УДК 378.14

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ИНТЕРАКТИВНОМ ОБУЧАЮЩЕМ ДОКУМЕНТЕ

Иноземцев С.А., Часов К.В.

Армавирский механико-технологический институт (филиал)
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», Армавир,
e-mail: inozemtsev-saveliy@mail.ru, chasov_kv@mail.ru

В статье рассматривается вопрос применения интерактивных обучающих документов по результатам проведённого занятия (лекционного или практического) для изучения последовательностей. Изучение происходит в самостоятельном режиме с применением технологии укрупнённых дидактических единиц (УДЕ), в частности обобщённых укрупнённых дидактических единиц (ОУДЕ), которые характеризуются тем, что включают в себя большинство математических операций, изучаемых в разделе или теме. Обучающиеся применяя изученные на занятиях определения и теоремы, решают прямые и обратные задачи на последовательности, внося решения в интерактивный обучающийся документ. Изучение учебного материала происходит в активной и интерактивной формах в режиме самостоятельного изучения. Как результат – составление интерактивного обучающего документа на изучение последовательностей мотивирует студентов заниматься учебно-исследовательской, а также научно-исследовательской работой.

Ключевые слова: информационная образовательная среда, интерактивный обучающий документ, последовательность, укрупнённая дидактическая единица (УДЕ), обобщённая укрупнённая дидактическая единица (ОУДЕ)

INVESTIGATION OF SEQUENCES IN THE INTERACTIVE TRAINING DOCUMENT

Inozemtsev S.A., Chasov K.V.

Armavir Institute of Mechanics and Technology, the branch of Kuban State University of Technology, Armavir, e-mail: inozemtsev-saveliy@mail.ru, chasov_kv@mail.ru

The article deals with the application of interactive training documents based on the results of a session (lecture or practical) for the study of sequences. The study takes place in an independent mode using the technology of enlarged didactic units, in particular generalized enlarged didactic units, which are characterized by the fact that they include most of the mathematical operations studied in the section or topic. Trainees using the definitions and theorems studied in the classes solve direct and inverse problems on sequences, making decisions in an interactive learning document. The study of the educational material takes place in an active and interactive form in the mode of independent study. As a result, the compilation of an interactive training document for the study of sequences motivates students to engage in research and research as well as research work.

Keywords: An information educational environment, an interactive training document, a sequence, an enlarged didactic unit, a generalized enlarged didactic unit

Во время изучения сходящихся последовательностей обучающиеся подготавливают после соответствующей лекции по заданию преподавателя интерактивные обучающие документы ([1]). Для качественного изучения учебного материала возникает необходимость в самостоятельном изучении отдельных вопросов темы, не изученных на лекции ([2]).

Для самостоятельного изучения более предпочтительно использование технологии укрупнённых дидактических единиц (УДЕ), в частности обобщённых укрупнённых дидактических единиц (ОУДЕ) ([4], [5]), которые включают в себя большинство математических операций, изучаемых в разделе или теме.

Вся история применения УДЕ убеждает, что во время занятия (будь то лекционное или практическое) наряду с традиционными заданиями необходимо использовать «многокомпонентное задание, образующееся из нескольких логически разнородных, но психологически» ([7], стр.19) собранных в единое целое, состоящих в решении стандартной задачи, составлении и решении обратной задачи, аналогичной для прямой и обратной, обобщённой по некоторым параметрам исходной (стандартной).

Решение приведённого далее примера основывается на ряде теорем, касающихся сходящихся последовательностей – имеет только один предел, ограничена; сумма (разность, произведение, частное, при условии, что предел знаменателя не равен нулю) двух сходящихся последовательностей – сходящаяся последовательность, при этом предел её равен сумме (разности, произведению, частному) пределов. Необходимо отметить, что во время проведения литературного обзора подобных задач и их решений не имеется ни в одном из источников. Тем самым данное исследование имеет научную новизну и, как следствие, практическую значимость для процесса обучения.

Рассмотрим следующую ОУДЕ.

ОУДЕ № 1. ***Прямая задача.***

I. $\left\{\alpha_n : \alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\right\}$, $\left\{\beta_n : \beta_n = \left(\frac{2n-2}{n}\right)^{n}\right\}$.

II. $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\{\beta_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \pm \beta_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \cdot \beta_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)$.

III. $\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha_n\} = \left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^2 = e^2$,

$$\beta_n = \left(\frac{2n-2}{n}\right)^{n} = 2^n\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\{\beta_n\} = \lim_{n\to\infty}\left[2^n\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}\right] = \infty .$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n \pm \beta_n) = e^2 \pm \infty = \pm\infty ;\ \lim_{n\to\infty}(\alpha_n \cdot \beta_n) = \infty ;\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) = 0 ;\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) = \infty .$$

Рассмотрим следующую задачу, которая является ***обратной задачей*** по сути, но не по содержанию.

Обратная задача

I. $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \cdot \beta_n) = \frac{1}{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) = \sqrt{e}$.

II. α_n, β_n.

III. $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha_n\} \overset{d}{=} \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}\{\beta_n\} \overset{d}{=} \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha\cdot\beta = \frac{1}{e} \\ \frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{e} \end{cases}$, $\begin{cases} \alpha\cdot\beta = \frac{1}{e} \\ \alpha = \sqrt{e}\beta \end{cases}$, $\begin{cases} \sqrt{e}\beta^{\,2} = \frac{1}{e} \\ \alpha = \sqrt{e}\beta \end{cases}$, $\beta^{\,2} = \frac{1}{e\sqrt{e}}$,

$$\beta^{\,2} = e^{-\frac{3}{2}},\ \beta_1 = e^{-\frac{3}{4}}, \Rightarrow \alpha_1 = e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{3}{4}} = e^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{4}} \\ \beta_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3n}{4}} \end{cases},$$

$$\beta_2 = -e^{-\frac{3}{4}}, \Rightarrow \alpha_2 = -e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{3}{4}} = -e^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = -e^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_n = -\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{4}} \\ \beta_n = -\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3n}{4}} \end{cases}.$$

Проанализировав приведённую выше ОУДЕ, обучающиеся самостоятельно приступают к составлению и решению аналогичных задач. Приведём некоторые результаты их опытов. Напомним, что решить ОУДЕ – значит решить прямую задачу, составить обратную и решить также её.

1. Даны последовательности: $\alpha_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$, $\beta_n = \left(\frac{1+n}{n}\right)^{-n}$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\{\beta_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \pm \beta_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \cdot \beta_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)$. Решить ОУДЕ.

2. Даны значения: $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n\cdot\beta_n)=\frac{1}{e^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)=1$. Записать представление α_n, β_n. Решить ОУДЕ.

3. Даны последовательности: $\alpha_n=\frac{2}{n-1}+4$, $\beta_n=\frac{5}{n^2+1}-3$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\{\beta_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n\pm\beta_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n\cdot\beta_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)$. Решить ОУДЕ.

4. Даны значения: $\lim\alpha_n+\beta_n=\frac{2}{n^2+1}+5$ и $\frac{\alpha_n}{\lim\beta_n}=\frac{4}{n-1}-3$. Записать представление α_n, β_n. Решить ОУДЕ.

Рассмотрим ещё несколько примеров, для которых легко составить обратные задачи, которые нужно затем решить.

УДЕ № 2.

I. $\left\{\frac{n^k}{a^n}\right\}$ – последовательность, $a>1$.

II. Доказать, что заданная последовательность бесконечно малая.

III. Пусть некоторое число $m\in\mathbf{Z}:\ m\ge k$, тогда

$$0<\frac{n^k}{a^n}\le\frac{n^m}{a^n}=\left(\frac{n}{\sqrt[m]{a^n}}\right)^m=\left(\frac{n}{b^n}\right)^m,$$

где $b=\sqrt[m]{a}>1$.

Оценим полученный результат:

$$\frac{n}{b^n}=\frac{n}{\left(1+(b-1)\right)^n}=\frac{n}{1+n(b-1)+\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2+...+(b-1)^n}<\frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Следовательно,

$$\left(\frac{n}{b^n}\right)^m\xrightarrow[n\to 0]{}0\ \Rightarrow\ \frac{n^k}{a^n}\xrightarrow[n\to 0]{}0.$$

По определению такая последовательность бесконечно малая ч.т.д.

УДЕ № 3.

I. $u_n=\frac{4n^2+1}{3n^2+2}$, $n\in\mathbf{N}$ – последовательность.

II. Доказать, что $u_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{4}{3}$. $\quad n:\left|\frac{4}{3}-u_n\right|<\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0$.

III. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{3n^2+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n^2}}=\frac{4}{3}$.

Выберем число $\forall\varepsilon>0$, рассмотрим

$$\left|\frac{4}{3}-\frac{4n^2+1}{3n^2+2}\right|=\left|\frac{4(3n^2+2)-3(4n^2+1)}{3(3n^2+2)}\right|=\left|\frac{12n^2+8-12n^2-3}{9n^2+6}\right|=\left|\frac{5}{9n^2+6}\right|,$$

т.к. $\frac{4}{3}$ – предел, то должно (по определению) выполняться следующее неравенство

$$\left|\frac{5}{9n^2+6}\right|<\varepsilon.$$

Находя обратные величины, получаем:

$$\left|\frac{9n^2+6}{5}\right|>\frac{1}{\varepsilon}$$

и, тогда

$$\frac{1}{\varepsilon}<\frac{9n^2+6}{5}<-\frac{1}{\varepsilon},$$

при этом правая часть двойного неравенства не может иметь места ($\forall\varepsilon>0$). Следовательно,

$$\frac{1}{\varepsilon}<\frac{9n^2+6}{5}\Leftrightarrow\frac{5}{\varepsilon}<9n^2+6\Leftrightarrow\frac{5}{\varepsilon}-6<9n^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{5-6\varepsilon}{\varepsilon}<9n^2\Leftrightarrow\frac{5-6\varepsilon}{9\varepsilon}<n^2\Leftrightarrow n>\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{9\varepsilon}}\Leftrightarrow n>\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Результат надо интерпретировать так, что

$n>\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{\varepsilon}}$ при $\varepsilon\le\frac{5}{6}$ и $n=0$ при $\varepsilon>\frac{5}{6}$. Это и является ответом.

УДЕ № 4.

I. Последовательности $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}$ и $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n\in\mathbf{N}$.

II. Доказать, что $x_n\nearrow$ и ограничена сверху, $y_n\searrow$ и ограничена снизу, и имеют общий предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$.

III. Отношения $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}>\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{n}=1$

$$\frac{y_n}{y_{n-1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}\frac{n+1}{n}<\frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}}\frac{n+1}{n}=\frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n}<1.$$

Для их вывода использовалось простое неравенство:
$(1+x)^n\ge1+nx,\quad n>0$.
Из полученных двух отношений следует, что $x_n\nearrow$, $y_n\searrow$, а также $x_n<y_n$.
Вычислим разность

$$y_n-x_n:\ 0<y_n-x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}<\frac{e}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_n-x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=e$$

(полученное равенство называется *вторым замечательным пределом*).

Решения прямых задач со второй по четвёртую вносятся в интерактивный обучающий документ. Для каждой из них составляется обратная, которые также вводятся в документ.

Наиболее значимым с точки зрения методики является самостоятельность в составлении и решении аналогичных ОУДЕ, включение их в обучающие интерактивные документы доступные всем студентам группы для совместного анализа и обсуждения ([3], [6]), по результатам которых делается обобщённый вывод. В самой структуре УДЕ и ОУДЕ заложена успешность усвоения учебного материала. Занятие, построенное таким образом, проходит в активной и интерактивной форме и, несомненно, мотивирует студентов заниматься учебно-исследовательской, а далее и научно-исследовательской работой.

Список литературы

1. Вандина А.И., Часов К.В. Использование в образовательной среде кафедры учебных пособий нового типа // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 7-1. – С. 98-100.

2. Вотякова В.С., Часов К.В. Включение обучающих интерактивных документов по математике в информационную образовательную среду // Успехи современного естествознания. – 2013. – № 10. – С. 104-105.

3. Горовенко Л.А. Экспертная оценка электронного программно-методического комплекса // Научные труды Кубанского государственного технологического университета. – 2014. № 54. С.355-361.

4. Часов К.В. Укрупнённые дидактические единицы на занятиях по высшей математике / Часов К.В., Тульчий В.В., Неверов А.В. – М., 1998. – 14 с. – Деп. в НИИ Высшего Обр. 27.04.98, № 88-98.

5. Часов К.В. Обобщённые укрупнённые дидактические единицы – компонент проблемного обучения на занятиях по математике / Часов К.В., Тульчий В.В., Неверов А.В. – М., 1998. – 14 с. – Деп. в НИИ Высшего Обр. 27.04.98, № 87-98.

6. Часов К.В. К вопросу об интерактивности в обучении // VIII Международная конференция «Стратегия качества в промышленности и образовании». Варна, Болгария, 2012 / Международный научный журнал Acta Universitatis Pontica Euxinus – № S1. 2012. С. 344-346

7. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Обучение математике в школе. – М.: Столетие. – 1996. – 320 с.