УДК 378.14:004

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ В ИНТЕРАКТИВНОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Веденеев В.Д., Часов К.В.

Армавирский механико-технологический институт (филиал)
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», Армавир,
e-mail: vitaliy.vedeneev.99@mail.ru, chasov_kv@mail.ru

В статье изучается вопрос методики изучения пределов, как одной из важнейших тем математического анализа. Решения задач в интерактивном обучающем документе приводятся с использованием педагогической технологии прямых и обратных задач – укрупнённых дидактических единиц (УДЕ), позволяющих изучить поставленную проблему во всём внутреннем многообразии. Исследование вопроса изучения пределов проводится и средствами стандартного математического анализа и в математической среде MathCAD с помощью символьных вычислений. Проработка студентами соответствующего учебного материала по изучению пределов функций проходит в активной и интерактивной формах как на практических занятиях, так и во время самостоятельной подготовки. Оформление студентами интерактивных обучающих документов по изучению пределов позволяет более глубоко изучить понятие предела, а также повысить уровень владения информационными технологиями.

Ключевые слова: математическая среда MathCAD, вычисление пределов, интерактивный обучающий документ, активное и интерактивное обучение

CALCULATION OF LIMITS IN THE INTERACTIVE TRAINING ENVIRONMENT

Vedeneev V.D., Chasov K.V.

Armavir Institute of Mechanics and Technology, the branch of Kuban State University of Technology,
Armavir, e-mail: vitaliy.vedeneev.99@mail.ru, chasov_kv@mail.ru

In the article the question of the methodology of studying the limits is studied as one of the most important topics of mathematical analysis. The solutions of problems in an interactive training document are given using the pedagogical technology of direct and inverse problems – enlarged didactic units (UDE), allowing to study the problem in the entire internal variety. The study of the study of limits is carried out by means of standard mathematical analysis and in the mathematical environment of MathCAD using symbolic computations. Studying of the relevant educational material for studying the limits of functions by students takes place in an active and interactive form both in practical classes and during self-preparation. Registration of students with interactive training documents on the study of limits allows for a deeper understanding of the concept of the limit, as well as an increase in the level of knowledge of information technology.

Keywords: mathematical environment MathCAD, calculation of limits, interactive training document, active and interactive training

Тема вычисления пределов раздела математики «Математический анализ» является одной из основных, без знания которой (наиболее важных её выводов) невозможно успешное изучение последующего учебного материала, кроме того понятие предела используется в математике практически во всех разделах. Поэтому такой актуальной является задача по составлению интерактивного обучающего документа, содержащего соответствующий теоретический учебный материал и примеры по вычислению пределов функций ([1], [6]) и поддержание этого документа в актуальном состоянии.

Во время реализации этой проблемы – ручные вычисления и наполнение решёнными задачами интерактивного обучающего документа, а также решениями из математической среды MathCAD, несомненно, формируются соответствующие обще-профессиональные и профессиональные ЗУН-ы обучающихся ([2]). Решения задач в интерактивном обучающем документе приводятся с использованием педагогической технологии прямых и обратных задач – укрупнённых дидактических единиц (УДЕ) ([3], [4]).

Рассмотрим применение указанной выше педагогической технологии прямых и обратных задач – УДЕ.

УДЕ № 1. (прямая задача – № 274 из известного сборника задач по курсу математического анализа, автор Берман Г.Н.; обратная – авторов статьи).

Прямая задача	Обратная задача
1	2
I. $f(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.	I. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{1}{3}$.

Окончание таблицы

1	2
II. $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$ – ? III. Представим функцию в виде произведения двух: $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x-1\right)\sqrt{2-x}}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{x^2-1}\sqrt{2-x}=$ $=\dfrac{x-1}{x^2-1}\sqrt{2-x}=\dfrac{x-1}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}\sqrt{2-x}=$ $=\dfrac{1}{x+1}\sqrt{2-x}$ (сокращение с учётом того, что функция может быть не определена в самой точке x = 1, но предел существует). Далее, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x+1}\sqrt{2-x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2-x}=$ $=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2-1}=\dfrac{1}{2}$. Ответ: $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$.	II. Представить $f(x)$ в виде произведения двух функций. III. Представим дробь $\dfrac{1}{3}$ следующим образом при $x = 2$ (учитываем здесь тот факт, что функция может быть не определена в самой точке $x = 2$, но предел в ней существует): $\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{\sqrt{x-1}\left(x-2\right)}{\left(2x-1\right)\left(x-2\right)}=\dfrac{\sqrt{x-1}\left(x-2\right)}{2x^2-5x+2}$. Следовательно, $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x-1}\left(x-2\right)}{2x^2-5x+2}=\dfrac{x-2}{2x^2-5x+2}\sqrt{x-1}$. Ответ: $f\left(x\right)=\dfrac{x-2}{2x^2-5x+2}\sqrt{x-1}$.

Приведённый пример является в высокой степени информативным. Очевидно, что решение задания проводится с использованием активности и интерактивности в обучении ([5]), выражающееся в том, что во время решения подобных задач, в мыслительной деятельности обучающихся можем отметить аналитические и синтетические ходы мысли. Отметим также, что в примере выше прямая и обратная задачи не полностью являются таковыми по содержанию – условие и вывод одной не совпадают с выводом и условием другой. Такие задачи являются обратными по сути.

В математическом редакторе MathCAD приведённые выкладки легко проверяются и включаются, наряду с традиционной формой решения УДЕ, в интерактивный обучающий документ. Во время анализа учебных материалов каждый обучающийся может самостоятельно проверить полученный результат, проводя как ручные выкладки, так и производя соответствующие действия в MathCAD. Тем более, что выполнить указанную работу студент должен как домашнее задание.

$$\mathrm{f(x)} := \frac{(\mathrm{x}-1)\cdot\sqrt{2-\mathrm{x}}}{\mathrm{x}^2-1} \qquad \lim_{\mathrm{x}\to 1} \mathrm{f(x)} \;\to\; \frac{1}{2}$$

Символьные вычисления в MathCAD приводят к аналогичному результату.

$$\frac{(\mathrm{x}-1)\cdot\sqrt{2-\mathrm{x}}}{\mathrm{x}^2-1}$$

$$\frac{(2-\mathrm{x})^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{(\mathrm{x}+1)} \qquad \lim_{\mathrm{x}\to 1} \frac{(2-\mathrm{x})^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{(\mathrm{x}+1)} \;\to\; \frac{1}{2}$$

Отметим, что обратная задача, в том виде, в котором она решена в традиционном решении, т.е. по некоторому заданному значению получить выражение, стоящее под знаком предела, не может быть представлена в математической среде MathCAD.

В самом интерактивном обучающем документе могут быть либо вставки в указанное выше решение, которое состоит из текстовой части с формулами, либо гиперссылки, настроенные на какие-либо части текста решения.

После решения всей группой совместно с преподавателем нескольких примеров, аналогичных приведённой выше УДЕ, обучающимся на текущем практическом занятии предлагается решить самостоятельно следующие аналогичные задачи.

№ 1. Если $x\to\infty$, то $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to 1$. Каково должно быть N, чтобы из $\left|x\right|>N$ следовало $\left|y-1\right|<\varepsilon$?

№ 2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2+3\right)=7$.

№ 3. Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x\to -1-0} 3^{\frac{1}{x+1}}$, 2) $\lim\limits_{x\to -1+0} 3^{\frac{1}{x+1}}$.

№ 4. Показать, что при $x \to \infty$ функция $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ стремится к 0. Каким должно быть N, чтобы при $x > N$ было $y > \varepsilon$.

№ 5. Самостоятельно составить и решить обратные задачи для примеров 1 – 4.

№ 6. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$. Составить и решить обратную задачу.

№ 7. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$. Составить и решить обратную задачу.

№ 8. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

№ 9. Найти предел функции $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

Домашнее задание, кроме составления интерактивного обучающего документа, состоит также в том, чтобы студенты и прямую и обратную задачи составили самостоятельно.

Следующие УДЕ содержат только условия прямых задач. Обучающимся предстоит изучить решение этих задач и составить условие обратных и также их решить.

УДЕ № 2.

I. $f(x)=\dfrac{tg\ 2x}{\sin 5x}$.

II. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

III. Преобразуем заданную функцию:

$$f(x)=\frac{tg\ 2x}{\sin 5x}=\frac{2\cdot 5\cdot x\cdot tg\ 2x}{2\cdot 5\cdot x\cdot \sin 5x}=\frac{2}{5}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{tg\ 2x}{2x}$$

и, тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{tg\ 2x}{2x}\right)=\frac{2}{5}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\(5x\to 0)}}\frac{(5x)}{\sin(5x)}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\(2x\to 0)}}\frac{tg\ (2x)}{(2x)}=\frac{2}{5}\cdot 1\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\(2x\to 0)}}\frac{tg\ (2x)}{(2x)}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\(2x\to 0)}}\frac{\sin\ (2x)}{(2x)\cos(2x)}=\frac{2}{5}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\(2x\to 0)}}\frac{\sin\ (2x)}{(2x)}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\(2x\to 0)}}\frac{1}{\cos(2x)}=\frac{2}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{2}{5}$.

УДЕ № 3.

I. $f(x)=\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

II. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

III. Преобразуем функцию к более удобному виду:

$$f(x)=\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}=\frac{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{x\sin 2x}=$$

(используем известные формулы: $1-\cos x=2\sin^2 {x}/{2}$ и $\sin 2x=2\sin x\cos x$)

$$=\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{x\cdot 2\sin x\cos x}=\frac{\sin^2 \frac{x}{2}\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{x\cdot 2\cdot \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x}=\frac{\sin\frac{x}{2}\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{x\cdot 2\cdot \cos\frac{x}{2}\cos x}=$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{\frac{x}{2}\cdot 4\cdot \cos\frac{x}{2}\cos x},$$

после чего рассмотрим предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{\frac{x}{2}\cdot 4\cdot \cos\frac{x}{2}\cos x}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos\frac{x}{2}\cos x}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{3}{4}$.

УДЕ № 4.

I. $f(x)=\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}$.

II. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

III. Произведём замену: $y=\frac{x}{k}$, и при $x \to \infty$, также $y \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{mky}=\underbrace{\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\ldots\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}_{mk\ \text{раз}}=e^{mk}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=e^{mk}$.

УДЕ № 5.

I. $f(x)=\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

II. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

III. Преобразуем функцию к виду, подходящему для применения 2-го замечательного предела:

$$f(x)=\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\left(\frac{3x+2-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

введём замену:

$$y=-\frac{3x+2}{6}=-\left(\frac{3}{6}x+\frac{1}{3}\right),$$

тогда при $x \to \infty$, $y \to -\infty$, а $\frac{x+1}{3}$ можно записать как:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{6}x+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}\left(-y+\frac{1}{6}\right)=-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}}=\lim_{y\to-\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{2}{3}y}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{9}}\right)=$$

$$=\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{2}{3}y}\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{9}}=e^{-\frac{2}{3}}\cdot 1=e^{-\frac{2}{3}}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=e^{-\frac{2}{3}}$.

Решения оформляются вручную, обратные задачи формулируются и решаются также вручную. Затем всё это оформляется в виде интерактивного обучающего документа.

Очевидно, что резко возрастает уровень абстракции, т.к. зачастую условия прямой и обратной задачи очень далеки друг от друга по содержанию и не выражают в своём условии что-либо конкретное.

Многое зависит от умения студентов работать с использованием информационных технологий, иначе подготовка интерактивных обучающих документов может перерасти в изучение способов и методов работы с компьютерными программами и информационными системами, в ущерб математике.

При достаточном уровне владения информационными технологиями (текстовым редактором Word, редактором формул Microsoft Equation, настройкой гиперссылок, вставкой в документ Word фрагментов из математической среды MathCAD, видеофрагментов по работе в математической среде) у обучающихся довольно быстро формируются требуемые ЗУН-ы по подготовке интерактивных обучающих документов. Как следствие,

– студенты меньше времени тратят на освоение информационных технологий, а больше на математику;

– проработка студентами соответствующего учебного материала по изучению пределов функций проходит в активной и интерактивной формах как на практических занятиях, так и во время самостоятельной подготовки.

Несомненно, такая организация учебного процесса мотивирует обучающихся изучать представленную тему – пределы, а также активно заниматься учебно-исследовательской работой, которая постепенно переходит в научно-исследовательскую.

Список литературы

1. Горовенко Л.А. Экспертная оценка электронного программно-методического комплекса // Научные труды Кубанского государственного технологического университета. – 2014. № 54. С.355-361.

2. Смольняков И.М., Часов К.В. Формирование НИР студентов посредством информационной образовательной среды // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – №7-1. – С. 105-106.

3. Часов К.В. Укрупнённые дидактические единицы на занятиях по высшей математике / Часов К.В., Тульчий В.В., Неверов А.В. – М., 1998. – 14 с. – Деп. в НИИ Высшего Обр. 27.04.98, № 88-98.

4. Часов К.В. Обобщённые укрупнённые дидактические единицы – компонент проблемного обучения на занятиях по математике / Часов К.В., Тульчий В.В., Неверов А.В. – М., 1998. – 14 с. – Деп. в НИИ Высшего Обр. 27.04.98, № 87-98

5. Часов К.В. К вопросу об интерактивности в обучении // VIII Международная конференция «Стратегия качества в промышленности и образовании». Варна, Болгария, 2012. Международный научный журнал Acta Universitatis Pontica Euxinus – № S1. 2012. С. 344-346.

6. Часов К.В., Зинченко О.И. Учебные материалы нового типа // Международный студенческий научный вестник. – 2016. – № 5-3. – С. 350-350; URL: http://eduherald.ru/ru/article/view?id=15941 (дата обращения: 28.01.2017).