

УДК 517.938

## ЭРЕДИТАРНОЕ МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФИТЦХЬЮ-НАГУМО

Липко О.Д.

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга (683032, Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, д. 4), e-mail: lipko\_\_95@list.ru

В работе предложена новая математическая модель динамической системы ФитцХью-Нагумо, которая учитывает эффект эредитарности, или памяти. Память в динамической системе проявляется в зависимости текущего состояния системы от ее предыдущих состояний, т.е. приводит к нелокальности по времени. Математическая эредитарная модель динамической системы ФитцХью-Нагумо описывается интегро-дифференциальным уравнением со степенным ядром – функцией памяти. В работе, интегро-дифференциальное уравнение сводится к дифференциальному уравнению дробного порядка, которое решается с помощью теории конечно-разностных схем. Алгоритм численного решения, предложенной модели, реализован в компьютерной программе в среде символьной математики Maple. С помощью этой программы были построены расчетные кривые - осциллограммы, а также фазовые траектории в зависимости от различных значений управляющих параметров. Подтверждены ранее полученные результаты.

Ключевые слова: эредитарность, модель ФитцХью-Нагумо, производная дробного порядка, конечно-разностная схема.

## HEREDITARITY MODEL EQUATIONS FITZHUGH-NAGUMO

Lipko O.D.

Vitus Bering Kamchatka State University (683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya Street, etc. 4.), E-mail: lipko\_\_95@list.ru

The paper presents a new mathematical model of a dynamical system FitzHugh-Nagumo, which takes into account the effect heredity or memory. Memory in a dynamic system is shown as a function of the current state of the system from its previous states, ie, It leads to non-locality in time. A mathematical model of a dynamical system heredity FitzHugh-Nagumo-described integral-differential equation with power kernel - memory function. In this paper, integral-differential equation reduces to a fractional order differential equation, which is solved with the help of the theory of finite difference schemes. Numerical solution algorithm, the proposed model is implemented in a computer program, in Maple symbolic mathematics environment. With this program were built-calculated waveform curves and phase trajectories depending on the different values of the control parameters.

Keywords: heredity Model FitzHugh-Nagumo, a derivative of fractional order, finite-difference scheme.

**Введение.** Развитие теории эредитарных динамических систем началось с работы итальянского математика Вито Вольтерра [1], там же он ввел термин эредитарность для описания эффекта последствия, или памяти, и впервые исследовал эредитарный осциллятор. Математическое описание эредитарного осциллятора представляло собой интегро-дифференциальное уравнение с ядром, которое называется функцией памяти. В дальнейшем исследования эредитарных динамических систем были связаны с выбором функции памяти. В силу того что различные среды могут обладать фрактальными свойствами, то функцию памяти целесообразно выбрать степенной. Тогда интегро-дифференциальные уравнения можно переписать как дифференциальные уравнения дробных порядков, теория которых достаточно хорошо разработана [2]. В литературе такие уравнения называют фрактальными, они описывают процессы с частичной потерей памяти. Фрактальные динамические системы наиболее полно исследовались в монографиях [3,4].

В работе обобщена динамическая система ФитцХью-Нагумо, которая была предложена Р. ФитцХью [5] и Дж. Нагумо [6] для описания распространения нервного импульса в мембране. Обобщенная математическая модель содержит уравнение с производными дробных порядков в смысле Герасимова-Капуто и решается с помощью конечно-разностной схемы.

**Постановка задачи и метод решения.** Классическая нелинейная динамическая система ФитцХью-Нагумо (ФХН) согласно работе [5], имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = c \left( y(t) - x(t) - \frac{x^3(t)}{3} + z \right), \\ \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{(x(t) - a + by(t))}{c}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a, b, c$  - константы, удовлетворяющие условиям  $1 - 2b/3 < a < 1, 0 < b < 1, b < c^2$ ,  $x(t)$  - мембранный потенциал,  $z$  - интенсивность раздражителя, в первом приближении константа, которая также может иметь вид прямоугольного импульса или дельта-функции,  $t \in [0, T]$  - время процесса,  $T > 0$  - время моделирования.

Динамическая система (1) может быть записана в виде одного уравнения:

$$\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t)(x^2(t) + p) + qx(t) + gx^3(t) - a - bz = 0, \quad (2)$$

где  $p = \frac{b}{c^2} - 1, q = 1 - b, g = b/3$ . Для уравнения (2) ставятся начальные условия ( $\eta, \varphi - const$ ):

$$x(0) = \eta, \dot{x}(0) = \varphi. \quad (3)$$

Задача (2), (3) является задачей Коши, решение которой исследуется в работе [5]. В настоящей работе мы рассмотрим обобщение уравнения (2), введем в него эредитарность с помощью следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$\int_0^t K_1(t-\tau)\ddot{x}(\tau)d\tau - c(x^2(t) + p)\int_0^t K_2(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau + qx(t) + gx^3(t) - a - bz = 0, \quad (4)$$

где  $K_1(t-\tau)$  и  $K_2(t-\tau)$  - функции памяти, характеризующие эредитарность.

Заметим, что если функции памяти представляют собой дельта-функцию, то тогда в системе отсутствует эредитарность, а если функции памяти представляют собой функции Хэвисайда, то тогда система обладает полной памятью. Интерес представляет третий вариант: если функции памяти являются степенными функциями, например,

$$K_1(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, K_2(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}, 1 < \alpha < 2, 0 < \beta < 1 \quad (5)$$

где  $\Gamma(t)$  - гамма-функция Эйлера, тогда говорят, что система обладает частичной "потерей памяти" [2]. В дальнейшем будем исследовать эредитарные процессы с частичной "потерей памяти". Подставим функции памяти (5) в интегро-дифференциальное уравнение (4). В результате получим:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} - \frac{c(x^2(t) + p)}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\beta} + qx(t) + gx(t)^3 - a - bz = 0. \quad (6)$$

Мы получили интегро-дифференциальное уравнение специального вида. Функции памяти (5) в интегро-дифференциальном уравнении (6) могут быть отличны от степенных функций, что приводит к другим интегро-дифференциальным уравнениям. Если обратиться к определению производной дробного порядка по Герасимову-Капуто, то мы приходим к уравнению:

$$\partial_{0t}^\alpha x(\tau) - c(x^2(t) + p)\partial_{0t}^\beta x(\tau) + qx(t) + gx^3(t) - a - bz = 0, \quad (7)$$

где дробные дифференциальные операторы равны:

$$\partial_{0t}^\alpha x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}, \partial_{0t}^\beta x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\beta},$$

определенные в смысле Герасимов-Капуто с дробными порядками  $1 < \alpha < 2, 0 < \beta < 1$ .

Можно отметить, что в предельном случае ( $\alpha = 2, \beta = 1$ ) уравнение (7) переходит в классическое уравнение ФХН (2), поэтому можно считать, что уравнение (2) является частным случаем уравнения (7). Отметим, что уравнение (7) содержит кубическую нелинейность, характерную для осциллятора Дуффинга [7], а также Ван дер Поля [8].

Интегро-дифференциальное уравнение ФХН (7) будем называть дробным, или фрактальным уравнением, а процесс, которые оно описывает, будем называть фрактальным, или эрдитарным.

Задача Коши (7) и (3) в общем виде не имеет точного решения в силу того, что модельное уравнение является нелинейным, поэтому надо использовать численные методы для ее решения. В качестве численного метода возьмем метод конечно-разностных схем, так как его легко можно реализовать в любой компьютерной среде.

Будем рассматривать равномерную сетку. Для этого разобьем временной интервал  $[0, T]$  на  $N$  равных частей. В результате получим равномерную сетку  $t_j = j\tau$ , где шаг  $\tau = T/N$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ . Значения искомой функции  $x(t_j) = x_j$ , будем называть ее сеточной функцией. Аппроксимация дробных операторов уравнения (7) осуществляется следующим образом [3,9]:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(\tau) \approx \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} a_j \cdot (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}), a_j = (j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha},$$

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\tau) \approx \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} b_j \cdot (x_{k-j+1} - 2x_{k-j}), b_j = (j+1)^{1-\beta} - j^{1-\beta}.$$

Подставим эти аппроксимации в модельное уравнение (7). Приходим к следующей конечно-разностной схеме:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \varphi + \tau\eta, k = 0, \\ x_2 = \frac{1}{A + cB(x_1^2 + p)} \left( (2A + Bc(x_1^2 + p) - q) \cdot x_1 - x_1^3 g - Ax_0 + a + bz \right), k = 1, \\ x_{k+1} = \frac{1}{A + cB(x_k^2 + p)} \left( (2A + Bc(x_k^2 + p) - q) \cdot x_k - x_k^3 g - Ax_{k-1} + a + bz - \right. \\ \left. - Bc(x_k^2 + p) \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (b_j(x_{k+1} - x_k)) - A \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (a_j(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1})) \right), \\ A = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}, B = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}, k = 2, \dots, n-1. \end{array} \right. \quad (8)$$

Заметим, что, как правило, нелинейные динамические системы обладают жесткостью при больших значениях управляющих параметров, что приводит к необходимости уменьшить шаг дискретизации в конечно-разностной схеме. В нашем случае в силу ограниченности параметров  $a, b, c$ , жесткость отсутствует, поэтому в уменьшении шага нет необходимости.

**Результаты моделирования и их обсуждение.** Конечно-разностная схема (8) была реализована в компьютерной программе в среде символьной математики Maple. Рассмотрим

применение схемы (8) на примерах, значения параметров  $a, b, c$  были взяты из работы [5]. Сначала рассмотрим случай, когда меняются значения дробных параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , а потом и значения параметра  $z$ .

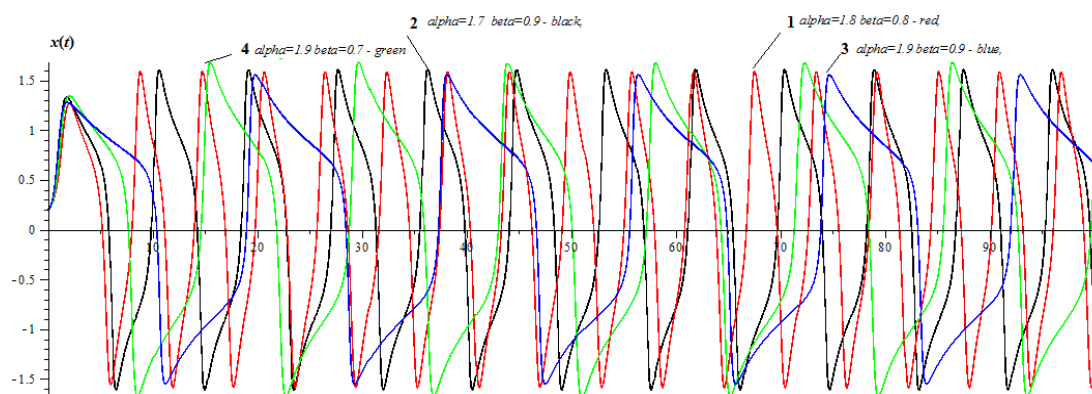


Рис.1. Осциллограммы, полученные по конечно-разностной схеме (8) при значениях параметров:  $t \in [0, T], T = 100, N = 2000, \tau = 0.05, a = 0.7, b = 0.8, z = -0.4, c = 3, x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.1$  и различных значениях  $\alpha$  и  $\beta$ : кривая 1 -  $\alpha = 1.8, \beta = 0.8$ , кривая 2 -  $\alpha = 1.7, \beta = 0.9$ , кривая 3 -  $\alpha = 1.9, \beta = 0.9$ , кривая 4 -  $\alpha = 1.9, \beta = 0.7$

На рис. 1 приведены осциллограммы, полученные по схеме (8) при различных значениях  $\alpha$  и  $\beta$ . Осциллограмма (3) похожа на осциллограмму из работы [5]. При уменьшении значений  $\alpha$  и  $\beta$ , изменяется форма осциллограмм (смещение периодичности колебаний), однако амплитуда колебаний остается неизменной, что на фазовой плоскости соответствуют предельным циклам (рис.2).

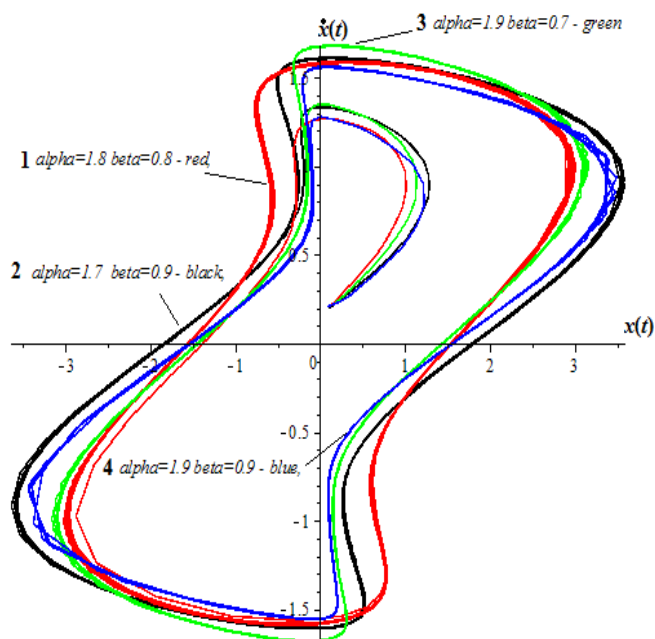


Рис.2. Фазовые траектории

Рассмотрим другой случай: зафиксируем значения  $\alpha$  и  $\beta$ , и будем изменять значения  $z$ . На рис. 3 приведены осциллограммы для этого случая.

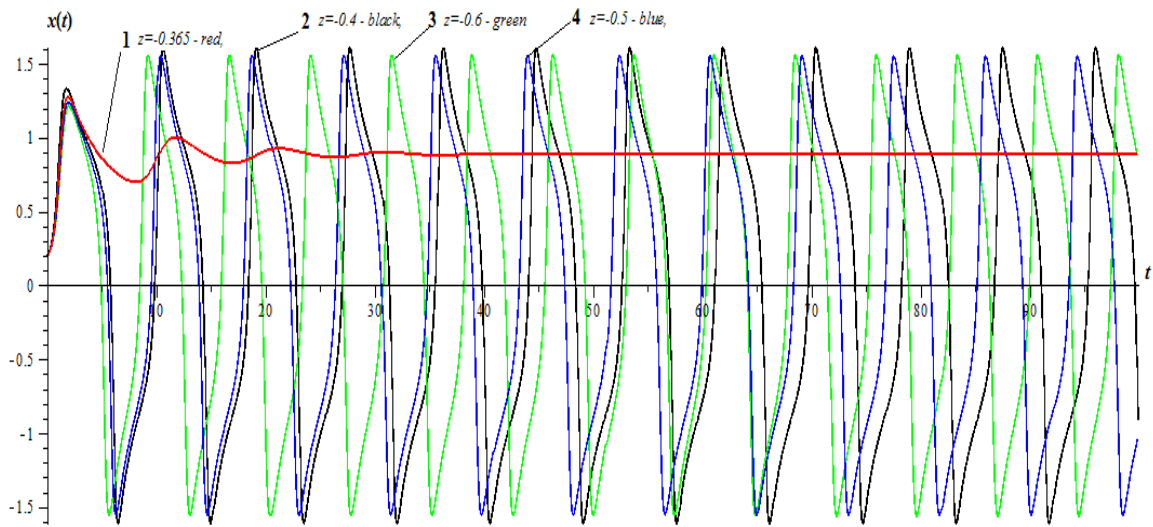


Рис. 3. Осциллограммы, полученные по конечно-разностной схеме (8) при значениях параметров:  $t \in [0, T], T = 100, N = 2000, \tau = 0.05, a = 0.7, b = 0.8, c = 3, x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.1, \alpha = 1.8, \beta = 0.8$  и различных значениях  $z$ : кривая 1 -  $z = -0.365$ , кривая 2 -  $z = -0.4$ , кривая 3 -  $z = -0.6$ , кривая 4 -  $z = -0.5$

В случае  $z = -0.365$  (кривая 1) мы видим, что колебания затухают, а фазовая траектория (рис. 4) имеет вид закручивающейся спирали. При уменьшении значений параметра  $z$ , происходит смещение осциллограмм, но с постоянной амплитудой, что обеспечивает выход фазовых траекторий на предельный цикл (рис. 4).

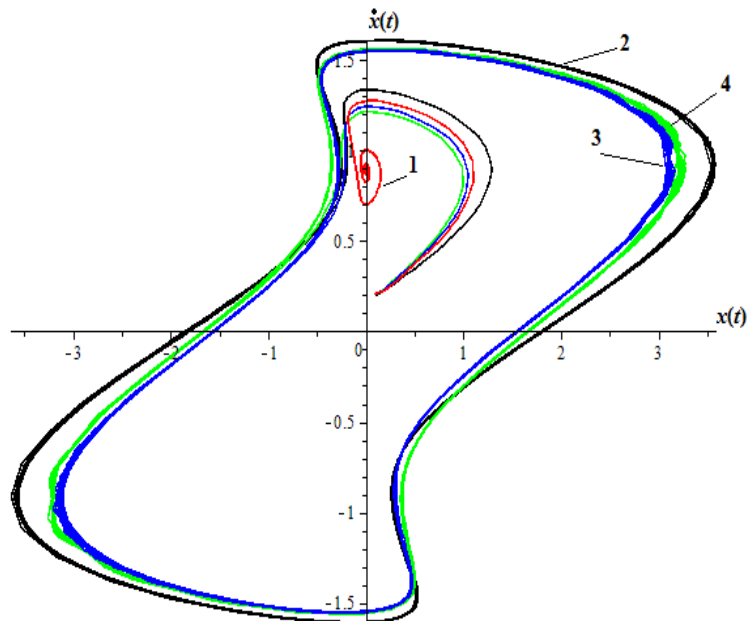


Рис. 4. Фазовые траектории: кривая 1 -  $z = -0.365$ , кривая 2 -  $z = -0.4$ , кривая 3 -  $z = -0.6$ , кривая 4 -  $z = -0.5$

В работе был предложен и исследован эрдитарный нелинейный осциллятор ФитцХью-Нагумо. С помощью теории конечно-разностных схем получено численное решение задачи Коши, построены осциллограммы и фазовые траектории. Показано, что параметры  $\alpha$  и  $\beta$  приводят к смещению колебаний осциллятора, но при этом сохраняется постоянство амплитуды, а также изменяется форма фазовых траекторий, которые выходят на предельный цикл. При изменении параметра  $z$  колебания могут быть затухающими, а фазовая траектория для соответствующей точки покоя будет являться устойчивым фокусом.

Введение дополнительных управляющих параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , чтобы более гибко моделировать колебательный режим, дает дополнительную параметризацию сигнала. Дальнейший интерес в исследовании эрдитарного осциллятора ФитцХью-Нагумо может заключаться в исследовании на устойчивость точек покоя по аналогии с работой [8], а также дальнейшее обобщение, связанное с введением функций  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  [10]. Другое направление исследований связано с качественными свойствами конечно-разностной схемы (8) - устойчивостью и сходимостью [9].

Автор выражает благодарность научному руководителю, к.ф.-м.н., профессору РАЕ, Р.И. Паровику за ценные советы и замечания по содержанию данной научной статьи.

## Список литературы

1. Volterra V. Sur les 'equations int'egro-differentielles et leurs applications // Acta Mathematica. 1912. Vol. 35, no. 1. P. 295-356.
2. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
3. Паровик Р.И. Математическое моделирование линейных эрдитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга. 2015. 178 с.
4. Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 218 p.
5. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophysical Journal. 1961. vol. 1. pp. 446-466.
6. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 2016. vol. 50. pp. 2061–2070.
7. Паровик Р.И. Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. №1(10). С. 18-24.
8. Паровик Р.И. Об исследовании устойчивости эрдитарного осциллятора Ван дер Поля // Фундаментальные исследования. 2016. №3-2. С. 283-287.

9. Parovik R.I. Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable order fractional derivatives // Archives of Control Sciences. 2016. vol. 26. no 3. pp. 429-435.
10. Паровик Р.И. Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками // Вестник КРАУНЦ. Физико-математический. 2015. № 2(11). С. 88-85.