

УДК 51-7: 621.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ТОКАМИ

Гулай Т.А., Гринько А.Д., Пантелова Е.М.

ФГБОУ ВО Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь,
e-mail: inf@stgau.ru

Расчёт цепи несинусоидального тока выполняется методом наложения для каждой гармоники ЭДС действующей в цепи. Периодические несинусоидальные токи и напряжения в электрических цепях возникают в случае действия в них несинусоидальных ЭДС, а так же наличия в них нелинейных элементов. Реальные ЭДС, напряжения и токи в электрических цепях синусоидального переменного тока по разным причинам отличаются от синусоиды. В энергетике появление несинусоидальных токов или напряжений нежелательно, т.к. вызывает дополнительные потери энергии. Однако существуют большие области техники (радиотехника, автоматика, вычислительная техника, полупроводниковая преобразовательная техника), где несинусоидальные величины являются основной формой ЭДС, токов и напряжений. В данной работе мы рассмотрим методы расчёта линейных электрических цепей при воздействии на них источников периодических несинусоидальных ЭДС.

Ключевые слова: несинусоидальные токи, математическая модель, комплексный метод, цепь, метод наложения

MATHEMATICAL MODEL OF CALCULATION OF ELECTRIC CIRCUITS WITH NON-SINUSOIDAL CURRENTS

Gulay T.A., Grinko A.D., Pantelova E.M.

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru

The calculation of the non-sinusoidal current circuit is performed by the superposition method for each harmonic of the EMF acting in the circuit. Periodic non-sinusoidal currents and voltages in electrical circuits arise in the case of actions to them non-sinusoidal EMF and the presence of nonlinear elements. Real EMF, voltages and currents in electric circuits with sinusoidal alternating current, for various reasons, differ from sine waves. In the energy sector the emergence of non-sinusoidal currents or voltages is undesirable, as it causes additional energy losses. However, there are large areas of technology (engineering, automation, computer engineering, semiconductor converter equipment), where non-sinusoidal quantities are the main form of EMF, currents and voltages. In this work we consider the methods of calculation of linear electric chains when exposed to sources of periodic non-sinusoidal EMF.

Keywords: non-sinusoidal currents, mathematical model, complex method, circuit, method of superposition

В математическом образовании решение задач, выступая и как цель, и как средство обучения, играют важную роль. Текстовые задачи прикладной направленности представляют собой простейший тип математического моделирования. Именно здесь формируется творческий характер использования приобретаемых математических знаний, складывается положительная мотивация изучения математики. В процессе решения задач студенты осознают, что получаемые ими математические знания не накапливаются впрок, а постоянно используются при изучении специальных дисциплин; математика – это не «тяжелый багаж», который когда-нибудь может быть пригодится, а средство формирования и повышения их профессионального мастерства.

Одной из специальных дисциплин, входящих в образовательную программу по специальности «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства», является «Теоретические основы электротехники».

Рассмотрим пример задачи по данной дисциплине с применением основных математических моделей.

Расчёт цепи несинусоидального тока выполняется методом наложения для каждой гармоники ЭДС действующей в цепи. При расчёте можно пользоваться комплексным методом, учитывая, что индуктивное сопротивление для k -й гармоники равно $X_{kL} = \omega_k L = k\omega_1 L$, а ёмкостное

$$X_{kC} = \frac{1}{\omega_k C} = \frac{1}{k\omega_1 C} \quad [1].$$

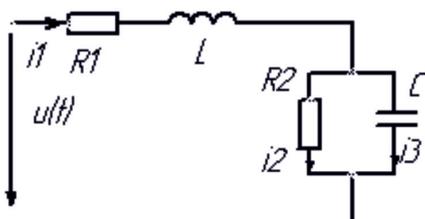
Расчёт цепи для постоянной составляющей соответствует расчёту на постоянном токе, но его можно вести также как на переменном токе, полагая для реактивных сопротивлений $k = 0$. Тогда $X_{0L} = 0$, а $X_{0C} = \infty$. Следовательно, индуктивный элемент будет эквивалентен замыканию, а ёмкостный – разрыву цепи между точками включения [2].

Выполним в качестве примера расчёт мгновенных токов ветвей, найдем их дей-

ствующие значения для цепи, изображенной на рисунке. Пусть входное напряжение равно

$$u(t) = 50 + 141 \sin(\omega t + 30^\circ) + 70,7 \sin(3\omega t - 60^\circ), B.$$

Параметры элементов цепи: $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $\omega L = 3$ Ом, $\frac{1}{\omega C} = 9$ Ом [3].



Электрическая цепь

Рассчитаем цепь от действия постоянной составляющей $U_{(0)} = 50$ В :

$$I_{1(0)} = I_{2(0)} = \frac{U_{(0)}}{R_1 + R_2} = \frac{50}{20 + 5} = 2 \text{ A}; I_{3(0)} = 0.$$

Произведем расчет параметров цепи от действия первой гармоники:

$$u_{(1)} = 141 \sin(\omega t + 30^\circ), B;$$

$$\dot{U}_{(1)} = 100e^{j30}, B.$$

Далее найдем комплексное сопротивление параллельного участка:

$$Z_{23(1)} = \frac{Z_2 * Z_{3(1)}}{Z_2 + Z_{3(1)}} = \frac{R_2 \left(-j \frac{1}{\omega C} \right)}{R_2 - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{5 * (-j9)}{5 - j9} = 4,37e^{-j29,05^\circ} = 3,82 - j2,12, \text{ Ом}.$$

Получим эквивалентное комплексное сопротивление всей цепи для первой гармоники:

$$Z_{(1)} = Z_{1(1)} + Z_{23(1)} = R_1 + j\omega L_1 + Z_{23(1)} = 20 + j3 + 3,82 - j2,12 = 23,82 + j0,88 = 23,9e^{j2,12^\circ}, \text{ Ом}.$$

Для первой гармоники комплекс действующего значения общего тока будет равен:

$$I_{1(1)} = \frac{\dot{U}_{(1)}}{Z_{(1)}} = \frac{100e^{j30^\circ}}{23,9e^{j2,12^\circ}} = 4,184e^{j27,88^\circ}, A.$$

Напряжение на параллельном участке цепи:

$$U_{23(1)} = I_{1(1)} * Z_{23(1)} = 4,184e^{j27,88^\circ} * 4,37e^{-j29,05^\circ} = 18,28e^{-j1,17^\circ}, B$$

Токи во второй и третьей ветвях:

$$I_{2(1)} = \frac{U_{23(1)}}{R_2} = \frac{18,28e^{-j1,17^\circ}}{5} = 3,66e^{-j1,17^\circ}, A$$

$$I_{3(1)} = \frac{U_{23(1)}}{-j \left(\frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{18,28e^{-j1,17^\circ}}{-j9} = 2,03e^{j88,83^\circ}, A$$

Мгновенные значения токов для первой гармоники:

$$i_{1(1)} = 4,184\sqrt{2} \sin(\omega t + 27,88^\circ), A;$$

$$i_{2(1)} = 3,66\sqrt{2} \sin(\omega t - 1,17^\circ), A;$$

$$i_{3(1)} = 2,03\sqrt{2} \sin(\omega t + 88,83^\circ), A.$$

Произведем расчет параметров цепи для третьей гармоники:

$$u_{(3)} = 70,7 \sin(3\omega t - 60^\circ), B; U_{(3)} = 50e^{-j60^\circ}, B.$$

Получим комплексные сопротивления для третьей гармоники:

$$Z_{23(1)} = \frac{Z_2 * Z_{3(3)}}{Z_2 + Z_{3(3)}} = \frac{R_2 \left(-j \frac{1}{3\omega C} \right)}{R_2 - j \frac{1}{3\omega C}} = \frac{5 * (-j3)}{5 - j3} = 2,57e^{-j59^\circ} = 1,32 - j2,2, \text{ Ом.}$$

$$Z_{(1)} = R_1 + j3\omega L + Z_{23(3)} = 20 + j9 + 1,32 - j2,2 = 21,32 + j6,8 = 22,38e^{j17,69^\circ}, \text{ Ом.}$$

Следующим шагом будет нахождение токов и напряжения:

$$I_{1(3)} = \frac{U_{(3)}}{Z_{(3)}} = \frac{50e^{-j60^\circ}}{22,38e^{j17,69^\circ}} = 2,23e^{j77,69^\circ}, A;$$

$$U_{23(3)} = I_{1(3)} * Z_{23(3)} = 2,23e^{-j77,69^\circ} * 2,57e^{-j59^\circ} = 5,73e^{-j136,69^\circ}, B;$$

$$I_{2(3)} = \frac{U_{23(3)}}{R_2} = \frac{5,73e^{-j136,69^\circ}}{5} = 1,146e^{-j136,69^\circ}, A;$$

$$I_{3(3)} = \frac{U_{23(3)}}{-j \left(\frac{1}{3\omega C} \right)} = \frac{5,73e^{-j136,69^\circ}}{-j3} = 1,91e^{-j46,69^\circ}, A.$$

Мгновенные значения токов третьей гармоники будут равны:

$$i_{1(3)} = 2,23\sqrt{2} \sin(3\omega t - 77,69^\circ), A;$$

$$i_{2(3)} = 1,146\sqrt{2} \sin(3\omega t - 136,69^\circ), A;$$

$$i_{3(3)} = 1,91\sqrt{2} \sin(3\omega t - 46,69^\circ), A.$$

Теперь найдем значения результирующих токов в ветвях:

$$i_1 = I_{1(0)} + i_{1(1)} + i_{1(3)} = 2 + 4,184\sqrt{2} \sin(\omega t + 27,88^\circ) + 2,23\sqrt{2} \sin(3\omega t - 77,69^\circ), A;$$

$$i_2 = I_{2(0)} + i_{2(1)} + i_{2(3)} = 2 + 3,66\sqrt{2} \sin(\omega t - 1,17^\circ) + 1,146\sqrt{2} \sin(3\omega t - 136,69^\circ), A;$$

$$i_3 = I_{3(0)} + i_{3(1)} + i_{3(3)} = 2,03\sqrt{2} \sin(\omega t + 88,83^\circ) + 1,91\sqrt{2} \sin(3\omega t - 46,69^\circ), A.$$

В итоге получим действующие значения токов для трех ветвей:

$$I_1 = \sqrt{I_{1(0)}^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2} = \sqrt{2^2 + 4,184^2 + 2,23^2} = 5,146, A;$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2(0)}^2 + I_{2(1)}^2 + I_{2(3)}^2} = \sqrt{2^2 + 3,66^2 + 1,146^2} = 4,32, A;$$

$$I_3 = \sqrt{I_{3(0)}^2 + I_{3(1)}^2 + I_{3(3)}^2} = \sqrt{2,03^2 + 1,91^2} = 2,79, A.$$

Все этапы решения данной задачи прикладного характера направлены на формирование профессионально важных качеств будущих инженеров:

- аналитического мышления;
- профессиональной компетентности;
- критического мышления.

При решении подобных текстовых задач на практических занятиях мы столкнулись с тем, что у нас недостаточно сформированы общие умения решения задач, имеются пробелы в знании физических законов. Как следствие из этого, мы испытывали затруднения в построении математической модели задачи.

Для устранения подобных проблем мы хотим рекомендовать следующее:

- решать прикладные задачи систематически, а не время от времени;
- для подготовки к решению конкретной задачи прикладного характера,
- необходимо повторение основных физических законов, применяемых в решении;
- необходимо понимать, при изучении какой специальной дисциплины и в каком разделе будет использоваться построенная математическая модель.

Таким образом, навык решения подобных прикладных задач является эф-

фективным средством формирования профессионально важных качеств будущих инженеров.

В данной статье было показано применение метода наложения для расчета данных цепи с несинусоидальными токами. Рассмотренная нами задача может в дальнейшем являться подспорьем в нахождении данных подобных цепей [4].

Список литературы

1. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б. Государственное регулирование в системе агробизнеса // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона: Ежегодная 76-я науч.-практ. конф. «Аграрная наука – Северо-Кавказскому региону». СтГАУ. 2012. С. 202–207.
2. Моделирование отрыва пузырьков пара в кипящей магнитной жидкости / Яновский А.А., Симоновский А.Я., Холопов В.Л. // В сборнике: Физико-химические и прикладные проблемы магнитных дисперсных наносистем V Всероссийская научная конференция с международным участием: сборник научных трудов. 2015. С. 239-246.
3. Попова С.В., Смирнова Н.Б. Элементы алгоритмизации в процессе обучения математике в высшей школе // Современные проблемы развития экономики и социальной сферы: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., посвященной 75-летию Ставропольского государственного аграрного университета. 2005. С. 526–531.
4. Теплообмен в кипящей магнитной жидкости / Яновский А.А., Симоновский А.Я., Холопов В.Л. // В сборнике: Физико-химические и прикладные проблемы магнитных дисперсных наносистем V Всероссийская научная конференция с международным участием: сборник научных трудов. 2015. С. 276-282.