УДК 517

АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ФОРМУЛЕ МАКЛОРЕНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ MATHCAD

Костылева М.А., [1] Куликова О.В.[1]

[1] *ФГБОУ ВО «Уральский государственный университет путей сообщения», Екатеринбург,*
e-mail :mari.kostyleva@mail.ru.,kulikova1000@rambler.ru

В статье рассматривается проблема анализа погрешности приближенных вычислений логарифмической функции по формуле Маклорена. Формула Маклорена является частным случаем формулы Тейлора и представляет собой разложение некоторой функции бесконечным степенным рядом. При замене бесконечного степенного ряда многочленом какой-либо степени отбрасываемые члены ряда образуют остаточный член, который определяет погрешность вычислений. Использование системы компьютерной математики Mathcad позволяет осуществить построение графических моделей функциональных зависимостей и проведение вычислительного эксперимента. Визуализация особенностей расположения графика логарифмической функции относительно выбранного полинома, составленного по формуле Маклорена, создает условия для наблюдения изменения погрешности приближенных вычислений. Расчет суммы степенного ряда производится в автоматическом режиме встроенной функцией суммирования из библиотеки программ системы Mathcad и определение интервальной оценки значений функции не составляет особого труда.

Ключевые слова: приближенные вычисления, погрешность, степенные ряды.

ANALYSIS OF THE LOGARITHMIC FUNCTION APPROXIMATE CALCULATIONS BY THE MACLAURIN FORMULA WITH THE USE OF MATHCAD

Kostyleva M.A.,[1], Kulikova O.V.[1]

[1] *Ural State University of Railway Transport, Ekaterinburg,*
e-mail: mari.kostyleva@mail.ru, kulikova1000@rambler.ru.

In this article we consider the problem of error Maclaurin formula approximate calculations analysis. The Maclaurin formula is a special case of Taylor's formula and represents the expansion of a function by an infinite power series. The terms of the series form a remainder term, which determines the calculations error when the infinite power series is replaced by a polynomial of some degree. Experiment using a computer mathematics system Mathcad makes it possible to construct graphical models of functional dependencies and conduct a computational. Visualization of the features creates conditions for observing the change in the error of the approximate calculations of the location of the graph of the logarithmic function with respect to the chosen polynomial compiled by the Maclaurin formula. The calculation of the sum is made in the automatic mode of the power series by the built-in summation function from the library of Mathcad system programs and the definition of the interval is not difficult to evaluate the values of the function.

Key words: approximate calculations, error, power series.

Введение

В настоящее время развитие вычислительной техники позволяет просто и быстро находить значения различных функций. Достаточно набрать на дисплее калькулятора необходимое выражение или выбрать встроенную функцию и мгновенно программа предоставляет числовой результат. Расчетные формулы скрыты от пользователя, поэтому полученный результат воспринимается как точное значение величины. Применение вычислительных алгоритмов всегда приводит к получению приближенных значений искомых величин. В вузовском курсе математики рассматривается формула Тейлора для нахождения значений функции [4]. Ее частным случаем выступает формула Маклорена [4].

Результаты исследования и их обсуждение

Решение задачи о замене функции бесконечным степенным рядом привело Б. Тейлора в 1715 г. к нахождению формулы, которая в дальнейшем получила его имя. Простой вывод формулы был предложен в 1745 г. К. Маклореном. Формулу для оценки погрешности расчетов, если рассматривается конечное число членов ряда, предложил Ж.Л. Лагранж в 1799 г. [1]. В настоящее время формула Тейлора записывается в виде выражения

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (1)$$

где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени, $R_n(x)$ – остаточный член.

Коэффициенты многочлена $P_n(x)$ находятся через производные функции $f(x)$. Смысл формулы Тейлора хорошо раскрывается содержанием теоремы: если функция $f(x)$ обладает в замкнутом промежутке (a; b) производными до (n + 1) порядка включительно, то $f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$, где c – некоторое число, лежащее между a и b [1].

Если величина a рассматривается как постоянная, а b как переменная, то b заменяется на x и получается формула, известная как «формула Тейлора», которая имеет вид

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Если величину, a приравнять к нулю, то получается формула, известная как «формула Маклорена». Она имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (2)$$

В учебнике по курсу высшей математики приводится разложение по формуле (2) экспоненциальной, логарифмической и тригонометрических функций синуса и косинуса [3].

Разложение логарифмической функции по формуле (2) имеет вид:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \quad (3)$$

Формула (3) выполняется, если x принадлежит интервалу $(-1; 1]$. Формула (2) выполняется для экспоненциальной функции и тригонометрических функций синуса и косинуса, если x принадлежит интервалу $(-\infty; +\infty)$. Провести исследование поведения логарифмической функции на границах интервала $(-1; 1]$ можно с помощью компьютерного математического пакета Mathcad [2].

Система Mathcad служит удобной программной средой для решения разнообразных задач. В состав этого приложения входят такие компоненты как текстовый и формульный редакторы, вычислительный и символьный процессоры, хранилище справочной информации. Визуально ориентированный язык программирования позволяет быстро и успешно освоить возможности системы Mathcad. Пакет обеспечивает проведение не только научных и инженерных расчетов, но его можно использовать и как учебно-исследовательскую лабораторию при изучении математических понятий. Выполнение команд осуществляется через панели инструментов с лаконичными пиктограммами и комментариями [2].

Встроенные функции и операторы создают условия для наблюдения значений функциональных зависимостей, проведения вычислительного эксперимента, построения двух и трех мерных графиков. График функции $y = ln(1 + x)$ и графики полиномов третьей и четвертой степени, составленные по формуле (3), представлены на рис. 1.

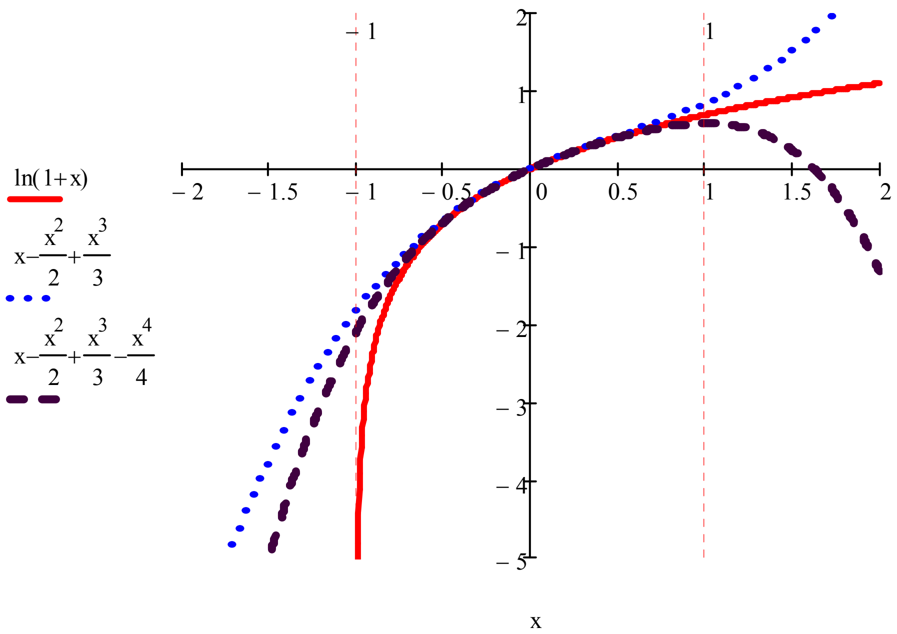

Рис. 1.

График функции $y = ln(1 + x)$ существенно отличается от графиков полиномов за пределами интервала $(-1; 1]$. Это наглядно иллюстрирует условия применения формулы (3). Если x принимает значение 1 на верхней границе интервала, то это позволяет найти значение $ln2$. Степень полинома, который используется для приближенного вычисления A^* какой-либо величины A, определяется абсолютной погрешностью Δ [5]. Точное значение величины A принадлежит интервалу $(A^* - \Delta;\ A^* + \Delta)$. Пусть, например, требуется установить приближенное значение $ln2$ с погрешностью 0,001. В этом случае модуль остаточного члена $|R_n(x)|$ должен быть меньше 0,001. Такое условие позволяет его отбросить. Если последнее слагаемое полинома $|R_n(1)| = \frac{1}{n} < 0{,}001$, то, следовательно, степень полинома $P_n(x)$ будет больше 1000. Значение 0,0005 при округлении до тысячных принимает вид 0,001. Это означает, что приближенное вычисление $ln2$ целесообразно производить с учетом того, что $|R_n(1)| < 0{,}0005$. Расчетная формула для нахождения приближенного значения $ln2$ с погрешностью 0,001 примет вид

$$ln2 \approx \sum_{n=1}^{2001} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0{,}693.$$

Оператор суммирования системы Mathcad выполняет такую операцию в автоматическом режиме. Точное значение $ln2$ принадлежит интервалу (0,692; 0,694). Если $x \in (-1; 1)$, то в этом случае оценить значение модуля остаточного члена $|R_n(x)|$ можно с помощью вычислительного эксперимента. Пусть, например, необходимо вычислить $ln0{,}2$ и $ln1{,}2$ с погрешностью 0,001. Расчет приближенных значений $ln0{,}2$ и $ln1{,}2$ будет проводиться по формулам

$$ln0{,}2 = ln(1 + (-0{,}8)) \approx \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}(-0{,}8)^n}{n}, \qquad (4)$$

$$ln1{,}2 = ln(1 + 0{,}2) \approx \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}0{,}2^n}{n}. \qquad (5)$$

Результаты вычислительного эксперимента остаточных членов для формул (4) и (5) представлены в таблице 1.

Таблица 1.

n	$\lvert R_n(-0{,}8)\rvert = \left\lvert\frac{(-0{,}8)^n}{n}\right\rvert$	n	$\lvert R_n(0{,}2)\rvert = \left\lvert\frac{0{,}2^n}{n}\right\rvert$
5	$6{,}6 \cdot 10^{-2}$	1	$2{,}0 \cdot 10^{-1}$
10	$1{,}1 \cdot 10^{-2}$	2	$2{,}0 \cdot 10^{-2}$
15	$2{,}3 \cdot 10^{-3}$	3	$2{,}7 \cdot 10^{-3}$
20	$5{,}8 \cdot 10^{-4}$	4	$4{,}0 \cdot 10^{-4}$
21	$4{,}4 \cdot 10^{-4}$	5	$6{,}4 \cdot 10^{-5}$

Модули остаточных членов $|R_{21}(-0{,}8)|$ и $|R_4(0{,}2)|$ меньше 0,0005, следовательно, для вычисления $ln0{,}2$ используется полином $P_{21}(-0{,}8)$, а для $ln1{,}2$ применяется полином $P_4(0{,}2)$.

Приближенные значения $ln0{,}2$ и $ln1{,}2$ рассчитываются по следующим формулам

$$ln0{,}2 \approx \sum_{n=1}^{21} \frac{(-1)^{n-1}(-0{,}8)^n}{n} = -1{,}608,$$

$$ln1{,}2 \approx \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n-1}0{,}2^n}{n} = 0{,}182.$$

Точные значения $ln0{,}2$ и $ln1{,}2$ принадлежат интервалам (–1,609; –1,607) и (0,181; 0,183). При нахождении натурального логарифма от числа большего 2, необходимо использовать свойства логарифмов. Например, пусть требуется вычислить $ln2{,}2$ и $ln5{,}3$ с погрешностью 0,001. Расчет приближенных значений *ln*2,2 и *ln*5,3 будет проводиться по формулам

$$ln\,2{,}2 = ln(2 \cdot 1{,}1) = ln2 + \ln(1 + 0{,}1),$$

$$ln2{,}2 \approx 0{,}693 + \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} 0{,}1^{\,n}}{n}, \tag{6}$$

$$ln\,5{,}3 = ln(4 \cdot 1{,}325) = 2ln2 + ln(1 + 0{,}325),$$

$$ln\,5{,}3 \approx 2 \cdot 0{,}693 + \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} 0{,}325^{n}}{n}. \tag{7}$$

Результаты вычислительного эксперимента остаточных членов для формул (6) и (7) представлены в таблице 2.

Таблица 2.

n	$\lvert R_n(-0{,}1)\rvert = \left\lvert\frac{(-0{,}1)^n}{n}\right\rvert$	n	$\lvert R_n(0{,}325)\rvert = \left\lvert\frac{0{,}325^n}{n}\right\rvert$
1	$1{,}0 \cdot 10^{-1}$	1	$3{,}3 \cdot 10^{-1}$
2	$5{,}0 \cdot 10^{-3}$	3	$1{,}1 \cdot 10^{-2}$
3	$3{,}3 \cdot 10^{-4}$	5	$7{,}3 \cdot 10^{-4}$
4	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$	6	$2{,}0 \cdot 10^{-4}$
5	$2{,}0 \cdot 10^{-6}$	7	$5{,}5 \cdot 10^{-5}$

Модули остаточных членов $\lvert R_3(-0{,}1)\rvert$ и $\lvert R_6(0{,}325)\rvert$ меньше 0,0005, следовательно, для вычисления *ln*2,2 используется полином $P_3(-0{,}1)$, а для *ln*5,3 применяется полином $P_6(0{,}325)$.

Приближенные значения *ln*2,2 и *ln*5,3 рассчитываются по следующим формулам

$$ln2{,}2 \approx 0{,}693 + \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^{n-1} 0{,}1^{n}}{n} = 0{,}693 + 0{,}095 = 0{,}788,$$

$$ln\,5{,}3 \approx 2 \cdot 0{,}693 + \sum_{n=1}^{6} \frac{(-1)^{n-1} 0{,}325^{n}}{n} = 2 \cdot 0{,}693 + 0{,}281 = 1{,}667.$$

Точные значения *ln*2,2 и *ln*5,3 принадлежат интервалам (0,787; 0,789) и (1,666; 1,668).

Заключение

Применение системы компьютерной математики Mathcad позволяет быстро и эффективно проводить различные вычисления. Нахождение конечной суммы степенных рядов в автоматическом режиме создает условия для организации вычислительного эксперимента при изучении приближенных вычислений. Наглядное восприятие характерных особенностей математических моделей успешно осуществляется построением графиков функциональных зависимостей с помощью специальных операторов. Использование системы Mathcad в учебном процессе способствует более глубокому пониманию математических понятий.

Литература

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. [Текст] / М.Я. Выгодский. – М.: Астрель, 2006. – 991 с.

2. Кирьянов Д.В. Mathcad 15/ Mathcad Prime 1.0. [Текст] / Д.В Кирьянов. – СПб.: БХП-Петербург, 2012. – 432 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. 9-е изд. [Текст] / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа (1). [Текст] / Г.М. Фихтенгольц. – СПб: Изд-во Лань, 2001. – 448 с.
5. Шарый С.П. Курс вычислительных методов. [Текст] / С.П. Шарый. – Новосибирск: НГУ, 2016. – 545 с.