

УДК 517:004.6/91

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОКУМЕНТАЦИОННОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ УЧЕБНЫХ КУРСОВ С ПОМОЩЬЮ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

Коваль Д.В., Огурцова М.Д., Гончарь П.С.

ФГБОУ ВО Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург,
e-mail: petr_gonchar@el.ru

В статье рассмотрен частный случай обслуживания потока запросов в элементарном подразделении достаточно крупной организации. С одной стороны, эта задача имеет непосредственное прикладное значение, а с другой – позволяет сделать некоторые выводы общего характера. В качестве математического аппарата использована модель замкнутой системы массового обслуживания на основе «процесса гибели-размножения» и марковских цепей с непрерывным временем перехода. Полученные первичные результаты были подвергнуты качественному анализу, позволившему выделить ключевые характеристики системы и уменьшить количество рассматриваемых ситуаций. Затем они обрабатывались методами теории вероятностей для получения обобщающих характеристик. Показано, что, с увеличением номинальной производительности обслуживающей системы, возрастает не только ожидаемое количество обслуженных заявок, но и дисперсия этого значения.

Ключевые слова: Марковская цепь, производительность, вероятностный прогноз

MODELING OF THE DOCUMENTAL SUPPORT OF EDUCATIONAL COURSES WITH THE USE OF MARKOV PROCESS

Koval D.V., Ogurtsova M.D., Gonchar P.S.

Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, e-mail: petr_gonchar@el.ru

The article considers a particular case of servicing the flow of requests in an elementary subdivision of a fairly large organization. On the one hand, this task has a direct practical importance, and on the other hand it allows us to draw some general conclusions. As a mathematical apparatus, a model of a closed queuing system based on the “death-multiplication process” and Markov process with a continuous transition time is used. The primary results were subjected to a qualitative analysis, which allowed identify the key characteristics of the system and reduce the number of considered cases. Then they were processed by methods of probability theory to obtain generalizing characteristics. It is shown that, with the increase in the nominal performance of the maintenance system, not only the expected number of serviced applications increases, but also the variance of this value.

keywords: Markov process, productivity, probability forecast

Проблема исследования

За кафедрой естественнонаучных дисциплин Уральского госуниверситета путей сообщения закреплено 214 учебных курсов, которые должны быть обеспечены рабочими программами. Этот массив документов требует корректировки в связи с появлением новых требований и коррекцией учебных планов. Возникает необходимость вероятностного прогнозирования работы сотрудников кафедры, занятых этим вопросом.

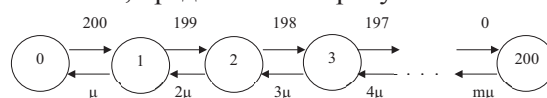
Задача исследования

Подразделение обеспечивает соответствие документов текущим требованиям. Количество документов прием равным двумстам. Каждый документ в течение года (в случайном порядке) требует коррекции. Эту работу выполняют несколько (m) исполнителей с ограниченной производительностью. Задачей нашего исследования было изучение закономерности такого случайного процесса.

Техника исследования, первичный план и его коррекция

Первоначально предполагалось рассмотреть разное количество исполнителей (m равное от 1 до 4) с их разной номинальной производительностью (от 20 до 40) с помощью аппарата теории замкнутых систем массового обслуживания (СМО), описанного в [1] и [2].

Граф состояний марковского процесса гибели-размножения, соответствующего такой СМО, представлен на рисунке.



В приведенном графе:

- Номер состояния соответствует количеству документов (из 200), требующих коррекции.
- Интенсивности перехода с увеличением номера состояния определяются количе-

ством документов, не требующих коррекций в рассматриваемом состоянии.

– Интенсивности переходов с уменьшением номера состояния пропорциональны количеству каналов, вступивших в работу, и их номинальной производительности.

При известных интенсивностях переходов вероятности состояний находятся следующим образом (с некоторым изменением использован алгоритм, приведенный в [3]). Сначала последовательно определяются вспомогательные коэффициенты k_i .

$$k_0 = 1, \quad k_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1},$$

$$k_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} k_1, \quad k_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} k_2, \quad \dots$$

т.е. $k_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} k_{i-1}, \quad i = 0 \dots n$

Затем появляется возможность последовательно определить значения p_0 и p_i .

$$p_0 = (1 + k_1 + k_2 + \dots + k_n)^{-1},$$

$$p_i = k_i p_0, \quad \text{где } i = 0 \dots n$$

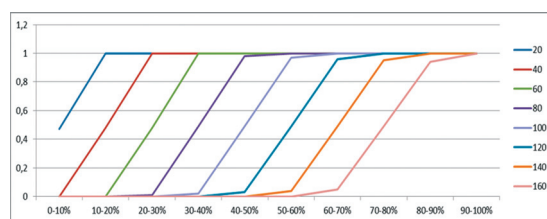
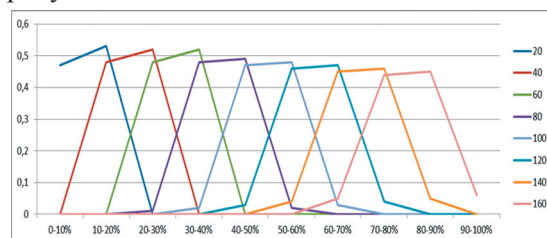
Причем

$$p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1$$

Результаты вычисления вероятностей состояний, после группирования, интерпретировались как «успеваемость» кафедры, то есть вероятности того, что некоторая доля от обслуживаемых рабочих программ – в «исправном» состоянии.

В результате применения данной техники к ситуациям с разным количеством исполнителей были, в первую очередь, получены распределения вероятностей разных состояний «успеваемости». Парно сравнивая результаты моделирования для СМО с разным количеством каналов обслуживания, но одинаковой общей номинальной производительностью всех каналов, мы заметили, что практическое значение имеет общая номинальная производительность СМО, а не её составные части. Действительно, различия в моделях этих СМО наблюдаются только в нескольких первых состояниях (причем, далеко не самых вероятных) из двухсот. Поэтому из дальнейшего исследования были исключены некоторые дубликаты ситуаций и дополнительно введены случаи с общей номинальной производительностью СМО μ , равной 100 и 140, не реализованные в первичном плане.

Полиномы полученных распределений (для разных значений номинальной производительности СМО) и их интегральные функции представлены на двух следующих рисунках и в таблице:



пр-ть	20	40	60	80	100	120	140	160
0-10%	0,47	0	0	0	0	0	0	0
10-20%	0,53	0,48	0	0	0	0	0	0
20-30%	0	0,52	0,48	0,01	0	0	0	0
30-40%	0	0	0,52	0,48	0,02	0	0	0
40-50%	0	0	0	0,49	0,47	0,03	0	0
50-60%	0	0	0	0,02	0,48	0,46	0,04	0
60-70%	0	0	0	0	0,03	0,47	0,45	0,05
70-80%	0	0	0	0	0	0,04	0,46	0,44
80-90%	0	0	0	0	0	0	0,05	0,45
90-100%	0	0	0	0	0	0	0	0,06

Общие выводы по распределениям и статистикам

Полученные в первичном исследовании результаты были подвергнуты вторичной обработке путем определения обобщающих характеристик, что соответствует рекомендациям в [4]. По ним сделаны выводы:

– В исследованном диапазоне мода распределения практически линейно зависит от общей номинальной производительности СМО.

– Математическое ожидание номера состояния в рассмотренном диапазоне совпадает с его модой.

– Вероятность десяти состояний, близких к моде, убывает при увеличении производительности СМО.

– Дисперсия номера состояния совпадает с номинальной производительностью СМО.

Только для СМО с производительностью 160 появляется заметное отклонение от последней из указанных выше закономерностей, что привлекает внимание к таким режимам работы СМО, в которых её производительность близка к максимально возможной интенсивности поступающих заявок.

В данном случае были взяты 5 человек с производительностью 40 и общей производительностью СМО, равной 200. Обнаружились существенные отклонения от общих закономерностей. Наиболее вероятное состояние СМО – четвертое, дисперсия номера состояния становится относительно малой.

Основные выводы исследования

– Исследование показало, что в большом диапазоне значений производительности СМО (10-80% от максимальной интенсивности заявок) из-за действия «законов больших чисел» для предсказания фактической производительности СМО случайностями в потоке заявок можно пренебрегать, то есть производительность СМО определяется пропускной способностью каналов, а не этими случайностями.

– При приближении производительности СМО к максимальной интенсивности

заявок явно влияют особенности потока заявок, а дисперсия состояний возрастает (однако, при дальнейшем увеличении производительности, дисперсия демонстрирует резкий спад).

– Заметно, что взятая модель не вполне отражает действительность: из исследования следует, что каналы в СМО практически не простаивают, а в действительности простои имеют место.

Список литературы

1. Вентцель Е. С. Исследование операций. – М. : Сов. Радио, 1972.
2. Марковские процессы и системы массового обслуживания: практикум / П. С. Гончарь, Н. В. Медведева, В. Л. Розинберг. – Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2012.
3. Кац И. Я., Скачков П. П., Толмачева М. А. Математические модели массового обслуживания: Программно-методический комплекс. – Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2001.
4. Копытина В.А. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ В БАНКОВСКОМ ДЕЛЕ // Международный студенческий научный вестник. – 2016. – № 3-3. – С. 389-390; URL: <https://www.eduherald.ru/ru/article/view?id=15026> (дата обращения: 24.05.2017).