

УДК 378.14:004

## СТАНДАРТНОЕ И НЕСТАНДАРТНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИНТЕРАКТИВНОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Гунькин В.Ю., Часов К.В.

*Армавирский механико-технологический институт (филиал)  
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», Армавир,  
e-mail: gunkin.vlad@bk.ru, chasov\_kv@mail.ru*

Учитывая, что примерно половину времени учебной работы студентов-бакалавров составляет самостоятельная работа, то для освоения учебной программы изучаемой дисциплины, в частности математики, нужны соответствующие учебные материалы нового типа. Авторы считают, что это должны быть в значительной степени учебные материалы, подготовленные самими обучающимися при помощи преподавателей. В статье рассматриваются различные способы решения заданной системы линейных уравнений, по большей степени стандартные. Во время самостоятельной работы обучающиеся оформляют интерактивный обучающий документ, в котором помещаются все эти решения. Решения системы дублируются в математической среде MathCAD и также помещаются в документ, среди вносимых решений приводятся и нестандартные (склеивание и выделение матриц и подматриц). Несомненно, что подобные интерактивные обучающие документы способствуют повышению качества образовательного процесса, развитию учебно-исследовательской и научно-исследовательской работы студентов.

**Ключевые слова:** математическая редактор MathCAD, интерактивный обучающий документ, решение системы линейных уравнений, учебно-исследовательской и научно-исследовательской работы студентов

## STANDARD AND NON-STANDARD SOLUTION OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS IN THE INTERACTIVE TRAINING MEDIUM

Gunkin V.Yu., Chasov K.V.

*Armavir Institute of Mechanics and Technology, the branch of Kuban State University of Technology,  
Armavir, e-mail: gunkin.vlad@bk.ru, chasov\_kv@mail.ru*

Considering that approximately half of the time of the academic work of bachelor students makes up independent work, then appropriate teaching materials of a new type are needed to master the curriculum of the discipline in question, in particular mathematics. The authors believe that this should be largely educational materials, prepared by the students themselves with the help of teachers. In the article various methods of solving a given system of linear equations are considered, mostly standard ones. During the independent work, students prepare an interactive training document, in which all these solutions are placed. The solutions of the system are duplicated in the mathematical environment of MathCAD and are also placed in the document, among non-standard solutions (gluing and selection of matrices and submatrices) are introduced. Undoubtedly, such interactive educational documents contribute to the improvement of the quality of the educational process, the development of the teaching, research and research work of students.

**Keywords:** mathematical editor MathCAD, interactive learning document, solution of the system of linear equations, teaching and research and research work of students

Функционирующая на кафедре информационная образовательная среда (ИОС) постоянно пополняется новыми или модифицированными обучающими программами, информационными текстами и *интерактивными обучающими документами*. Учитывая, что примерно половину времени учебной работы студентов-бакалавров составляет самостоятельная работа, то для освоения учебной программы изучаемой дисциплины, в частности математики, нужны соответствующие учебные материалы, что подтверждается исследованиями ([1], [5]).

Мы считаем, что это должны быть в значительной степени учебные материалы, подготовленные самими обучающимися при помощи преподавателей, ведущих соответствующую дисциплину ([6]). В работе

([4]) отмечается, что в результате развития компьютерной и оргтехники изменяются и технологии обучения, возникает необходимость «создавать учебные средства и материалы нового типа, развивать методу и технологию подготовки указанных средств и материалов».

Приведённый далее пример, включённый в интерактивный обучающий документ, решается самими различными способами сначала вручную всеми к тому времени уже известными способами, результаты проверяются в математической среде MathCAD. Во время занятий каждый студент, решая систему, к примеру, методом Крамера, по известному алгоритму вычисляет для заданной системы четыре определителя. При этом отрабатывается навык вычисления со-

ответствующих определителей. Но, необходимо учитывать, что большее внимание должно быть направлено именно на методику решения самой системы, а не на вычисление определителей, так как будущему инженеру (бакалавру, магистру) важно всего лишь знать как вычислить определитель, но вычислять его он будет с помощью электронного решателя. Все полученные решения – и ручные и электронные включаются в интерактивный обучающий документ с необходимыми пояснениями.

Приведём пример стандартного решения системы трёх линейных уравнений в среде MathCAD. Пусть дана система.

$$\begin{cases} x + y - z = 36 \\ x + z - y = 13 \\ y + z - x = 7 \end{cases}$$

Не будем пояснять, каким образом получены все четыре матрицы, определители которых вычислены ниже, каждый студент первого курса обязан это знать.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = -4$$

$$Ax := \begin{pmatrix} 36 & 1 & -1 \\ 13 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |Ax| = -98$$

$$Ay := \begin{pmatrix} 1 & 36 & -1 \\ 1 & 13 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad |Ay| = -86$$

$$Az := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 36 \\ 1 & -1 & 13 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad |Az| = -40$$

В результате, как и в теории, в MathCad-е получаем корни системы:

$$x := \frac{|Ax|}{|A|} \quad x = 24.5$$

$$y := \frac{|Ay|}{|A|} \quad y = 21.5$$

$$z := \frac{|Az|}{|A|} \quad z = 10$$

С помощью MathCad-а можно быстро вычислить обратную матрицу для заданной, а тем самым, получить решение системы уравнений матричным методом. Приведём теоретические выкладки этого метода:

$$A \cdot X = C, A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C, \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C.$$

Но вычисление обратной матрицы без помощи компьютера достаточно трудоёмкий процесс: вычисление определителя исходной системы, алгебраических дополнений, составление соответствующей матрицы, которую далее необходимо транспонировать, только после этого производится перемножение матриц – полученной и свободных членов. Возможно, именно по этой причине метод Крамера (иногда – Гаусса) более востребован при решении систем линейных уравнений первого порядка без применения компьютера.

В нашем случае.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 36 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix},$$

тогда

$$X := A^{-1} \cdot C \quad X = \begin{pmatrix} 24.5 \\ 21.5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Учитывая вышесказанное, нас больше интересует вопрос представления решения данной задачи в математической среде MathCAD и представление решения со всеми промежуточными выкладками в интерактивном обучающем документе для самостоятельного изучения обучающимися указанного вопроса. Тем более что решается этот пример нестандартно: с применением специфических функций самой математической среды – склеивания и выделения матриц и подматриц (augment и submatrix). Тем самым студенты осваивают не только математику, но и информационные технологии.

Пусть дана система.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

Решить систему методом (с помощью правила) Крамера (в среде MathCAD).

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad |A| = 33$$

Система введена в среду MathCAD, вычислен основной определитель, который отличен от нуля, значит, система имеет единственное решение.

$$Ax := \text{augment}(C, \text{submatrix}(A, 0, 2, 1, 2))$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad x := \frac{|Ax|}{|A|} \quad x = 1$$

Функция `augment` позволяет соединить различные матрицы, в частности, матрица-столбец  $C$  сливается с подматрицей матрицы  $A$ , которая определяется строками с 0-й по 2-ю (три строки исходной матрицы  $A$ ) и столбцами 1 и 2 (0-ой столбец уже заменён матрицей-столбцом  $C$ ). Далее происходят аналогичные преобразования с матрицами  $Ay$  и  $Az$ .

$$Ay := \text{augment}(\text{submatrix}(A, 0, 2, 0, 0), C, \text{submatrix}(A, 0, 2, 2, 2))$$

$$Ay = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} \quad y := \frac{|Ay|}{|A|} \quad y = 1$$

$$Az := \text{augment}(\text{submatrix}(A, 0, 2, 0, 1), C)$$

$$Az = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad z := \frac{|Az|}{|A|} \quad z = 1$$

Во время соответствующего лекционного занятия подготавливается заготовка к будущему интерактивному обучающему документу. На самоподготовке студенты оформляют интерактивный обучающий документ, в который помещаются все стандартные решения заданной системы, обеспечивая повторение изученного на лекции учебного материала. После каждого ручного решения в документ помещается решение системы в математической среде MathCAD. Понятно, что количество документов будет столько, сколько студентов в группе. В этом случае наиболее сильные студенты берут на себя обязанность рассмотреть представленные файлы, из которых выбираются наиболее подходящие по содержанию и правильности решения. Но и в других документах

могут быть достаточно оригинальные ходы решения, которые в этом случае также попадают в итоговый документ.

Приведённый выше пример, наряду с другими интерактивными обучающими документами и обучающими программами, размещённые в ИОС кафедры ([3], [2]), убедительно доказывают необходимость «модернизировать педагогические техники и методики, имеющие целью развитие умений и навыков самостоятельной работы у студентов, анализировать поступающую к ним информацию. Результатом такого подхода является стремление обучающихся к учению и самоучению» ([5]).

Представление изучаемого материала в среде MathCAD в виде алгоритмов решения математических задач, в частности

систем трёх линейных уравнений с тремя неизвестными позволяет сформировать у студентов целостность восприятия соответствующего учебного материала, развивать логическое мышление. При этом наглядность и простота представления материала способствует его лучшему усвоению.

Систематичное применение интерактивных документов на занятиях и в самостоятельной работе студентов, несомненно, формирует у обучающихся соответствующий уровень математической культуры, самостоятельность в получении знаний, умений и навыков не только в математике, но и информационных технологиях. В случае если обучающемуся недостаточно только предоставляемых интерактивных документов (что само по себе вполне понятно – не может один источник заменить всего многообразия учебной литературы), то ему придётся самостоятельно обращаться к другим источникам. В результате формируются навыки работы с учебной литературой, поиска нужной информации.

Интерактивные обучающие документы и обучающие программы, подготовленные студентами во время самостоятельной работы, способствуют повышению качества

образовательного процесса, развитию учебно-исследовательской и научно-исследовательской работы студентов. В этом и состоит практическая значимость проведённого исследования.

#### Список литературы

1. Вандина А.И., Часов К.В. Использование в образовательной среде кафедры учебных пособий нового типа // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 7-1. – С. 98-100.
2. Горовенко Л.А. Создание электронного учебно-методического комплекса дисциплины как один из методов перехода от традиционной методики обучения к обучению, основанному на самостоятельной работе студента // Инновационные процессы в высшей школе: материалы XV юбилейной Всероссийской научно-практической конференции – Краснодар: Изд.ГОУ ВПО КубГТУ, 2009. С 211-213.
3. Горовенко Л.А. Экспертная оценка электронного программно-методического комплекса // Научные труды Кубанского государственного технологического университета. – 2014. № 54. С.355-361.
4. Зинченко О.И., Часов К.В. Учебные материалы нового типа // Международный студенческий научный вестник. – 2016. – № 5-3. – С. 350-350; URL: <http://eduherald.ru/ru/article/view?id=15941> (дата обращения: 28.01.2017)
5. Смольняков И.М., Часов К.В. Формирование НИР студентов посредством информационной образовательной среды // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – №7-1. – С. 105-106.
6. Часов К.В. К вопросу об интерактивности в обучении // VIII Международная конференция «Стратегия качества в промышленности и образовании». Варна, Болгария, 2012. Международный научный журнал Acta Universitatis Pontica Euxinus – № S1. 2012. С. 344-346