УДК 378.14:004

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ В MATHCAD

**Бредун А.Н., Часов К.В.**

*Армавирский механико-технологический институт (филиал)*
*ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», Армавир,*
*e-mail: bredun.artem@mail.ru, chasov_kv@mail.ru*

В статье рассматривается вопрос методики изучения понятия «обратная матрица». Данная проблема возникает по причине неочевидности и высокой степени непонятности процесса вычисления. Приведён процесс получения интерактивного обучающего документа, подготавливаемого самим обучающимся, в котором он повторяет уже известные ему факты из теории. Исследование в математической среде MathCAD процесса вычисления обратной матрицы с помощью символьных вычислений приводит к результату, который получает преподаватель на доске, пытаясь пояснить, почему именно так, а не иначе нужно проводить вычисления. Наглядно полученный результат показывает применение уже знакомых студенту формул и правил (в частности, правило Саррюса, вычисление алгебраических дополнений к элементам исходной матрицы). Тем самым, математическая среда становится интерактивным учителем, обучение и самоучение становится активным и интерактивным.

**Ключевые слова: математическая среда MathCAD, вычисления обратной матрицы, интерактивный обучающий документ, активное и интерактивное обучение**

# RESEARCH OF CALCULATING THE BACK MATRIX IN MATHCAD

**Bredun A.N., Chasov K.V.**

*Armavir Institute of Mechanics and Technology, the branch of Kuban State University of Technology,*
*Armavir, e-mail: bredun.artem@mail.ru, chasov_kv@mail.ru*

In the article the question of the technique of studying the concept of «inverse matrix» is considered. This problem arises because of the non-obviousness and high degree of incomprehensibility of the calculation process. The process of obtaining an interactive training document prepared by the student is presented in which he repeats the facts already known to him from theory. Research in the mathematical environment of MathCAD of the process of computing the inverse matrix by means of symbolic calculations leads to the result that the teacher receives on the board, trying to explain why this is so, and not otherwise, to perform calculations. A clearly obtained result shows the application of formulas and rules already familiar to the student (in particular, the Sarius rule, the calculation of algebraic additions to the elements of the original matrix). Thus, the mathematical environment becomes an interactive teacher, learning and self-teaching becomes active and interactive.

**Keywords: mathematical environment of MathCAD, inverse matrix computation, interactive training document, active and interactive learning**

Из педагогической практики преподавателей математики (высшей математики) известно, что изучение вопроса об обратных матрицах зачастую вызывает затруднения у студентов. Затруднения возникают в связи с тем, что сам процесс получения обратной матрицы представляется обучающимся надуманным. Указанное является причиной того, что большая часть студентов во время решения систем линейных уравнений ($n \times n$) стараются не использовать метод решения систем матричным способом, всё чаще используя, если появляется возможность, электронные помощники – математические редакторы, «интернет-решатели» на доступных сайтах.

Один из авторов статьи (Часов К.В.) со своими студентами ещё с 2007 года начал исследование вопроса решения систем линейных уравнений, когда после изучения темы об обратных матрицах и их применении один из студентов (Кендюхов В.С.) заявил ([3]), что может решать системы без вычисления обратной матрицы. И, хотя анализ решения на занятии выявил большое количество ошибок и практически нерешённость примера, идея была признана удачной. Так учебно-исследовательская работа по решению домашней задачи перешла в разряд научно-исследовательской. Была опубликована статья ([3]), проект направлялся на внешние конкурсы.

Работа над методами решения систем линейных уравнений без использования обратной матрицы была продолжена в работе студента Колупаева И.А. ([4]), который с одним из авторов статьи (Часов К.В.) разработал программу в математической среде MathCAD, реализующая идею Кендюхова В.С. для деления «слева» и «справа» квадратных матриц одного размера.

В случае стандартного подхода к изучению теории матриц, решение систем линейных уравнений приходится проводить с использованием обратных матриц. Некоторым студентам процесс вычисления обратной матрицы приходится просто заучивать. К примеру, дана матрица 3-го порядка, для которой требуется получить обратную матрицу. Вычисляют определитель. Если он отличен от нуля, то далее…

– для чего-то вычисляются алгебраические дополнения к каждому элементу исходной матрицы;

– алгебраические дополнения располагаются в матрице 3-го порядка в том же порядке, в каком и были записаны сами элементы (что практически не вызывает вопросов у обучающихся);

– матрица транспонируется (а это вообще непонятно достаточно многим студентам – для чего?).

То, что каждый элемент полученной матрицы делится на определитель исходной матрицы, конечно же, понятно, как и само существование обратной матрицы зависит от того, что исходная матрица не вырожденная. В результате получается искомая обратная матрица. Но в совокупности указанные шаги не складываются в мышлении обучающихся в единую картину. Очевидно, что там, где нет наглядности, там исчезает смысл и, следовательно, пропадает понимание. Кроме того, необходимо учитывать высокий уровень абстракции при выполнении операции вычисления обратной матрицы.

Совершенно другая ситуация возникнет, если обучающийся сам произведёт вполне определённые выкладки в среде MathCAD, введённые в интерактивный обучающий документ [1, 5], которые в этом случае просто наглядны, но всё равно остаются «вещью в себе». Но при этом студент будет всё-таки «доверять» электронному, бездушному помощнику, который при этом не сможет объяснить студенту: а почему так, а не иначе(?). По этой причине в интерактивный обучающий документ вводимый в текстовом редакторе Word необходимо включать соответствующие комментарии по каждому этапу выкладок или вычислений.

Задаём исходную матрицу в математической среде в общем виде (символьное представление), выделяем всю матрицу и в системном меню выбирает пункт «Символы», в выпавшем меню строку «Матрица ►», в котором появляется своё выпавшее меню, в котором выбираем строку «Инвертировать». Ниже появится матрица очень большого размера (рисунок).

Очевидно, что в каждом знаменателе полученной матрицы находится определитель исходной матрицы, вычисленный с помощью правила Саррюса, которое обучающиеся уже знают и легко могут проверить указанный факт. Проверка должна происходить вручную. При необходимости, если студент не очень понимает почему вычисления производятся таким образом, он должен включить в документ соответствующий поясняющий комментарий. Необходимо отметить, что при изучении определителей, обучающиеся также не имеют чёткого представления об этом понятии. И только решение систем линейных уравнений помогает студентам понять необходимость ввода понятия определитель. Для небольшой части группы студентов это понятие всё-таки остаётся «вещью в себе» и они просто заучивают соответствующее определение, собственно как и некоторые операции с матрицами (а для чего они нужны?).

В получившейся матрице в числителях первого столбца (рисунок, а)) – алгебраические дополнения для элементов первой строки исходной матрицы, аналогично и для второго и третьего столбцов (рисунок, б), в)). Вследствие этого, если перемножить исходную матрицу и полученную, получим единичную, как этого и требует определение обратной матрицы. Только указанное действие придётся выполнять вручную, т.к. исходная матрица задана в символьном виде – её элементы не заданы и математическая среда не поддерживает подобные вычисления. Проведённые операции вручную ещё предстоит студентам ввести в интерактивный обучающий документ. Здесь преследуется следующая цель – кроме мыслительной деятельности и запоминания действует зрительная и мышечная память.

Приведённые выше вычисления, решения задач на определение обратных матриц, в том числе задач с системами, решаемых матричным способом, а так же, как упоминалось и ручные выкладки, обучающиеся сводят в интерактивный обучающий документ ([7]), располагающийся в информационной обучающей среде кафедры [1, 2]. Из всего многообразия предложенных вариантов отбираются наилучшие результаты, которые дополняются наиболее удачным содержанием из других документов, что решается совместно всеми обучающимися группы.

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{matrix} \dfrac{(a22 \cdot a33 - a23 \cdot a32)}{(a11 \cdot a22 \cdot a33 - a11 \cdot a23 \cdot a32 - a21 \cdot a12 \cdot a33 + a21 \cdot a13 \cdot a32 + a31 \cdot a12 \cdot a23 - a31 \cdot a13 \cdot a22)} \\ \dfrac{-(a21 \cdot a33 - a23 \cdot a31)}{(a11 \cdot a22 \cdot a33 - a11 \cdot a23 \cdot a32 - a21 \cdot a12 \cdot a33 + a21 \cdot a13 \cdot a32 + a31 \cdot a12 \cdot a23 - a31 \cdot a13 \cdot a22)} \\ \dfrac{-(-a21 \cdot a32 + a22 \cdot a31)}{(a11 \cdot a22 \cdot a33 - a11 \cdot a23 \cdot a32 - a21 \cdot a12 \cdot a33 + a21 \cdot a13 \cdot a32 + a31 \cdot a12 \cdot a23 - a31 \cdot a13 \cdot a22)} \end{matrix}\right.$$

*а) первый столбец обратной матрицы*

$$\begin{matrix} \dfrac{-(a12 \cdot a33 - a13 \cdot a32)}{(a11 \cdot a22 \cdot a33 - a11 \cdot a23 \cdot a32 - a21 \cdot a12 \cdot a33 + a21 \cdot a13 \cdot a32 + a31 \cdot a12 \cdot a23 - a31 \cdot a13 \cdot a22)} \\ \dfrac{(a11 \cdot a33 - a13 \cdot a31)}{(a11 \cdot a22 \cdot a33 - a11 \cdot a23 \cdot a32 - a21 \cdot a12 \cdot a33 + a21 \cdot a13 \cdot a32 + a31 \cdot a12 \cdot a23 - a31 \cdot a13 \cdot a22)} \\ \dfrac{(-a11 \cdot a32 + a12 \cdot a31)}{(a11 \cdot a22 \cdot a33 - a11 \cdot a23 \cdot a32 - a21 \cdot a12 \cdot a33 + a21 \cdot a13 \cdot a32 + a31 \cdot a12 \cdot a23 - a31 \cdot a13 \cdot a22)} \end{matrix}$$

*б) второй столбец обратной матрицы*

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{-(-a12 \cdot a23 + a13 \cdot a22)}{(a11 \cdot a22 \cdot a33 - a11 \cdot a23 \cdot a32 - a21 \cdot a12 \cdot a33 + a21 \cdot a13 \cdot a32 + a31 \cdot a12 \cdot a23 - a31 \cdot a13 \cdot a22)} \\ \dfrac{(-a11 \cdot a23 + a13 \cdot a21)}{(a11 \cdot a22 \cdot a33 - a11 \cdot a23 \cdot a32 - a21 \cdot a12 \cdot a33 + a21 \cdot a13 \cdot a32 + a31 \cdot a12 \cdot a23 - a31 \cdot a13 \cdot a22)} \\ \dfrac{(a11 \cdot a22 - a12 \cdot a21)}{(a11 \cdot a22 \cdot a33 - a11 \cdot a23 \cdot a32 - a21 \cdot a12 \cdot a33 + a21 \cdot a13 \cdot a32 + a31 \cdot a12 \cdot a23 - a31 \cdot a13 \cdot a22)} \end{matrix}\right]$$

*в) третий столбец обратной матрицы*

*Вычисление обратной для матрицы, заданной в символьном виде, в математической среде MathCAD*

Самостоятельно анализируя указанный в статье фрагмент (рисунок), обучающиеся, не разобравшиеся на лекции с получением обратной матрицы, начинают понимать – зачем нужно вычислять соответствующие алгебраические дополнения, почему их нужно располагать в матрице именно так, а не иначе. Но, правда, необходимо, чтобы студент всё-таки желал и был мотивирован изучить проблему, хотя бы с точки зрения своей учебной работы.

Подводя итог, укажем, что при указанном способе изучения информация визуализируется, перестаёт быть для студента «вещью в себе». Становится очевидным, что учебно-исследовательская деятельность студентов по освоению обратных матриц проходит в активной и интерактивной формах, что и было целью преподавателя [6], а сама математическая среда MathCAD в указанном случае становится интерактивным помощником (и, в каком-то смысле, учителем). Несомненно, что учебно-исследовательская деятельность студентов перерастает в научно-исследовательскую деятельность.

## Список литературы

1. Вандина А.И., Часов К.В. Использование в образовательной среде кафедры учебных пособий нового типа // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 7-1. – С. 98-100.

2. Горовенко Л.А. Создание электронного учебно-методического комплекса дисциплины как один из методов перехода от традиционной методики обучения к обучению, основанному на самостоятельной работе студента// Инновационные процессы в высшей школе: материалы XV юбилейной Всероссийской научно-практической конференции – Краснодар: Изд.ГОУ ВПО КубГТУ, 2009. С. 211-213.

3. Кендюхов В.С., Часов К.В. Операция деления матрицы на матрицу (квадратные). Сборник студенческих работ, отмеченных наградами XIV студенческой научной конференции АМТИ. – Армавир: Изд-во АМТИ. – Вып.1, 2008, С. 46-48.

4. Колупаев И.А., Часов К.В. Нестандартная методика деления (слева и справа) квадратных матриц одного размера в среде MathCAD // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 5. – С. 53-55; URL: http://natural-sciences.ru/ru/article/view?id=30077 (дата обращения: 02.02.2017).

5. Часов К.В. К вопросу об интерактивности в обучении // VIII Международная конференция «Стратегия качества в промышленности и образовании». Варна, Болгария, 2012. Международный научный журнал Acta Universitatis Pontica Euxinus. – № S1. 2012. С. 344-346

6. Часов К.В., Зинченко О.И. Учебные материалы нового типа // Международный студенческий научный вестник. – 2016. – № 5-3. – С. 350-350; URL: http://eduherald.ru/ru/article/view?id=15941 (дата обращения: 28.01.2017).

7. Часов К.В., Филимонов В.В. Интерактивный обучающий документ в среде MathCAD // Международный студенческий научный вестник. – 2016. – № 5-3. – С. 361-361; URL: https://eduherald.ru/ru/article/view?id=15947 (дата обращения: 28.01.2017).