УДК 51–7: 621.3

РАСЧЕТ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Гулай Т.А., Диговцов Г.В., Красько А.А.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь, e-mail: inf@stgau.ru

Комплексные числа – один из разделов курса математического анализа более всего подходящий для профессиональной направленности инженеров-бакалавров по направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника», а также «Электроэнергетика и электротехника». При изучении комплексных чисел нужно учитывать применение знаний математики в специальных и общетехнических дисциплинах, в частности электротехнике. К КЧ применимо понятие сопряжения. Им называют те числа, которые равны по величине модулей и аргументов, но имеют разные знаки у аргументов. Использование комплексных чисел дает инженерам возможность пользоваться законами, формулами и методами расчетов, применяющиеся в цепях постоянного тока, для проведения расчетов цепей переменного тока, упрощать различные расчеты, заменив векторно-графическое решение алгебраическими методами, рассчитывать сложные цепи, которые невозможно решить иным путем, упрощать расчеты цепей переменного и постоянного токов.

Ключевые слова: комплексные числа, действительная часть, мнимая часть, цепь, проводимость, сопротивление

CALCULATION OF SINUSOIDAL QUANTITIES IN ELECTRICAL ENGINEERING USING COMPLEX NUMBERS

Gulay T.A., Digovtcov G.V., Krasko A.A.

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru

A complex number is one of the sections of the course mathematical analysis more suited to the professional orientation of engineers and bachelors in the direction of preparation «computer science» and «power and electrical engineering». When you study complex numbers you need to consider the application of knowledge of mathematics in special and General engineering disciplines, including electrical engineering. The concept of conjugation is applicable to the CN. They are called those numbers that are equal in magnitude to the modules and arguments, but have different signs for the arguments. Using complex numbers allows engineers to use the laws, formulas and methods of calculations used in DC circuits, for calculations of AC circuits, to simplify various calculations, replacing the vector-graphical solution algebraic methods to calculate complex circuit impossible to resolve in any other way, to simplify the calculations of AC and DC currents.

Keywords: complex number, real part, imaginary part, circuit, conductivity, resistance

Одно из первых упоминаний о «мнимых» числах как о квадратных корнях из отрицательных чисел ученые относят к XVI веку. Итальянский инженер и математик Джироламо Кардано (1501–1576) внёс значительный вклад в развитие алгебры. В 1545 году опубликовал работу, в которой, при попытке решить уравнение $x^3 - 12x + 16 = 0$, он получил выражение $\sqrt{-243}$. Через получившиеся выражение представлялись действительные корни уравнения: $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -4$. Так, в работе, Кардано мнимые числа упоминались как промежуточные звенья в вычислительных действиях. Заслуга Кардано заключалась в том, что он допустил существование «несуществующего» числа $\sqrt{-1}$, вводя правило умножения: $\sqrt{-1} * \sqrt{-1} = -1$. Так он первым в Европе стал использовать отрицательные корни уравнений.

Несмотря на это еще в течении нескольких сотен лет математики пытались привыкнуть к этим новым «мнимым» числам, порой предпринимая попытки избавиться от них. И только с XIX века, после публикации Карлом Фридрихом Гауссом (1777–1855) своих работ, написанных в доказательство основной теоремы алгебры, комплексные числа прижились в науке.

Вовремя расчетах цепей приходится проводить математические действия с комплексными числами, поэтому студенты инженерных направлений должны уметь выполнять следующие операции:

1) переводить комплексное число из начальной формы в необходимую;

2) находить аргумент и модуль комплексного числа и комплексное число по модулю и аргументу;

3) производить основные арифметические действия с комплексными числами [1].

Кроме того, очень важно уметь строить вектор и кривую исходя из уравнения синусоиды, вектор по комплексному числу, определять комплексное число по вектору и уравнению, уравнение по комплексному числу.

Подавляющее количество электроустановок работает на переменном токе, который изменяется по синусоидальному закону. Этим можно объяснить, почему в электротехнике тематике «Переменный ток» уделено наиважнейшее внимание [2].

Термином комплексного числа (далее в тексте – КЧ) пользуются для обозначения выражений вида: $\dot{c} = a + jb$, в которых индекс *«ċ»* используется для обозначения КЧ, а *«a» и «b»* отображают действительную и мнимую части. Значение *«j»* обозначает мнимую единицу и равно $\sqrt{(-1)}$.

В английском языке словом *Real* принято характеризовать действительность, а термином *Imaginary* – мнимые свойства. От этих слов были созданы обозначения *Re* и *Im*, которые используются для выражения величин *«a»* и *«b»* следующим способом:

$$a = Re(c), b = Im(c).$$

Для геометрического отображения КЧ в векторной форме применяется комплексная плоскость. У нее горизонтальная ось помечается знаком *+1*, а вертикальная – символом *+j*. Термин действительной (реже вещественной) части используется для наименования горизонтальной оси, а для вертикальной – мнимой.

Обе составляющие (действительная и мнимая) КЧ являются прямоугольными проекциями вектора на соответствующие оси.

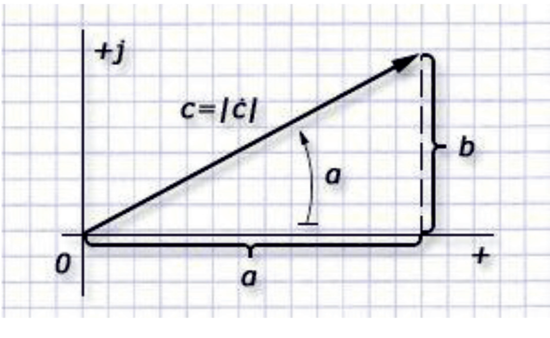

Рис. 1

В представленном графике значение $c = |\dot{c}|$ именуется модулем КЧ и равно длине вектора. Другим параметром, определяющим положение радиус-вектора, является его угол поворота α от оси *+1* до текущего положения *ċ*, считающийся аргументом. $\alpha = arq\dot{c}$.

Катеты треугольника представляются через соотношения:

$$a = cos\alpha, b = csin\alpha.$$

Используя тригонометрическую форму для выражения КЧ можно представить его в виде:

$$\dot{c} = c(cos\alpha + jsin\alpha).$$

Используя формулу Эйлера *ej*α = cosα + + *jb*sinα, можно получить значение модуля в показательной форме $\dot{c} = cej\alpha$.

В полярной форме выражение имеет вид:

$$\dot{c} = c\angle\alpha .$$

Положение единичного вектора можно изобразить на комплексной плоскости:

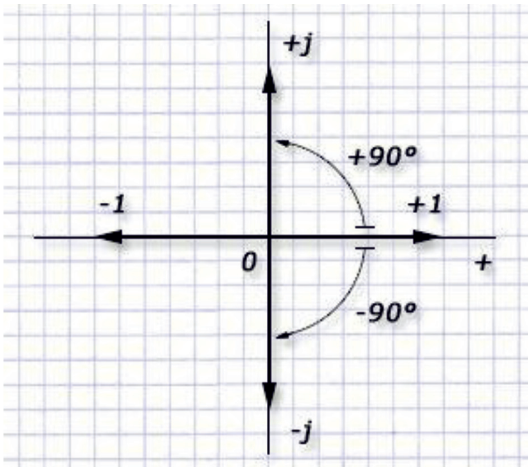

Рис. 2

Мнимая единица имеет свойства:

$$j = ej90°, j2 = -1 = ej180°,$$

$$j3 = jj2 = -j = ej270° = e - j90°,$$

$$j4 = j2j2 = 1 = ej0 = ej2\Pi,$$

$$1 / J = 1j / Jj = J / -1 = -j.$$

К КЧ применимо понятие сопряжения. Им называют те числа, которые равны по величине модулей и аргументов, но имеют разные знаки у аргументов.

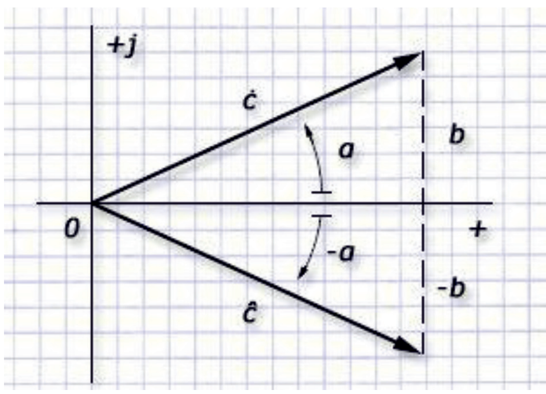

Рис. 3

$$\dot{c} = a + jb = cej\alpha, \hat{c} = a - jb = cej\alpha.$$

Из графика видно, что изображенные векторами КЧ симметричны по отношению к горизонтальной оси.

КЧ и математические действия. Для их сложения или вычитания делается запись в алгебраическом выражении:

$$\dot{c} = \dot{c}_1 + \dot{c}_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) =$$

$$= (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = a + jb.$$

В этом соотношении отдельно суммируются мнимые и вещественные составляющие:

$$\dot{a} = \dot{a}_1 + \dot{a}_2, b = b_1 + b_2.$$

Данные алгебраические сложения чисел выражают выполнение сложения соответствующих им векторов.

Выполняя сложение сопряженных чисел можно заметить, что их сумма выражается удвоенным значением вещественной составляющей:

$$\dot{c} + \hat{c} = (a + jb) + (a - jb) = 2a.$$

Выражения КЧ в показательной форме удобны для выполнения умножения или деления. При этом у них модули перемножают или делят, значения аргументов складывают либо вычитают.

$$\dot{c} = \dot{c}_1\dot{c}_2 = c_1ej\alpha_1c_2ej\alpha_2 = c_1c_2ej(\alpha_1 + \alpha_2) = cej\alpha;$$

$$\dot{c} = \dot{c}_1 / \dot{c}_2 = c_1ej\alpha_1 / c_2ej\alpha_2 =$$
$$= c_1ej(\alpha_1 - \alpha_2) / c_2 = cej\alpha.$$

В выражении $c = c_1 / c_2, \alpha = \alpha_1 - \alpha_2$.

Нетрудно заметить, что при действии умножения длина вектора увеличивается в величину c_2, а аргумент – на значение a_2. При представлении КЧ векторами соблюдается закономерность: для умножения вектора на КЧ вида $ae^{j\alpha}$ достаточно растянуть вектор в a раз и довернуть на угол α.

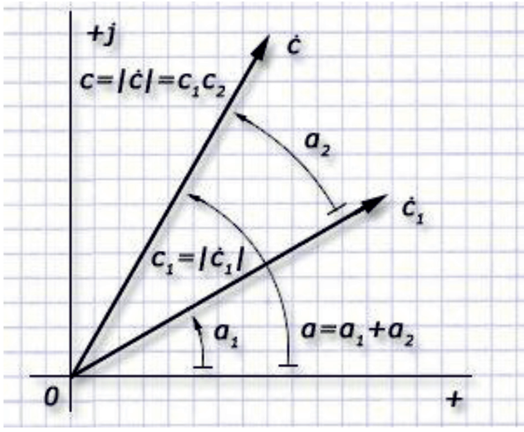

Рис. 4

Для вычисления произведения сопряженных чисел достаточно взять квадрат их модуля:

$$\dot{c}\hat{c} = (a + jb)(a - jb) = a_2 + b_2,$$

или

$$\dot{c}\dot{c} = cej\alpha ce - j\alpha = c_2.$$

Для перемножения и деления КЧ при определенных условиях удобно пользоваться их алгебраическим выражением. В таком виде действия проводятся по законам умножения многочленов и учете значения $j_2=-1$.

$$\dot{c} = \dot{c}_1\dot{c}_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) =$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(b_1a_2 + a_1b_2).$$

Для деления чисел достаточно избавиться от значения j в выражении знаменателя методом перемножения знаменателя и числителя на одно и то же выражение сопряженного знаменателя:

$$\dot{c} = \dot{c}_1 / \dot{c}_2 = ((a_1 + jb_1) / (a_2 + jb_2))((a_2 - jb_2) / (a_2 - jb_2)) =$$
$$= ((a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 - a_1b_2)) / (a_{22} + jb_{22}) = a + jb;$$

$$a = (a_1a_2 + b_1b_2) / (a_{22} + b_{22}); \quad b = (b_1a_2 - a_1b_2) / (a_{22} + b_{22}).$$

Графики построенных векторных диаграмм могут иметь изображение (рис. 5):

Для выражения значения тока с синусоидальной формой пользуются соотношением $i = Imsin(\omega t + \psi)$, которым изображают на комплексной плоскости вектор с длиной Im и углом наклона ψ к горизонту. Его выражение $Im = Imej\psi$ считают комплексной амплитудой для тока. представляют графиком (рис. 6).

Чтобы получить действующую величину для тока требуется комплексную амплитуду разделить на $\sqrt{2}$.

$$\dot{I} = \dot{I}m / \sqrt{2} = ej\psi\ \mathrm{Im} / \sqrt{2} = Iej\psi.$$

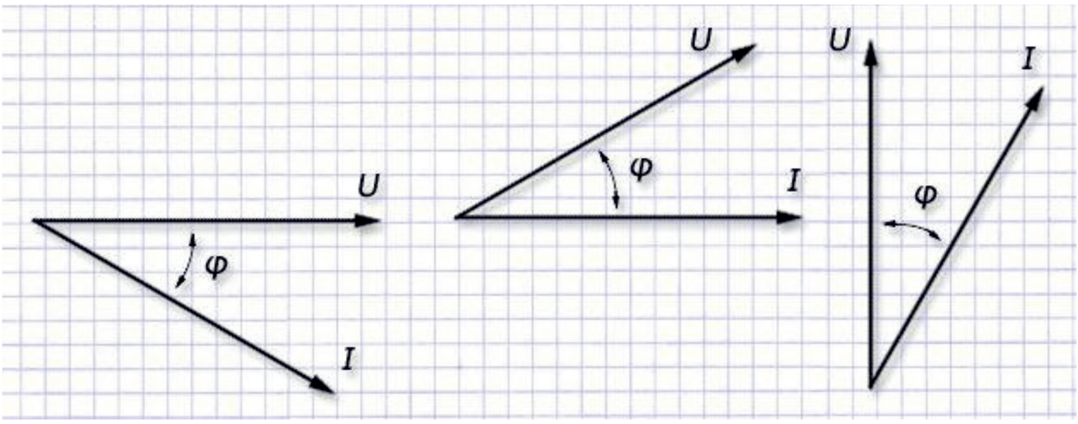

Рис. 5

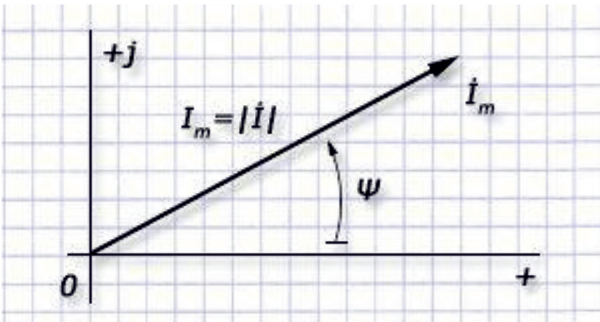

Рис. 6

В электротехнике заглавные буквы с расположенными над ними точками *(E, U, I)* используются для обозначения КЧ, выражающих синусоидальные зависимости от времени ЭДС, напряжения и тока [3].

Обозначение комплексной проводимости и сопротивления делается прописными буквами *Y* и *Z*, для показа их модулей используется строчное написание *y* и *z*. Обозначение комплексной мощности выполняется символом *S* со значком тильда *«~»* над ним.

Список литературы

1. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Долгополова А.Ф. Коррекция динамического диапазона статистических данных // Статистика вчера, сегодня, завтра : Междунар. науч.-практ. конф., посвященная 155-летию образования Ставропольского губернского комитета статистики, 150-летию образования в России Центрального статистического комитета и Международному году статистики. 2013. С. 148–152.

2. Гулай Т.А., Невидомская И.А., Мелешко С.В. Анализ и оценка приоритетности разделов дисциплины «Математический анализ» изучаемой студентами инженерных направлений // European Social Science Journal. 2013. № 8–2 (35). С. 109–115.

3. Мамаев И.И., Бондаренко В.А., Попова С.В. Методы дифференциального исчисления в математическом моделировании экономических процессов // Моделирование производственных процессов и развитие информационных систем: 2-я Междунар. науч.-практ. конфРоссия. 2011. С. 162-164.