

УДК 517.938

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭРЕДИТАРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ-ДУФФИНГА

Новикова Е.Р.

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга (683032, Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, д. 4), E-mail: elizaveta_333@mail.ru

В работе предложена новая математическая модель осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга с внешним периодическим воздействием с учетом эредитарности. Эредитарность или эффект памяти в динамической системе определяет зависимость текущих ее состояний от предыдущих и описывается с помощью интегро-дифференциальных уравнений. В работе рассмотрен специальный класс интегро-дифференциальных уравнений – уравнений с производными дробных порядков. Одно из таких уравнений, характеризующее нелинейные колебания Ван дер Поля-Дуффинга, будет являться объектом нашего исследования. Предложен алгоритм нахождения численного решения исходного модельного уравнения, который основан на конечно-разностной схеме. Разработана компьютерная программа, реализующая этот алгоритм. С помощью программы построены осциллограммы и фазовые траектории для эредитарного осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга в зависимости от различных значениях управляющих параметров.

Ключевые слова: осциллятор Ван дер Поля-Дуффинга, эредитарность, конечно-разностная схема, фазовые траектории, осциллограммы.

MATHEMATICAL MODEL HEREDITARITY VAN DER POL-DUFFING OSCILLATOR

Novikova E.R.

Vitus Bering Kamchatka State University (683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya Street, etc. 4), E-mail: elizaveta_333@mail.ru

The paper presents a new mathematical model of the van der Pol oscillator, Duffing with external periodic influence given heredity. Heredity or memory effect in a dynamic system determines the dependence of the current state of its past and described by means of integral-differential equations. In this paper, we consider a special class of integro-differential equations - equations with derivatives of fractional order. One of these equations characterizing nonlinear oscillations Van der Pol-Duffing, will be the object of our study. An algorithm for finding the numerical solution of the original model equation, which is based on the finite-difference scheme. A computer program implementing this algorithm. With this program built waveform and the phase trajectories for heredity oscillator Van der Pol-Duffing depending on the different values of the control parameters.

Keywords: Van der Pol-Duffing oscillator, heredity, finite-difference scheme, phase trajectories, waveform.

Введение. Эредитарные процессы представляют особый интерес в связи с различными приложениями. Например, в монографии В.В. Учайкина [1] эредитарным процессам посвящена целая глава, там же приведен пример эредитарного осциллятора, который был впервые изучен итальянским математиком В. Вольтерра, а результаты исследований были приведены в его работе [2]. Эффект последствия или эредитарности характеризует зависимость текущего состояния системы от ее предыдущих состояний, необязательно от всех. Математическое описание эффекта памяти дается интегро-дифференциальным уравнением, при чем ядро этого уравнения называется функции памяти. В случае, когда функция памяти имеет степенной вид интегро-дифференциальное уравнение переходит в уравнение с производными дробных порядков, которые изучаются в рамках теории дробного исчисления [3].

Некоторые эредитарные динамические системы были описаны в монографиях [4,5]. В работе рассмотрена модель осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга с учетом эредитарности, которая была решена с помощью конечно-разностной схемы. С помощью численного решения в зависимости от различных значений управляющих параметров были построены осциллограммы и фазовые траектории.

Постановка задачи и методика решения. Модель Ван-дер-Поля – Дуффинга (ВПД) в присутствии периодического внешнего воздействия описывается уравнением:

$$\ddot{x}(t) - (\lambda - x^2(t))\dot{x}(t) + x(t) + \zeta x^3(t) = c \sin(\omega t), \quad (1)$$

где λ – управляющий параметр, ω – частота, а c – амплитуда внешнего воздействия, ζ – параметр фазовой нелинейности, определяющий не изохронность колебаний. Заметим, в уравнении (1) присутствуют нелинейности характерные для осцилляторов Ван дер Поля [6] и Дуффинга [7]. Квадратичная нелинейность в коэффициенте при младшей производной, характеризует автоколебания, а кубическая нелинейность – зависимость периода колебаний от амплитуды.

Для уравнения (1) введем начальные условия:

$$x(0) = \xi, \dot{x}(0) = \eta. \quad (2)$$

Задача (1), (2) является классической дифференциальной задачей Коши для уравнения ВПД. Введем эредитарность в уравнение (1). Для этого рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение ВПД:

$$\int_0^t K_1(t-\tau)\ddot{x}(\tau)d\tau - (\lambda - x^2)\int_0^t K_2(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau + x(t) + \zeta x^3(t) - c \sin(\omega t) = 0, \quad (3)$$

где $K_1(t - \tau)$ и $K_2(t - \tau)$ – функции памяти, характеризующие эредитарность.

Отметим, что если функции памяти представляют собой дельта-функции, тогда в системе отсутствует эредитарность. Если функции памяти представляют собой функции Хэвисайда тогда система обладает полной памятью. Если функции памяти являются степенными функциями, например,

$$K_1(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)}, K_2(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{-\beta}}{\Gamma(1 - \beta)}, \quad (4)$$

где $\Gamma(t)$ - гамма-функция Эйлера, тогда говорят, что система - с частичной "потерей памяти".

Подставим функции памяти (4) в интегро-дифференциальное уравнение (3). В результате получим:

$$\frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_0^t \ddot{x}(\tau) d\tau - \frac{(\lambda - x^2)}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau + x(t) + \zeta x^3(t) - c \sin(\omega t) = 0. \quad (5)$$

Мы получили интегро-дифференциальное уравнение специального вида. Если обратиться к определению производной дробного порядка по Капуто, то мы приходим к уравнению с дробными производными следующего вида:

$$\partial_{0t}^\alpha x(\tau) - (\lambda - x^2(t)) \partial_{0t}^\beta x(\tau) + x(t) + \zeta x^3(t) - c \sin(\omega t) = 0, \quad (6)$$

где дробные дифференциальные операторы равны

$$\partial_{0t}^\alpha x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_0^t \ddot{x}(\tau) d\tau, \partial_{0t}^\beta x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau,$$

определенные в смысле Герасимова-Капуто с дробными порядками $1 < \alpha < 2, 0 < \beta < 1$.

Можно отметить, что в предельном случае ($\alpha = 2, \beta = 1$) уравнение (6) переходит в классическое уравнение ВПД (1), поэтому можно считать уравнение (1) частным случаем обобщения уравнения (6). Интегро-дифференциальное уравнение ВПД (6) будем называть дробным, или фрактальным уравнением, а процесс, которые оно описывает, будем называть фрактальными, или эредитарными.

Отметим, что функции памяти в интегро-дифференциальном уравнении (5) могут быть отличными от степенных функций, что приводит к другим интегро-дифференциальным уравнениям.

Задача Коши (2), (6) в общем виде не имеет точного решения в силу того, что модельное уравнение является нелинейным, поэтому надо использовать численные методы для ее решения. В качестве численного метода возьмем метод конечно-разностных схем, так как его легко можно реализовать в любой компьютерной среде.

Будем рассматривать равномерную сетку. Для этого разобьем временной интервал $[0, T]$ на N равных частей. В результате получим равномерную сетку $t_j = j\tau$, где шаг сетки $\tau = T/N$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. Значения искомой функции $x(t_j) = x_j$, будем называть ее сеточной функцией. Аппроксимация дробных операторов задачи Коши (6) осуществляется следующим образом [5]:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(\tau) \approx \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} a_j \cdot (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}), a_j = (j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha},$$

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\tau) \approx \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} b_j \cdot (x_{k-j+1} - 2x_{k-j}), b_j = (j+1)^{1-\beta} - j^{1-\beta}.$$

Подставим эти аппроксимации в модельное уравнение (6). Приходим к следующей конечно-разностной задаче:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \xi + \tau\eta, k = 0, \\ x_2 = \frac{1}{A - B(\lambda - x_1^2)} \left[(2A - B(\lambda - x_1^2) - 1) \cdot x_1 - \zeta x_1^3 - Ax_0 + c \sin(\omega\tau) \right], k = 1 \\ x_{k+1} = \frac{1}{A - B(\lambda - x_k^2)} \left((2A - B(\lambda - x_k^2) - 1) \cdot x_k - \zeta x_k^3 - Ax_{k-1} + c \sin(\omega k\tau) + \right. \\ \left. + B(\lambda - x_k^2) \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (b_j (x_{k+1} - x_k)) - A \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (a_j (x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1})) \right), \\ A = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}, B = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}, k = 2, \dots, n-1. \end{array} \right. \quad (7)$$

Отметим, что дифференциальная задача Коши (2), (6) является жесткой при больших значениях управляющего параметра λ , поэтому явная конечно-разностная схема (7) будет работать в случае уменьшение шага сетки τ . Оценка шага τ - это отдельная задача, фактически связанная с качественными свойствами схемы (7) - устойчивостью и сходимостью и в настоящей работе не рассматривалась. Будем считать, что значения параметра λ достаточно малы для того, чтобы в процессе вычислений не уменьшать шаг сетки τ , т.е. будем рассматривать лишь «мягкую» задачу Коши (2) и (6).

Результаты моделирования и их обсуждение. Рассмотрим различные примеры работы конечно-разностной схемы (8). Построим осциллограммы и фазовые траектории в зависимости от различных значений управляющих параметров нелинейной эрдитарной колебательной системы ВДП.

Пример 1. (Изменение параметра α). Значения управляющих параметров выберем следующими: $T = 100, N = 2000, \tau = 0.05, c = 5, \omega = 3, \zeta = 2.5, \lambda = 0.3, \beta = 0.9, x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.1$.

На рис. 1 приведены осциллограммы для примера 1, при различных значениях дробного параметра α : $\alpha = 1.9, \alpha = 1.7, \alpha = 1.5, \alpha = 1.3$.

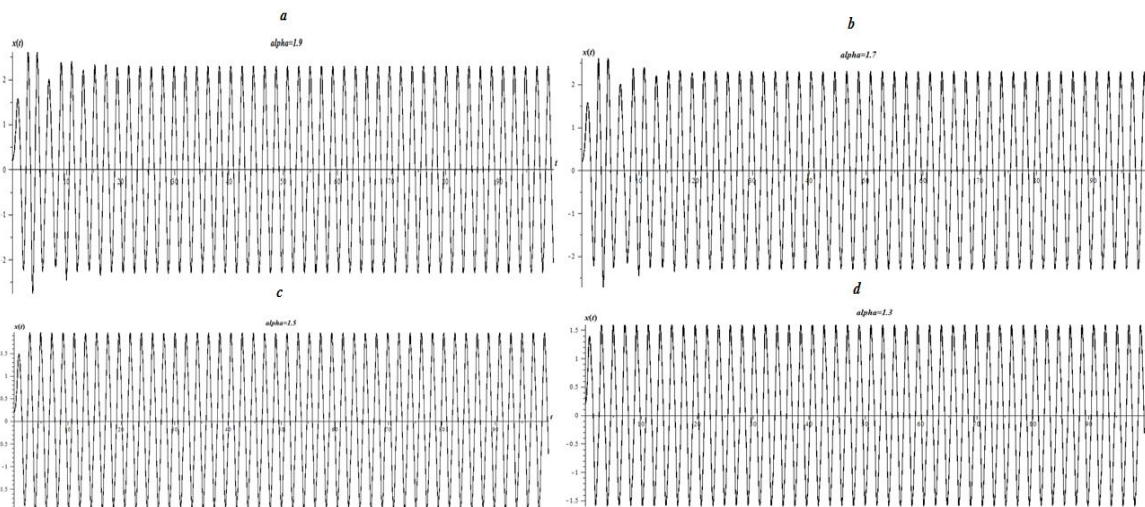


Рис. 1. Осциллограммы, построенные по схеме (8) для примера 1 при различных значениях α

Из рис. 1 видно, что при уменьшении значения дробного параметра α , амплитуда колебаний быстрее выходит на постоянный уровень. Этот факт также подтверждают фазовые траектории (рис. 2), которые выходят на соответствующие предельные циклы.

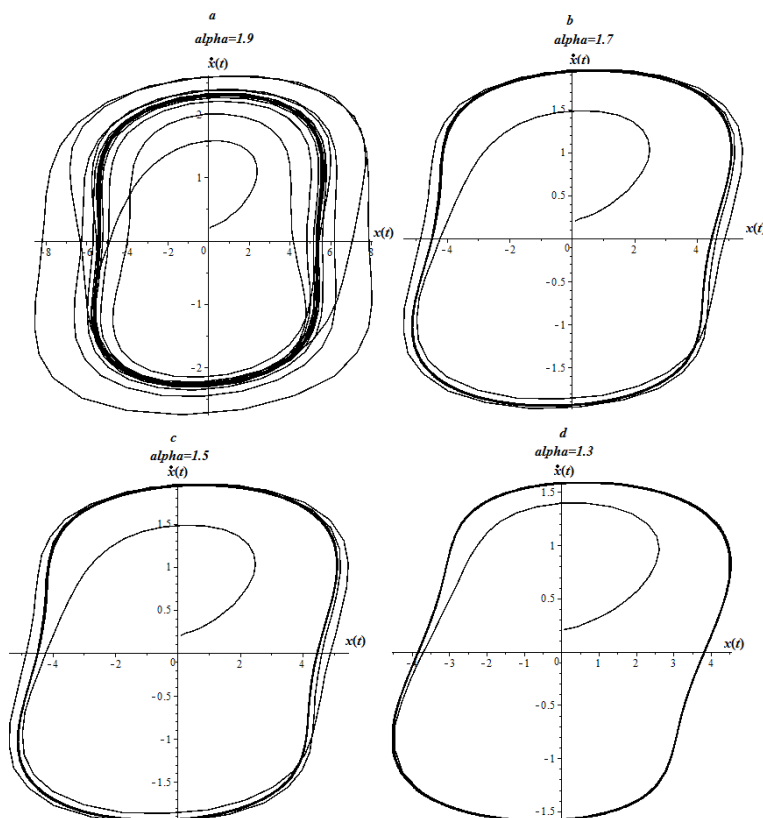


Рис. 2. Фазовые траектории, полученные по схеме (8) для примера 1 при различных значениях α

Пример 2. (Изменение параметра β). Значения управляющих параметров выберем следующими: $T = 100, N = 2000, \tau = 0.05, c = 5, \omega = 3, \zeta = 2.5, \lambda = 0.3, \alpha = 1.9, x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.1$.

На рис. 2 приведены осциллограммы для примера 2, при различных значениях дробного параметра β : $\beta = 0.9, \beta = 0.7, \beta = 0.5, \beta = 0.3$.

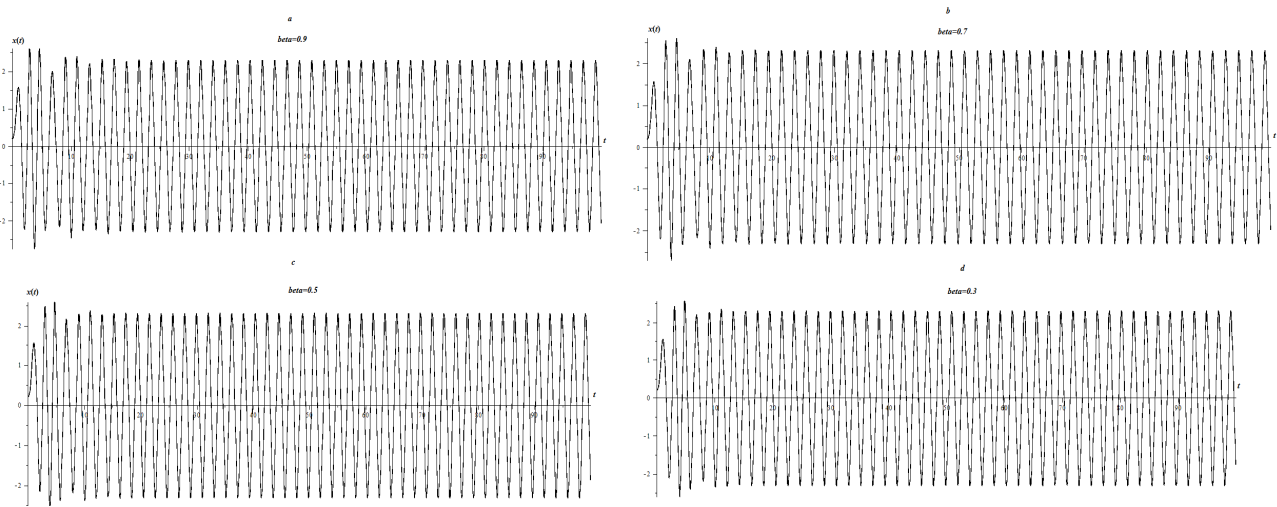


Рис. 3. Осциллограммы, построенные по схеме (8) для примера 2 при различных значениях β

Из рис. 3 мы можем заметить, что уменьшение значений дробного параметра β существенного изменения в форму осциллограмм не вносит. Колебания со временем выходят на установившийся режим с постоянной амплитудой. Поэтому можно сделать вывод, что фазовые траектории выходят практически на один и тот же предельный цикл (рис. 4).

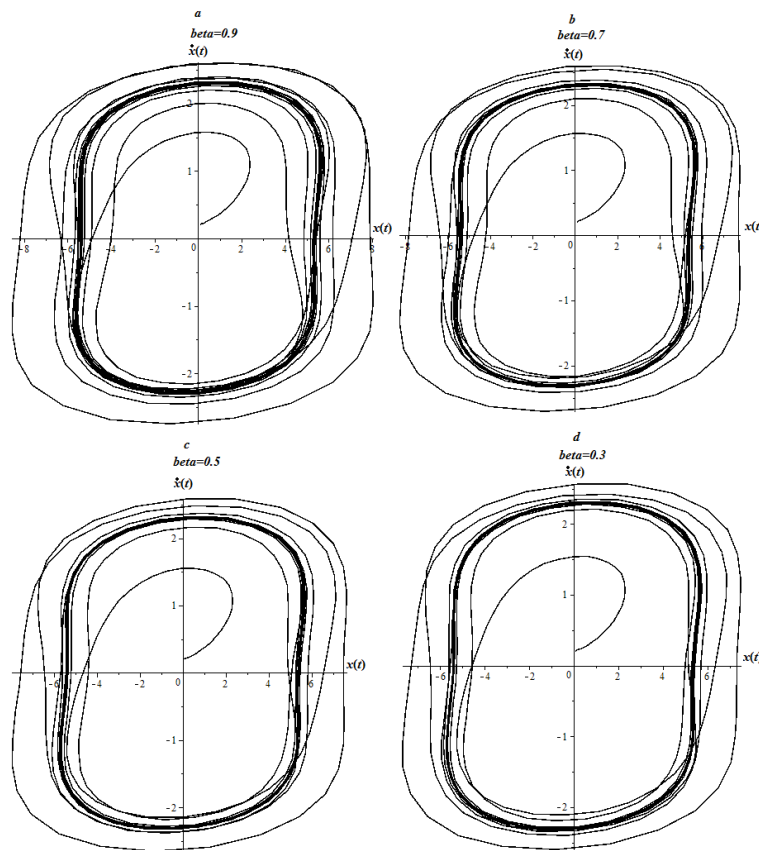


Рис. 4. Фазовые траектории, полученные по схеме (8) для примера 2 при различных значениях β

Пример 3. (Изменение параметра c). Значения управляющих параметров выберем следующими: $T = 100, N = 2000, \tau = 0.05, \omega = 3, \zeta = 2.5, \lambda = 0.3, \alpha = 1.9, \beta = 0.9, x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.1$.

На рис. 5 приведены осциллограммы для примера 3, при различных значениях амплитуды внешнего воздействия c : $c = 0, c = 50, c = 100, c = 200$.

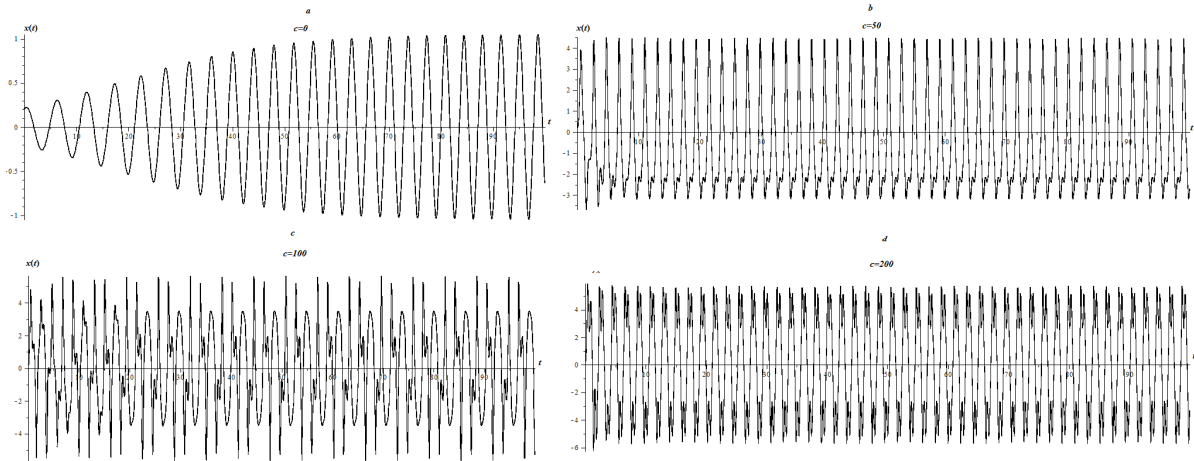


Рис. 5. Осциллограммы, построенные по схеме (8) для примера 5 при различных значениях c

Из рис. 5 видно, что отсутствие внешнего воздействия (рис.5а) приводит к росту амплитуды и начиная с некоторого момента времени ее значения выходят на постоянный уровень. Далее мы видим сложные по форме колебания, которые по-видимому, говорят о возможности много периодических решений задачи Коши (2) и (6). Это косвенно подтверждают соответствующие фазовые траектории (рис. 6).

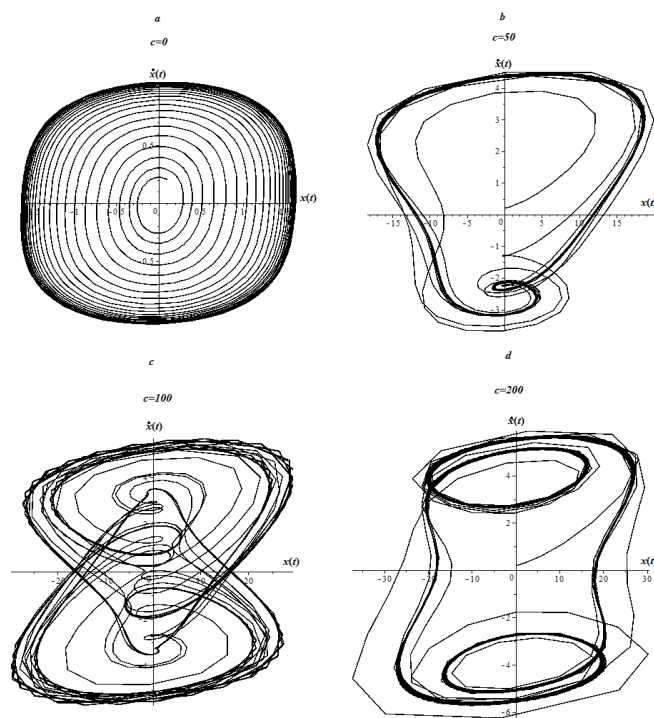


Рис. 4. Фазовые траектории, полученные по схеме (8) для примера 5 при различных значениях c . В заключении хочется отметить, что наличие различных колебательных режимов эредитарного осциллятора ВПД, требует дальнейшего его изучение. Например, интерес представляет построение карт динамических режимов и сечений Пуанкаэре с целью классификации периодических решений, а также устойчивости точки покоя [8]. Другое направление исследований заключается в изучение качественных свойств конечно-разностной схемы (8) [9], а также жесткости задачи Коши (2), (6). Так же справедливо дальнейшее обобщение задачи Коши (2), (6) в случае функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ по аналогии с работами [9,10].

Автор выражает благодарность научному руководителю, к.ф.-м.н., профессору РАЕ, Р.И. Паровику за ценные советы и замечания по содержанию данной научной статьи.

Список литературы

1. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
2. Volterra V. Sur les 'equations int'egro-differentielles et leurs applications // Acta Mathematica. 1912. Vol. 35, no. 1. P. 295-356.
3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
4. Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 218 p.
5. Паровик Р.И. Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга. 2015. 178 с.

6. Паровик Р.И. Математическая модель фрактального осциллятора Ван-дер-Поля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. № 2. С. 57-62.
7. Паровик Р.И. Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. №1(10). С. 18-24.
8. Паровик Р.И. Об исследовании устойчивости эредитарного осциллятора Ван дер Поля // Фундаментальные исследования. 2016. №3-2. С. 283-287.
9. Parovik R.I. Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable order fractional derivatives // Archives of Control Sciences. 2016. vol. 26. no 3. pp. 429-435.
10. Паровик Р.И. Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками // Вестник КРАУНЦ. Физико-математический. 2015. № 2(11). С. 88-85.