

УДК 517.9

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

Мелякова О.Ю.

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина», Елец,

e-mail: lesikx5@mail.ru

В статье введено понятие эволюционного оператора, рассмотрены условия разрешимости операторного уравнения и приведены классические приемы нахождения решения таких уравнений. Разработана система заданий, при решении, которых возможно применение эволюционного оператора. В научном исследовании выявлены факторы, влияющие на решение операторных уравнений; установлена зависимость решения от свойств операторов и пространств, в которых они рассматриваются. Разработан механизм исследования на устойчивость систем дифференциальных уравнений с использованием фазового портрета, который позволяет не только визуально обосновать процесс исследования, но и упростить поставленную задачу. На примерах задач из различных разделов физики рассматриваются метод решения, базирующийся на знании теории операторов, и метод исследования описанных в задачах процессов на устойчивость.

Ключевые слова: операторное уравнение, эволюционный оператор, устойчивость решений, фазовый портрет

USE OF THE EVOLUTIONARY OPERATOR FOR SOLVING AND STUDYING NATURAL RESEARCH PROBLEMS

Melyakova O.Y.

Bunin Yelets State University, Yelets, e-mail: lesikx5@mail.ru

This article introduces the concept of the evolutionary operator, presents the solvability conditions for operator equations and are gives classical approaches to finding solutions for such equations. A system of tasks, where the evolutionary operator can be applied for their solving, has been developed. In the scientific study, the factors affecting the solutions for operator equations have been revealed; The dependence of the solution on the properties of operators and spaces, in which they are considered, has been established. A mechanism for investigating the stability of differential equation systems using a phase portrait has been developed that allows not only to demonstrate the research process visually, but also simplify the posed problem. A solution method based on the knowledge of the operator theory and method for studying the stability processes described in problems are considered using problems from various branches of physics as examples.

Keywords: operator equation, evolutionary operator, stability of the solutions, phase portrait

В начале XX века развиваются новые методы исследования, в основе которых положены методы функционального анализа. В частности приложение теории линейных операторов в различных банаховых пространствах к задаче моделирования реальных процессов с помощью дифференциальных уравнений и их систем особенно актуально в последние десятилетия при изучении явлений природы, решении многих задач физики, химии, биологии и других наук. Операторный метод позволяет реализовать функционально-аналитический подход к решению дифференциальных уравнений в конкретном банаховом пространстве. В основу статьи положены теоретические аспекты решения операторных уравнений, вида $AX + XB = Y$, где A, B, Y – заданные операторы. Вопросы разрешимости таких уравнений в математической литературе были изучены для различных видов операторов A и B . Например, в [2] для операторов типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций, в [1] в общем случае для операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве.

Цель нашего исследования состоит в изучении поведения решений эволюционных уравнений (т.е. уравнений, описывающих процессы, развивающиеся во времени), приложение теории эволюционного оператора для решения задачи Коши и задач из различных областей естествознания.

Остановимся на рассмотрении дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \quad (t \in [a, b]) \quad (1)$$

с переменными оператор-функцией $A(t)$ и вектор-функцией $f(t)$, зависящими от вещественного параметра t , и методе его решения, разработанном в [1]. Там же приведены условия существования и получен общий вид решения задачи Коши в операторной форме.

Следует отметить, что существование решений однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$ в банаховом пространстве исследуется для случая, когда функции $f(t)$ и $A(t)$ сильно измеримы и интегрируемы по Бохнеру на конечных интервалах. Здесь же получено решение задачи Коши в операторной форме:

$$x(t) = U(t)x_0,$$

где $U(t)$ – эволюционный оператор, имеющий в общем случае вид

$$U(t) = I + \int_{t_0}^t A(t_1) dt + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{t_0}^{t_n} \int_{t_0}^{t_{n-1}} \dots \int_{t_0}^{t_2} A(t_n) A(t_{n-1}) \dots A(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n .$$

Здесь $A(t_1), \dots, A(t_n)$ – функции сильно интегрируемые, $t_0, t_1, \dots, t_n \in [a, b]$, а интегрирование ведется по Бохнеру [1].

Решение задачи Коши для неоднородного уравнения (1) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$ приводит так же к необходимости введения эволюционного оператора, но уже в операторной форме $U(t, \tau) = U(t)U^{-1}(\tau)$.

Свойства оператора $U(t, \tau)$ рассмотрены в [1] и непосредственно вытекают из определения оператора:

- a) $U(t, t) = I$,
- b) $U(t, s)U(s, \tau) = U(t, \tau)$,
- c) $U(t, \tau) = [U(\tau, t)]^{-1}$,
- d) $U(t, \tau) = e^{\int_{\tau}^t A(\tau) d\tau}$ ($\tau \leq t$).

При помощи эволюционного оператора решение задачи Коши для неоднородного уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = U(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t, \tau)f(\tau) d\tau.$$

Примеры некоторых задач на нахождение решений дифференциальных уравнений, решение задач физики, химии, биологии и других естественных наук с использованием эволюционного оператора приводились в статье [3].

В качестве примера использования эволюционного оператора рассмотрим задачу

Задача 1. Цилиндрическая катушка изготовлена из медной проволоки. При прохождении через катушку электрического тока выделяется теплота. Построим математическую модель описанного физического процесса и выведем формулу для температуры $T = T(t)$ установившегося режима как функции времени t .

Решение.

Пусть T_0 – температура среды, в которой находится катушка; $T(0) = T_0$; c – удельная теплоемкость меди; γ – ее плотность; V – объем; S – площадь поверхности катушки; q – количество теплоты, выделяемое на про-

тяжении единицы времени; k – коэффициент теплопроводности.

Количество теплоты, выделяющееся за время Δt , равно $q\Delta t$. Эта величина состоит из двух частей: теплоты, которая идет на повышение температуры ΔT , и теплоты, уходящей в среду, окружающую катушку. Первая часть равна $cV\gamma\Delta T$, а вторая $kS(T - T_0)\Delta t$ (количество этой теплоты пропорционально разности температуры T и T_0 катушки и среды, а также величинам S и Δt); отсюда $q\Delta t = cV\gamma\Delta T + kS(T - T_0)\Delta t$.

Разделив обе части последнего равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_0) + \beta,$$

где $\alpha = \frac{kS}{cV\gamma}$, $\beta = \frac{q}{cV\gamma}$.

Здесь $A(t) = -\alpha$, $f(t) = \alpha T_0 + \beta$.

Найдем $U(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= A(t)U \Delta \frac{dU}{dt} = \\ &= -\alpha U \Delta \frac{dU}{U} = -\alpha dt \end{aligned}$$

Отсюда $U(t) = e^{-\alpha t}$.

Найдем $U(t, \tau)$:

$$U^{-1}(\tau) = \frac{1}{U(\tau)} = e^{\alpha \tau},$$

$$U(t, \tau) = U(t)U^{-1}(\tau) = e^{\alpha(\tau-t)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} T(t) &= U(t, 0)T_0 + \int_0^t (T_0\alpha + \beta)e^{\alpha(\tau-t)} d\tau = \\ &= e^{-\alpha t}T_0 + (T_0\alpha + \beta) \frac{1}{\alpha} e^{\alpha(\tau-t)} \Big|_0^t = \\ &= e^{-\alpha t}T_0 + T_0 + \frac{\beta}{\alpha} - e^{-\alpha t}T_0 - \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha t} = \\ &= T_0 + \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

Подставляя α и β , получим

> *restart* :

> $f_1 := (x, y) \rightarrow y$:

> $f_2 := (x, y) \rightarrow -\frac{g}{l} \cdot \sin(x) - \frac{k}{m} \cdot y$:

> $g := 10 : l := 1 : k := 0 : m := 1$:

> *System* := $\text{diff}(x(t), t) = f_1(x(t), y(t)), \text{diff}(y(t), t) = f_2(x(t), y(t))$:

> *_EnvAllSolutions* := *true* :

> *res* := $\text{solve}(\{f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0\}, \{x, y\})$;

$$\text{res} := \{x = \pi_Z1\sim, y = 0\}$$

> *with(DEtools)* : *with(plots)* :

> *phaseportrait*([*System*], [x(t), y(t)], t=-5..5, [[x(0)=0.3, y(0)=0.3], [x(0)=-4, y(0)=0], [x(0)=4, y(0)=0], [x(0)=-2, y(0)=-4], [x(0)=2, y(0)=4], [x(0)=-2.5, y(0)=0], [x(0)=2, y(0)=0], [x(0)=-3, y(0)=0], [x(0)=3, y(0)=0], [x(0)=-3.3, y(0)=0], [x(0)=6, y(0)=0], [x(0)=-6, y(0)=0], [x(0)=3.3, y(0)=0], [x(0)=-4.5, y(0)=0], [x(0)=4.5, y(0)=0]], x=-8..10, y=-8..10, stepsize=.05, colour=blue, linecolor=black);

$$T(t) = T_0 + \frac{q}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kS}{cV\gamma} t} \right) -$$

искомая функция.

Рассмотренный метод может использоваться в качестве дополнения к классическим приемам решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Более общий случай, когда $A(t)$ является линейным оператором, требует дополнительных знаний из области функционального анализа.

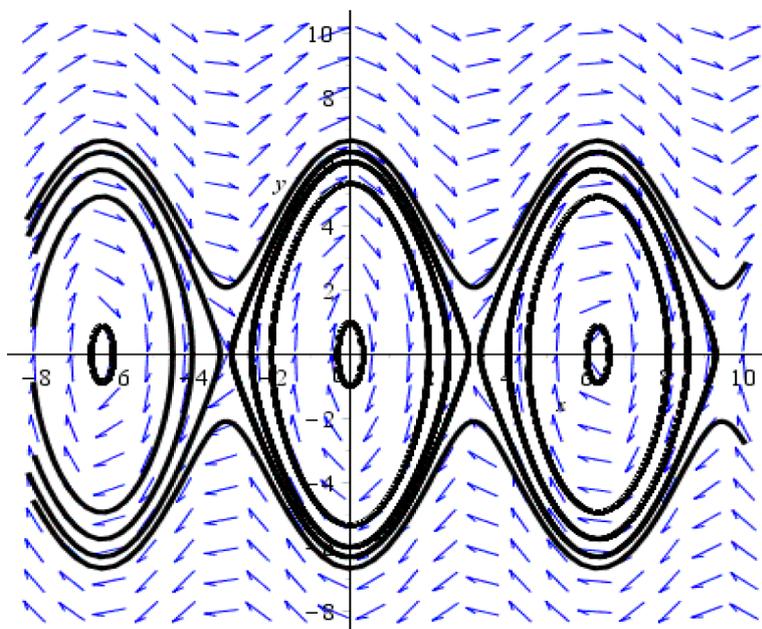
Приведем пример задачи, которая также может быть решена с использованием эволюционного оператора. Поставим цель провести исследование на устойчивость с использованием фазового портрета.

Задача 2. Рассмотрим простой маятник в случае, когда сила трения не учитывается. В этом случае уравнение маятника без учета силы трения имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x \end{cases}$$

и является консервативной в том смысле, что, если маятнику сообщено начальное ускорение, то он продолжит бесконечные колебания, что нереалистично.

Положение равновесия маятника будет наблюдаться в точках $(\pi n; 0)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Фазовый портрет этой системы для частного случая $g = 10, l = 1$ получен с помощью компьютерного моделирования.



Анализируя построенный фазовый портрет, можно сделать следующие выводы:

- траектории в окрестности точек равновесия $(0;0)$, $(2\pi;0)$ и $(-2\pi;0)$ и т.д. демонстрируют качественное поведение, характерное для траекторий в окрестности центра;

- траектории в окрестности точек равновесия $(\pi;0)$ и $(-\pi;0)$ и т.д. демонстрируют качественное поведение, характерное для траекторий в окрестности седловой точки.

Выполним проверку, выполнив расчёты для нахождения собственных чисел якобиана, вычисленного в точках $(0;0)$ и $(\pi;0)$:

```
> J := Matrix(2, 2, [diff(f1(x, y), x) - lambda, diff(f1(x, y), y),
                    diff(f2(x, y), x), diff(f2(x, y), y)
                    - lambda]);
```

$$J := \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -10 \cos(x) & -\lambda \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg) : ge := det(J);
```

$$ge := \lambda^2 + 10 \cos(x)$$

```
> x := 0; y := 0;
```

$$\begin{aligned} x &:= 0 \\ y &:= 0 \end{aligned}$$

```
> lambda_1,2 := solve(ge(lambda) = 0, {lambda});
```

$$\lambda_{1,2} := \{\lambda = (\lambda \rightarrow -1\sqrt{10}), \{\lambda = (\lambda \rightarrow -1\sqrt{10})\}\}$$

```
> x := pi; y := 0;
```

$$\begin{aligned} x &:= \pi \\ y &:= 0 \end{aligned}$$

```
> lambda_1,2 := solve(ge(lambda) = 0, {lambda});
```

$$\lambda_{1,2} := \{\lambda = (\lambda \rightarrow \sqrt{10}), \{\lambda = (\lambda \rightarrow -\sqrt{10})\}\}$$

Так как в точке равновесия $(0;0)$ якобиан имеет собственные числа $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{10}$, то эта точка является устойчивым фокусом. В точке $(\pi;0)$ собственные числа якобиана равны $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{10}$. Поэтому $(\pi;0)$ – седловая точка.

Таким образом, качественное исследование точек равновесия простого маятника может быть проведено с помощью построения фазового портрета и с исполь-

зованием соответствующей линеаризованной модели.

Список литературы

1. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
2. Елецких И.А. Вопросы теории операторов и уравнений типа Романовского с частными интегралами: дисс... канд. физ.-мат. наук. – Липецк, 2005. – С. 87–92.
3. Елецких И.А., Левченко М.П. Приложение теории эволюционного оператора к решению дифференциальных уравнений первого порядка // Вестник ЕГУ (История и теория математического образования). – Елец, 2010. – С. 270–275.