\left\{\frac{-26}{2{,}272}, \frac{-33}{2{,}148}\right\} = \min\{-11{,}444; -15{,}363\}$, получаем, что разрешающий столбец – второй. Определяя по минимальному симплекс отношению разрешающий элемент, производится пересчет таблицы по рекуррентным формулам, и получаем следующую симплекс-таблицу.

Таблица 5 Промежуточная симплекс-таблица методы гиперболического программирования

признак оптимальности	f(x)=0	x1	x2	y1	y2	y3
	-64,4408867	-2452,6	0	402,778	0	0
Базис	2422,5	5,375	0	-2,0625	0	0
	-37,59259259	0,92901	0	-0,1343	0	0
x2	17,5	0,625	1	0,0625	0	0
y2	140	**11**	0	-0,5	1	0
y3	16	1	0	0	0	1

В найденной точке $x_2 = 17{,}5$ и $x_1 = 0{,}0$ функция существует, и можно определить признаки оптимальности (верхняя строка полученной симплекс-таблицы). Разрешающий столбец с отрицательным числом -2452,6. Найдя в этом столбце разрешающий элемент (11) и пересчитав симплекс-таблицу, получаем следующую таблицу.

Таблица 4 Промежуточная симплекс-таблица методы гиперболического программирования

признак оптимальности	f(x)=0	x1	x2	y1	y2	y3
	-47,6379	0	0	**306,4983**	**222,9630**	0
Базис	2354,0909	0	0	-1,8182	-0,4886	0
	-49,4164	0	0	-0,0920	-0,0845	0
X2	**9,5455**	0	1	0,0909	-0,0568	0
X1	**12,7273**	1	0	-0,0455	0,0909	0
y3	3,2727	0	0	0,0455	-0,0909	1

Признаки оптимальности последней симплекс-таблицы положительны, следовательно, получено оптимальное решение поставленной задачи: $x_1^* = 12{,}727$ и $x_2^* = 9{,}546$. Значение целевой функции получим, подставив получившиеся значения x_1^* и x_2^* или сменив знак у величины, стоявшей в правом верхнем углу симплекс-таблицы: f (x^*) = 47,638.

Если учесть возможность выпуска продукции только в целых количествах, получим следующий результат: $x_1^* = 12$ и $x_2^* = 9$, $f\ (x^*)\ = 56{,}17$.

Второй метод, который применяется для решения задач с дробно-линейной функций, метод Чарнса и Купера.

Задача, представленная в стандартном виде как:

В исходном виде задача представлена следующим образом:

$$Z = \frac{c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{d_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \to \max; (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \ a_i, (i = \overline{1,m});\ (2)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,n}); (3)$$

Кроме того, предполагается, что в области неотрицательных решений системы уравнений (2) имеет место $d_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j > 0$.

Примем обозначение:

$$y_0 = \frac{1}{d_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j}\ (*)$$

И получим новые переменные:

$$y_j = y_0 x_j, (j = \overline{1,n}) \text{ или } x_j = \frac{y_j}{y_0}\ (**)$$

Из выражения (*) имеем: $y_0 d_0 + y_0 \sum_{j=1}^{n} d_j x_j = 1$.

Подставим в это выражение $x_j = \frac{y_j}{y_0}$.

Получим $y_0 d_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1$.

Теперь исходная задача приобретает следующий вид:

$$F^* = c_0 y_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \to \max;$$

$$-a_0 y_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0, (i = \overline{1,m});$$

$$y_0 d_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1$$

$$y_j \geq 0, (j = \overline{1,n});$$

$$y_0 \geq 0.$$

Для реализации метода Чарнса и Купера введем новую переменную:

$$y_0 = \frac{1}{2{,}272x_1 + 2{,}148x_2}$$

Заменим: $y_1 = x_1 y_0, y_2 = x_2 y_0$ или $x_1 = \frac{y_1}{y_0}$, $x_2 = \frac{y_2}{y_0}$

Тогда $y_0\,(2{,}272x_1 + 2{,}148x_2) = 1$. Подставив в равенство x_1 и x_2 получим: $2{,}272\,y_1 + 2{,}148y_2 = 1$.

Теперь исходная задача приобретает следующий вид:

$$f(x) = 3000y_0 - 26y_1 - 33y_2$$

$$-280y_0 + 10y_1 + 16y_2 \leq 0$$

$$-280y_0 + 16y_1 + 8y_2 \leq 0$$

$$-16y_0 + y_1 \leq 0$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$2{,}272\,y_1 + 2{,}148y_2 = 1$$

Решая систему выше, используя Microsoft Excel 2010 (надстройку: поиск решения), получаем следующее решение эквивалетной задачи: $x_1^* = 12{,}727$ и $x_2^* = 9{,}546$, f (x^*) =47,638.

Если учитывать, что продукция выпускается в целых величинах, то получаем: $x_1^* = 12$ и $x_2^* = 9$, $f\ (x^*)\ =\ 56{,}17$.

После того как проведены численные расчеты методом гиперболического программирования и методом Чарнса и Купера можно сделать вывод о том, что оба они привели к одному и тому же результату, а именно: $x_1^* = 12{,}727$ и $x_2^* = 9{,}546$, f(x^*) =47,638. В целых значениях: $x_1^* = 12$ и $x_2^* = 9$, $f\ (x^*)\ =\ 56{,}17$.

Оба метода схожи в реализации, оба имеют несколько итераций, результатом проведения которых является оптимальное решение поставленной задачи.

Метод гиперболического программирования имеет ряд преимуществ, например, на каждом шаге заметно, как изменяется значение целевой функции и т.д. Его несложно реализовать для задачи, когда компания реализует небольшое количество продуктов и необходимо оптимизировать их производство. С увеличением размерности, будет усложняться реализация каждой итерации, увеличиваться время на нее. Так же ошибившись на любом шаге с выбором разрешающего столбца или элемента, можно увеличить число итераций в рамках реализации задачи.

Однако, по- моему мнению, метод Чарнса и Купера проще реализовать, он может быть применен к задаче любой размерности и решение данным способом можно получить, используя простейшие компьютерные продукты, например Microsoft Excel. В результате мы получаем оптимальное решение поставленной задачи, применив лишь набольшие усилия на первом шаге по приведению задачи к линейному виду.

Список используемой литературы

1. Закревская Е. А., Подходы и методы оценки стоимости компании в условиях рыночной экономики// Ученые записки российской академии предпринимательства 2009 № XVII. С. 168-177.
2. Лапшина Е.А., Савинова В.М., Анализ продуктов IBM для решения задач информационной бизнес-аналитики// Научные труды Вольного экономического общества России. 2012. Т. 164. С. 333-338.