

УДК 517.9

## УРАВНЕНИЕ РИККАТИ С ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА

Твёрдый Д.А.

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга (683032, Россия, Камчатский край, Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4), e-mail: diplomat95@mail.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение Риккати с дробной производной переменного порядка. Введение производной дробного переменного порядка в исходное уравнение определяет свойство среды – эффект памяти или эрeditарность, который заключается в зависимости текущего состояния динамической системы от предыдущих ее состояний. Эрeditарное уравнение Риккати было решено численно с помощью аппроксимации дробной производной конечной разностью. Далее реализация численного алгоритма сводилась к решению системы квадратных уравнений. Выбирая порядок дробной производной как некоторую функцию от времени, было построено семейство расчетных кривых, а также фазовые траектории. Были получены новые режимы распределений, которые зависят от конкретного вида переменного порядка дробной производной. Показано, что некоторые кривые распределений характерны для других эрeditарных динамических систем.

Ключевые слова: уравнение Риккати, дробная производная, эрeditарность, численные методы, дифференциальное уравнение.

## RICCATI EQUATION WITH VARIABLE ORDER OF FRACTIONAL DERIVATIVE

Tvyordyj D.A.

Vitus Bering Kamchatka State University (683032, Russia, Kamchatka region, Petropavlovsk-Kamchatsky, str. Pogranichnaya 4), e-mail: diplomat95@mail.ru

We consider the Riccati differential equation with a fractional derivative of variable order. The introduction of a derivative of a fractional variable order into the initial equation determines the property of the medium - the memory effect or the heredity, which consists in the dependence of the current state of the dynamic system on its previous states. The hereditary Riccati equation was solved numerically by using the fractional derivative of a finite difference. Further, the implementation of the numerical algorithm was reduced to solving a system of quadratic equations. Choosing the order of the fractional derivative as a function of time, a family of calculated curves was constructed, as well as phase trajectories. New distribution regimes have been obtained, which depend on the particular form of the variable order of the fractional derivative. It is shown that some distribution curves are characteristic of other hereditary dynamical systems.

Keywords: Riccati equation, fractional derivative, heredity, numerical methods, differential equation.

**Введение.** Дифференциальные уравнения дробных порядков представляют большой интерес для исследования, так как часто находят свое применение во многих областях, таких как: математика, физика и др. [1,2]. Уравнения с производными дробного порядка принадлежат классу интегро-дифференциальных уравнений и называются по терминологии В. Вольтерра эредитарными [3]. Понятие эредитарности означает наличие в рассматриваемом процессе эффекта памяти или нелокальности по времени. Нелокальность по времени содержится в ядре интегрального оператора исходного уравнения и называется функцией памяти. В случае, когда функция памяти является степенной, то мы естественным образом переходим к уравнениям с дробными производными, которые изучаются в рамках дробного исчисления [4].

В работе объектом нашего исследования будет уравнение Риккати [5] с учетом эредитарности. Эредитарность в уравнение Риккати характеризуется производной дробного переменного порядка. Отметим, что в работе [6] авторы исследовали эредитарное уравнение Риккати, когда порядок дробной производной является константой.

**Постановка задачи и метод решения.** Рассмотрим следующее эредитарное уравнение [1]:

$$\int_0^t K(t-\tau) \dot{u}(\tau) d\tau + u^2(t) - 1 = 0, \quad (1)$$

где  $K(t-\tau)$  - функция памяти,  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$  - время моделирования,  $u(t)$  - функция решения. Уравнение (1) является аналогом классического уравнения Риккати [5] и оно учитывает эффект памяти.

Если функция памяти  $K(t-\tau)$  представляет собой функцию Хевисайда, то мы можем говорить, что процесс обладает полной памятью, если это функция Дирака, то память отсутствует. Поэтому мы рассмотрим функцию памяти  $K(t-\tau)$  в виде степенной функции:

$$K(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{-\alpha(t)}}{\Gamma(1-\alpha(t))}, \quad 0 < \alpha(t) < 1, \quad (2)$$

где  $\Gamma(1-\alpha(t))$  - гамма-функция (функция Эйлера).

Процессы с функцией памяти вида (2) называются процессами с частичной потерей памяти и заслуживают особого внимания в их изучении. Это связано с тем, что многие естественные процессы имеют степенные законы распределения, которые в большинстве случаев приводят к понятию фрактальности или фракталу [7].

Подставив функцию памяти (2) в эредитарное уравнение (1) мы приходим к следующему интегро-дифференциальному уравнению Риккати:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}} d\tau + u^2(t) - 1 = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) введем следующее обозначение:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}} d\tau, \quad (4)$$

которое является обобщением дробного оператора Капуто или Герасимова-Капуто.

Необходимо отметить, что существуют другие определения производной дробного переменного порядков [8]. Мы же остановимся на определении (4), поэтому уравнение (3) запишем в компактной форме:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau) + u^2(t) - 1 = 0, \quad (5)$$

для которого справедливо начальное условие:

$$u(0) = \varphi, \quad (6)$$

где  $\varphi - \text{const}$ .

Поэтому постановка задачи для эредитарного уравнения Риккати в нашем случае свелась к задаче Коши (5) и (6).

Заметим, что в случае, когда  $\alpha(t) - \text{const}$ , мы приходим к задаче Коши, рассмотренной в работе [6], если  $\alpha(t) = 1$ , то задача Коши (5) и (6) переходит в классическую задачу Коши для уравнения Риккати [5].

Задача Коши (5) и (6) в общем случае не имеет точного решения, поэтому мы будем использовать численные методы для ее решения. Для этого разобьем временной отрезок  $t \in [0, T]$  на  $N$  равных частей, где  $k = T/N$  - шаг дискретизации, и получим что  $t_i = ik, i = 0, \dots, N-1$ , а функция решения  $u(t_i) = u_i$ . Аппроксимацию дробной производной (4) проведем согласно работе [9] в виде:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau) \approx \sigma_{\alpha_i, k} \sum_{j=1}^i \omega_{j, \alpha_i} (u_{i-j+1} - u_{i-j}), i = 1, \dots, N-1, \quad (7)$$

где  $\sigma_{\alpha_i, k} = \frac{k^{-\alpha_i}}{\Gamma(2-\alpha_i)}$ ,  $\omega_{j, \alpha_i} = j^{1-\alpha_i} - (j-1)^{1-\alpha_i}$ . Можно показать, что аппроксимация (7) имеет

первый порядок. Интегро-дифференциальную задачу Коши (5) и (6) можно переписать в разностной постановке:

$$\sigma_{\alpha_i, k} \sum_{j=1}^i \omega_{j, \alpha_i} (u_{i-j+1} - u_{i-j}) = 1 - u_i^2, u_0 = \varphi. \quad (8)$$

Мы получили систему нелинейных алгебраических уравнений, которая была решена в системе компьютерной математики Maple в зависимости от вида функции  $\alpha(t)$ .

**Результаты моделирования их обсуждение.** Рассмотрим следующие примеры численного решения задачи Коши (5) и (6) в зависимости от различных представлений функции  $\alpha(t)$  и значений управляющих параметров.

**Пример 1.** Рассмотрим сначала случай, исследованный в работе [6], когда параметр  $\alpha(t)$  является константой. Значения управляющих параметров выберем следующими:  $t \in [0,3]$ ,  $N = 1000, k = 0.003, \varphi = 0.2$ . Построим на одном графике несколько расчетных кривых, соответствующих различным значениям  $\alpha$  (рис. 1).

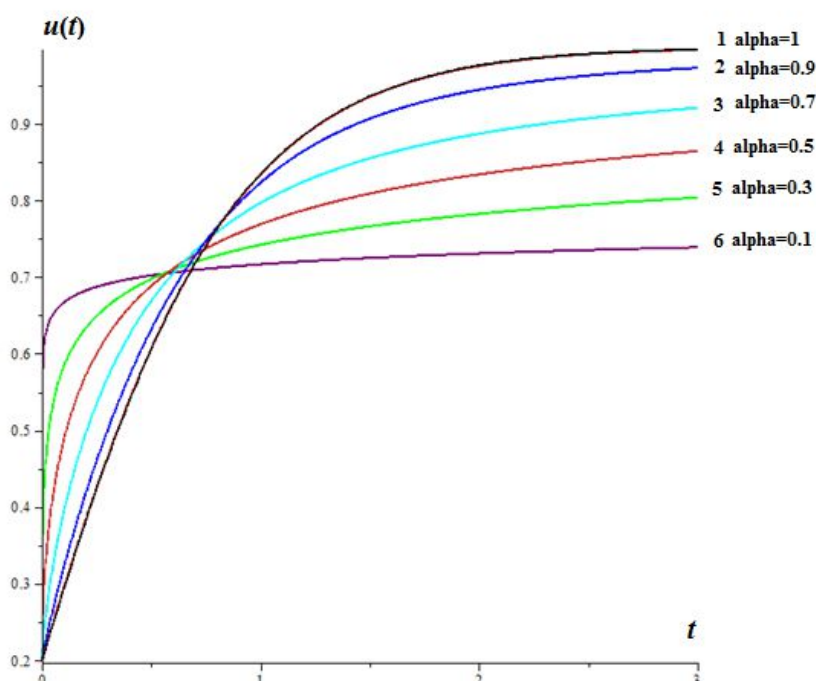


Рис. 1. Семейство расчетных кривых, полученных согласно решению системы (8) при различных значениях дробного параметра  $\alpha$

На рис. 1. приведено семейство расчетных кривых задачи Коши (5) и (6) в зависимости от значений дробного параметра  $\alpha$ :  $\alpha = 1$  (кривая 1 – соответствует классическому решению уравнения Риккати),  $\alpha = 0.9$  (кривая 2),  $\alpha = 0.7$  (кривая 3),  $\alpha = 0.5$  (кривая 4),  $\alpha = 0.3$  (кривая 5),  $\alpha = 0.1$  (кривая 6).

Можно отметить, что наличие дробного параметра  $\alpha$ , при уменьшении его значений, в исходном уравнение приводит к перестройке расчетных кривых численных решений задачи Коши (5) и (6). Это связано с тем, что наличие памяти в рассматриваемом процессе приводит к так называемым «тяжелым затягивающимся хвостам» в кривых распределении, полученных решений, например, кривая 5 из рис. 1.

Если среда обладает эффектами памяти, то иногда такую среду называют фрактальной, а дробный параметр  $\alpha$  связан с ее характеристикой – фрактальной размерностью среды. Поэтому исследование параметра  $\alpha$  имеет важное значение для различных приложений, где изучаются свойства среды или материалов.

Рассмотрим другой пример, когда  $\alpha(t)$  - является функцией, в том числе и случайной.

**Пример 2.** Пусть функция  $\alpha(t)$  изменяется на интервале от 0 до 1 в соответствии с нормальным законом распределения, с единичным математическим ожиданием и нулевым среднеквадратическим отклонением. Значения управляющих параметров выберем следующими:  $t \in [0, 30]$ ,  $N = 300$ ,  $k = 0.01$ ,  $\varphi = 0.2$ .

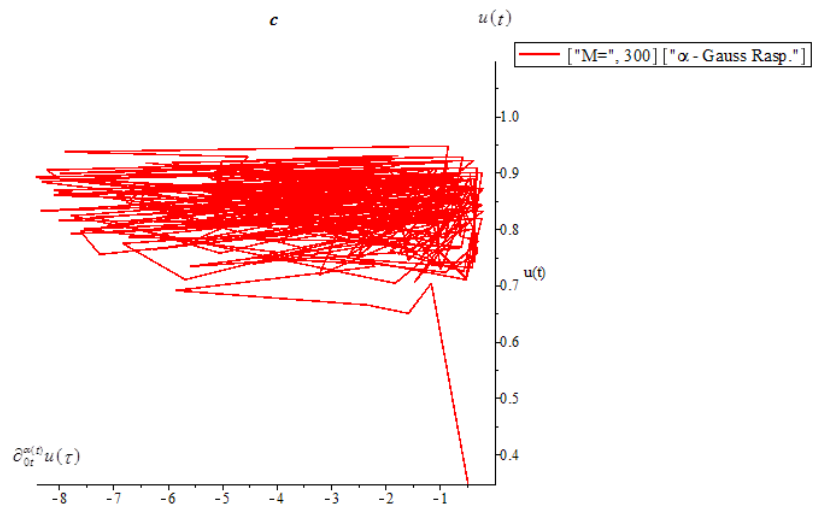
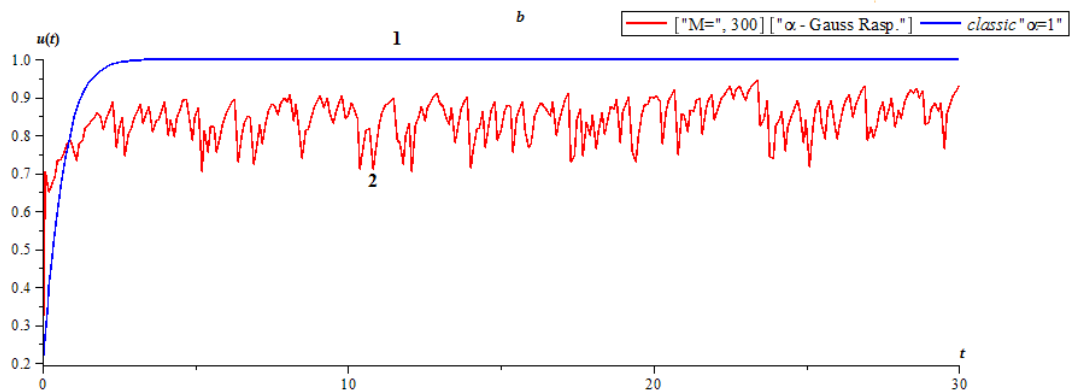
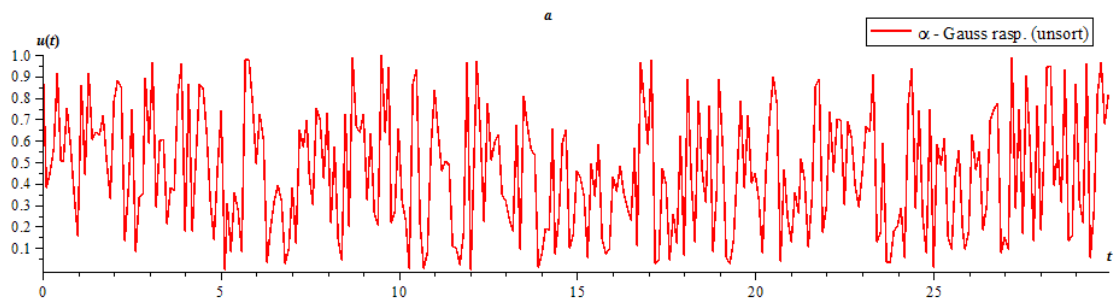


Рис. 2. Результаты моделирования для примера 2: **a)** изменение значений параметра  $\alpha(t)$ ; **b)** расчетные кривые, кривая 1 – классическое решение при  $\alpha = 1$ ; кривая численного решения системы (8); **c)** фазовая траектория, построенная в координатах  $(\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau), u(t))$

На рис. 2. Приведены результаты моделирования. Введения случайной функции  $\alpha(t)$  (рис. 2a) приводит к случайной функции решения (рис. 2b), что также отражено в хаотическом режиме на фазовой плоскости.

**Пример 3.** Рассмотрим пример, когда  $\alpha(t) = \frac{(1-\delta-\varepsilon)\cos(\mu t) + (\varepsilon-\delta+\phi)}{2}$ , где значения управляющих параметров выберем следующими:  $\delta = 0, \varepsilon = 0.05, \mu = 9, \phi = 1, t \in (0, 30), N = 1000, k = 0.03, \varphi = 0$ .

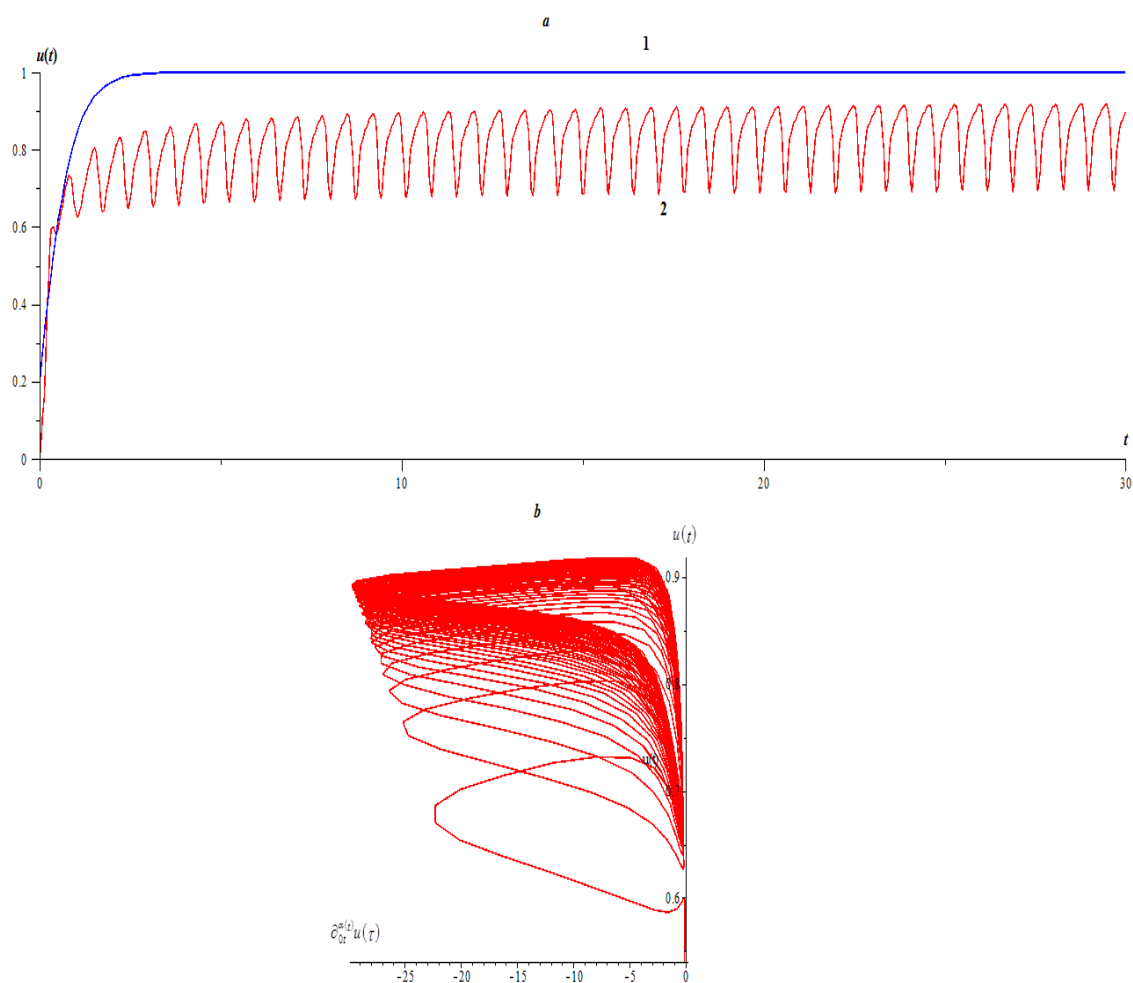


Рис. 3. Результаты моделирования по примеру 3: **a)** расчетные кривые, кривая 1 – классическое решение уравнение Риккати; кривая 2 – решение системы (8); **b)** фазовая траектория

На рис. 3 приведены результаты моделирования для примера 3. Можно сделать вывод о том, что если выбрать параметр  $\alpha(t)$  в виде тригонометрической функции, то

решение задачи Коши (5) и (6) будет описывать колебательный режим. Колебательный режим, приведенный на рис. 3а (кривая 2) похож на один из колебательных режимов автогенератора Ван дер Поля, что имеет большой практический интерес при моделировании нелинейных осцилляторов. Из рис.3а видно, что колебания происходят сначала с возрастанием амплитуды, потом амплитуда устанавливается. Действительно этот факт хорошо виден на рис.3б. Фазовая траектория выходит на предельный цикл, некоторую стабильную траекторию. Этот пример показывает, что с помощью эрдитарного уравнения Риккати с переменным дробным порядком производной, можно моделировать различные колебательные режимы несмотря на то, что  $0 < \alpha(t) < 1$ .

**Заключение.** Подводя итоги моделирования в настоящей работе, можно сделать следующие выводы. Введение дополнительного дробного параметра  $\alpha(t)$  в уравнение Риккати, приводит к появлению новых кривых распределений, которые характеризуют решения задачи Коши (5) и (6), вследствие чего, можно моделировать колебательные режимы и строить модели различных сигналов, это несомненно заслуживает внимания для решения прикладных задач.

Возможное продолжение исследования эрдитарного уравнения Риккати связано с прикладными задачами, например в экономике [10], а также в решении обратной задачи оценки параметра  $\alpha(t)$  по известным экспериментальным данным.

Выражаю благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н., профессору РАЕ Паровику Роману Ивановичу за ценные советы при планировании исследования и рекомендации по оформлению статьи.

### Список литературы

1. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
2. Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 218 p.
3. Volterra V. Sur les 'equations int'egro-differentielles et leurs applications // Acta Mathematica. 1912. Vol. 35, no. 1. P. 295-356.
4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
5. Riccati J. F. Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus. Acta Eruditorum Quae Lipsiae Publicantur, 1724. Supplementa 8.
6. Sweilam N. H., Khader M. M., Mahdy A. M. S. Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation // Applications and Applied Mathematics. 2012. Т. 7. №. 2. С. 595-608.
7. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.

8. Паровик Р.И. Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов: Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга 2015. 178 с.
9. Паровик Р. И. Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. №. 2 (11). С. 88-95.
10. Makarov D.V., Parovik R.I. Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus // Journal of Internet Banking and Commerce. 2016. vol. 21. no S6.