

УДК 514.742.2: 531: 534

ЗАКОНЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕХАНИКЕ**Сырман А.В., Ревегук Ю.А.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,
e-mail: inf@stgau.ru*

Методы векторной алгебры имеют большое преимущество перед координатным методом. Это преимущество проявляется в краткости и наглядности формул, в том, что векторные (тензорные) формулы не связаны с системой координат и поэтому не меняются при переходе одной системы координат к другой, то есть векторные формулы инвариантны по отношению к преобразованиям координат. Векторная алгебра стала неотъемлемой частью математического аппарата, который лежит в основе современной механики. Поэтому успешное изучение механики и других технических наук невозможно без знания векторной алгебры. Изучение механики позволяет авторам продолжать активно овладевать математическим аппаратом, который лежит в ее основе, приближаться к видению имеющихся соответствий между абстрактными символами и реальными объектами, обеспечивая тем самым успех своего технического образования.

Ключевые слова: механика, вектор, векторное пространство, равновесие тел, сила**THE LAWS OF VECTOR ALGEBRA AND THEIR APPLICATION IN MECHANICS****Sirman A.V., Reveguk Y.A.***Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Stavropol State Agrarian
University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru*

Methods of vector algebra have great advantage over the coordinate method. This advantage is manifested in the brevity and clarity of formulas in that vector (tensor) formula are not associated with a coordinate system and therefore are not changed when the transition from one coordinate system to another, that is, a vector of formulas invariant with respect to transformations of coordinates. Vector algebra has become an integral part of the mathematical apparatus, which is the basis of modern mechanics. Therefore, a successful study of mechanics and other technical Sciences is impossible without a knowledge of vector algebra. Study of mechanics allows authors to continue to master the mathematical apparatus that underlies it, to get closer to the vision of existing correspondences between abstract symbols and real objects, thereby ensuring the success of their technical education.

Keywords: mechanics, vector, vector space, equilibrium of bodies, force

Развитие техники в современном мире заставляет инженеров решать самые разнообразные задачи: расчет сооружений, проектирование машин, двигателей и таких объектов как самолеты, тепловозы, космические корабли и т.п. Решение этих проблем имеет общую научную базу из-за того, что в данных задачах присутствуют вопросы, которые требуют изучения законов движения или равновесия тел. [1]

В механике довольно часто осуществляется взаимодействие с векторными объектами, такими как скорость, ускорение, сила и т.д. И чаще всего приходится работать не с отдельными векторами, а составлять систему. Например, сумму сил, действующих на твердое тело можно представить как единый объект-множество векторов, показывающих эти силы. [2]

Вследствие этого задачи такого рода вызывают потребность включить в обычные законы векторной алгебры, определенные законы, отображающие преобразование множеств систем векторов. Формирование таких законов становится невозможным без ограничений на рассматриваемые мно-

жества. Это должны быть достаточно обширные ограничения, так как они обязаны охватывать важные множества векторов, которые появляются в задачах механики и являются достаточно жесткими, чтобы можно было установить общие закономерности для выделяемого ими класса множеств.

В курсе элементарной физики, электронике, радиотехнике и других прикладных науках изучаются величины, которые можно разделить на два вида. Одни из них вполне определяются *числом* (длина, площадь, объем, масса, температура и др.), а другие определяются не только числом, но еще и *направлением* (сила, скорость, ускорение, ток, напряжение и др.).

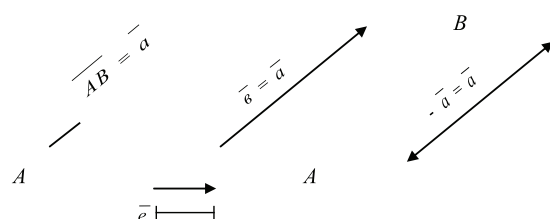
Величина, полностью характеризующая своим числовым значением в выбранной системе единиц, называется *скалярной* или скаляром (от лат. «Scala» – шкала).

Величина, которая, кроме числового значения, характеризуется еще и направлением, называется *векторной* или вектором (от лат. «Vector» – несущий). Над векторами производят действия, называемые сложением, вычитанием и умножением векторов.

Эти действия имеют много общих свойств с обычными алгебраическими действиями сложения, вычитания и умножения. Поэтому *раздел высшей математики, в котором изучаются действия над векторами называется векторной алгеброй*

Для того чтобы рассмотреть взаимосвязь векторной алгебры и механики, нам необходимо дать определения вектора в математике и механике. В математике вектор – это направленный отрезок, в механике – это величина, которая характеризуется направлением, числовым значением (модулем) и точкой приложения. [3]

Вектор изображается ориентированным (направленным) отрезком, одна из его ограничивающих точек (A) которого есть *начало*, а другая (B) – *конец* вектора (рисунок). В этом случае вектор обозначают $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$ жирной буквой (в лекциях $\vec{a}$).



линейный масштаб

Изображение векторов

Расстояние между началом и концом вектора называется *длиной* (модулем) вектора. Модуль вектора обозначают $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$. В математике векторы обычно считаются безразмерными, а модуль такого вектора – безразмерным числом.

В дальнейшем мы будем рассматривать, так называемые, *свободные* векторы, начало которых при параллельном переносе самого вектора можно помещать в любую точку пространства. В частности для свободных векторов можно обеспечить *общую их начальную точку*.

Вектор, модуль которого равен нулю (начало совпадает с концом), называется *нулевым* или *нуль-вектором* $\vec{0}$ (направление его считается произвольным).

Векторы, параллельные одной прямой, называются *коллинеарными*.

Векторы, расположенные в одной плоскости или параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Два вектора называются *ортогональными*, если они взаимно перпендикулярны.

Два вектора называются *равными*, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление ($\vec{b} = \vec{a}$).

Если дан вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, то вектор $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* вектором к вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.

Вектор, модуль которого равен единице, называется *единичным* (или ортом). Обычно он обозначается $\vec{e}$ или $\vec{a}^0$ ($|\vec{e}| = 1$).

Линейными операциями над векторами называют сложение (вычитание) векторов и умножение вектора на число

2.1. Сложение векторов.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что к концу вектора $\vec{a}$ приставлено начало вектора $\vec{b}$ (правило треугольников).

Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Сумма двух векторов $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$, приведенных к общему началу 0, есть вектор-диагональ $\vec{OC}$ параллелограмма $OACB$, построенного на векторах (правило параллелограмма).

Сложение нескольких векторов на плоскости производится при помощи последовательного применения правила треугольника. В результате этого получается результирующий вектор, который направлен из начала первого вектора суммы к концу последнего (правило многоугольника).

При сложении трех векторов, не лежащих в одной плоскости (в пространстве), применяется правило параллелепипеда: сумма трех таких векторов $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, приведенных к общему началу 0 представляет собой вектор-диагональ $\vec{OD}$ параллелепипеда, построенного на слагаемых векторах

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо неравенство треугольника

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Вычитание векторов.

Вычитание векторов определяется как операция, обратная сложению.

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ который нужно сложить с вектором $\vec{b}$, чтобы получить вектор $\vec{a}$ ($\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$).

При этом возможны те же два способа (правила) вычитания векторов: правило треугольника и правило параллелограмма.

Умножение вектора на число (скаляр).

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$, модуль которого равен произведению модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа λ , а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и про-

тивоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

При $\lambda = 0$, или $\vec{a} = 0$ считают вектор $\lambda \vec{a}$ нулевым. Из приведенных выше определений вытекают следующие *свойства* линейных операций:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительность сложения векторов – коммутативность).

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательность сложения векторов – ассоциативность).

3. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (существование противоположного вектора).

4. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (существование нулевого вектора).

5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

6) $(\lambda \cdot \mu) \vec{a} = \lambda (\mu \cdot \vec{a})$ (ассоциативность умножения на число).

7. $\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ (распределительность или дистрибутивность умножения векторов на числа относительно сложения векторов).

8. $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$ (дистрибутивность умножения векторов на числа относительно сложения чисел).

Теперь рассмотрим задачу:

На трубу АВ насажены колесо 1 (с центром в точке С) и колесо 2 (с центром в точке D). Расстояния $AC = 100$, $CD = 300$, $DB = 100$, $d_1 = 300$ мм, $d_2 = 100$ мм. Определить силы F_2 , если $F_1 = 100$ Н, и реакции опор А и В, если $F_1 = 100$ Н.

Решение:

1. Изобразим на рисунке тело, равновесие которого рассматривается, укажем все действующие на него силы, а также оси координат.

2. Определим значения F_1 и F_2 . Из условия равновесия тела, имеющего ось имеем:

$$F_1 \cdot \frac{d_1}{2} - F_2 \cdot \frac{d_2}{2} = 0$$

$$F_2 = \frac{F_1 d_1}{d_2} = \frac{100 \cdot 0,3}{0,1} = 300 \text{ Н}$$

$$F_2 = 0,4 F_2 = 0,4 \cdot 300 = 120 \text{ Н}$$

3. Следующим шагом составим шесть уравнений равновесия:

$$\sum M_x = -R_{By} \cdot AB + F_2 \cdot AD = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_y = 3F_1 \cdot AC + F_2 \cdot AD - R_{Bx} \cdot AB = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{x_1} = R_{Ay} \cdot AB - F_2 \cdot DB = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_{y_1} = R_{Ax} \cdot AB - 3F_1 \cdot CB - F_2 \cdot DB = 0 \quad (4)$$

$$\sum x = 3F_1 + F_2 - R_{Ax} - R_{By} = 0 \quad (5)$$

$$\sum y = R_{Ay} - F_2 + R_{By} = 0$$

4. Решив уравнения 1-4, определим реакции опор:

$$\text{Из (1): } R_{By} = \frac{F_2 \cdot AD}{AB} = \frac{300 \cdot 0,4}{0,5} = 240 \text{ Н}$$

$$\text{Из (2): } R_{Bx} = \frac{3F_1 \cdot AC + F_2 \cdot AD}{AB} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 0,1 + 120 \cdot 0,4}{0,5} = 156 \text{ Н}$$

$$\text{Из (3): } R_{Ay} = \frac{F_2 \cdot DB}{AB} = \frac{300 \cdot 1}{0,5} = 60 \text{ Н}$$

$$\text{Из (4): } R_{Ax} = \frac{3F_1 \cdot CB + F_2 \cdot DB}{AB} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 0,4 + 120 \cdot 0,1}{0,5} = 264 \text{ Н}$$

5. Проверим правильность решения, используя уравнения 5 и 6:

$$\begin{aligned} \sum x &= 3F_1 + F_2 - R_{Ax} - R_{By} = \\ &= 300 + 120 - 264 - 156 = 0 \end{aligned}$$

$$\sum x = 0$$

Отсюда следует, что реакции R_{Ax} и R_{Bx} найдены верно.

$$\sum y = R_{Ay} - F_2 + R_{By} = 60 - 300 + 240 = 0$$

$$\sum y = 0$$

Отсюда следует, что реакции R_{Ay} и R_{By} найдены верно.

Список литературы

1. Гулай Т.А., Невидомская И.А., Мелешко С.В. Анализ и оценка приоритетности разделов дисциплины «Математический анализ» изучаемой студентами инженерных направлений // European Social Science Journal. 2013. № 8–2 (35). С. 109–115.
2. Крон Р.В., Попова С.В., Долгих Е.В., Смирнова Н.Б. Линейная алгебра (учебное пособие) // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 11-1. – С. 115.
3. Математика. Рабочая тетрадь / Т.А. Гулай, В.А. Жукова, С.В. Мелешко, И.А. Невидомская. – Ставрополь: Сервисшкола, 2015.