

УДК 004.942

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ КРИВЫХ ГВИДО ГРАНДИ

Демьянко А.В., Горovenко Л.А.

*Армавирский механико-технологический институт (филиал)
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет»,
Армавир, e-mail: demyanko.alyona@bk.ru, lgorovenko@mail.ru*

В статье рассматривается семейство кривых линий с правильными плавными очертаниями, внешне похожими на очертание цветка, которые впервые с математической точки зрения были описаны итальянским учёным Гвидо Гранди. Авторами статьи эти линии были исследованы как периодические тригонометрические функции. Приведён анализ зависимости графика кривой от параметров её уравнения. Рассмотрены способы построения графика «трёхлепестковой розы», а также свойства кривой линии «четырёхлепестковой розы». Исследования изменений кривых Гвидо Гранди, заданных в полярной системе координат в зависимости различных значений параметров позволили авторам статьи установить связь между количеством «лепестков» графика, их формулами и симметричностью получившейся кривой. В качестве среды моделирования использовалась система математических и инженерных расчётов MathCAD, позволяющая визуализировать изменения графиков кривых путём варьирования значений параметров уравнений этих кривых.

Ключевые слова: кривая, график, параметры уравнения, моделирование

STUDY OF PARAMETERS OF CURVES OF GUIDO GRANDI

Demyanko A.V., Gorovenko L.A.

*Armavir Institute of Mechanics and Technology, the branch of Kuban State University of Technology,
Armavir, e-mail: demyanko.alyona@bk.ru, lgorovenko@mail.ru*

The article discusses the family of curves with the right smooth contours that resemble the shape of a flower, which for the first time from a mathematical point of view was described by the Italian scientist, Guido Grandi. The authors of these lines were investigated as a periodic trigonometric function. The analysis of the dependency graph of a curve from its equation. Covers methods of graphing «three-leafed rose», as well as the properties of the curve line «four roses». The investigation of changes in the curves of Guido Grandi, defined in polar coordinates based on different parameters allowed the authors to establish a correlation between the number of «petals» of the graph, their formulas and symmetry of the resulting curve. As simulation environment the system was used for mathematical and engineering calculations MathCAD, allowing you to visualize the changes of the graphs of curves by varying the parameter values of the equations of these curves.

Keywords: curve, graph, parameters, equations, modeling

Математика-это наука, которая изучает величины, количественные отношения и пространственные формы, описывает процессы, происходящие в окружающем нас мире. Законы математики и решения математических задач приложены ко всем областям человеческой деятельности. Линии занимают особое положение в математике. Используя линии, можно создать наглядные модели многих процессов и проследить их течение во времени.

В 18 веке итальянский геометр Гвидо Гранди (1671-1742) описал кривые линии с правильными плавными очертаниями. Они были похожи на цветок. Семейство этих кривых было названо семейством роз Гвидо Гранди.

Их правильное очертание это не каприз природы, они predeterminedены математическими зависимостями. Эти зависимости были подсказаны самой природой, ведь в большинстве случаев абрис листа или цветка представляет собой кривую, симметричную относительно оси. Свои прекрасные цветы Гвидо Гранди собрал в одну

книгу и назвал ее «Цветник роз». Гранди известен своей работой *Floresgeometrici* (1728), изучавшей розы – кривые, которые имеют форму лепестков цветка (рис. 1).

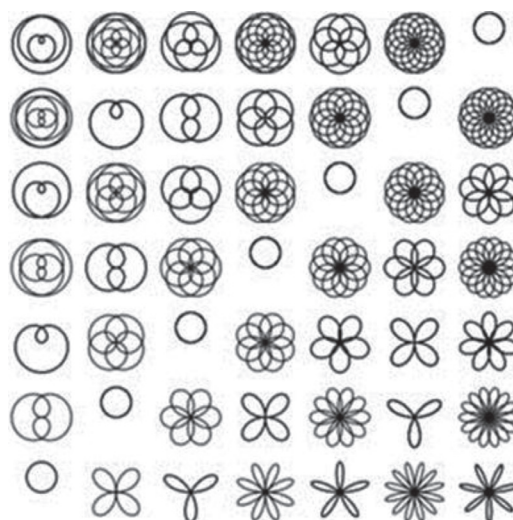


Рис. 1. «Розы» Гвидо Гранди

Линии позволяют установить и исследовать функциональную зависимость между различными величинами. С помощью линий удастся решать многие научные, инженерные задачи в различных отраслях жизни. Нас заинтересовали кривые, заданные в полярных координатах. Среди них можно назвать спираль Архимеда, логарифмическую спираль, кардиоиду, лемнискату, астроиду, розы Гвидо Гранди. Больше других наше внимание привлекла математическая кривая, похожая на цветок – полярная роза или роза Гвидо Гранди, и мы в своей работе хотим исследовать не только многообразие форм, но и зависимость вида графика от параметров его уравнений.

Розы Гвидо Гранди имеют свойство, которое в природе не сразу заметишь: так как $|\sin(k\varphi)| \leq 1$, то вся кривая расположена внутри круга единичного радиуса. В силу периодичности тригонометрических функций роза состоит из одинаковых лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен 1 [1, 10].

Наиболее красивые «цветы» получаются при $k = 2$ (четырёхлепестковая роза) и при $k = 3$ (трёхлепестковая роза).

Покажем, как построить трёхлепестковую розу. Обратим внимание на то, что, поскольку полярный радиус неотрицателен, то должно выполняться неравенство $\sin(3\varphi) \geq 0$, решая которое получим область допустимых углов:

$$\varphi \leq \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi, \frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}.$$

В силу периодичности функции $\sin(3\varphi)$ (ее период равен $\frac{2\pi}{3}$) достаточно построить график для углов φ в промежутке $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$, а в остальных двух промежутках использо-

вать периодичность. Итак, пусть $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

Если угол φ изменяется от 0 до 1, то $\sin(3\varphi)$ изменяется от 0 до 1, и, следовательно, радиус также изменяется от 0 до 1. Если угол изменяется от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{3}$, то радиус изменяется от 1 до 0. Таким образом, при изменении угла φ от 0 до $\frac{\pi}{3}$, точка на плоскости описывает кривую, похожую на очертания лепестка и возвращается в начало координат. Такие же лепестки получаются, когда угол φ изменяется в пределах от $\frac{2\pi}{3}$ до π и от $\frac{4\pi}{3}$ до $\frac{5\pi}{3}$.

Рассмотрим теперь, как построить кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $\rho = \sin(2\varphi)$. Данная функция периодическая с периодом π . Кроме того, $\sin\left(2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin(2\varphi)$, поэтому

достаточно построить кривую в первой четверти, потом зеркально отразить ее относительно оси Oy и использовать периодичность для построения кривой в третьей и четвертой четвертях.

Рассматриваемая функция на отрезке $[0; \frac{\pi}{4}]$ монотонно возрастает с 0 до 1, а на отрезке $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ монотонно убывает от 1 до 0. Таким образом, мы получили лепесток розы, лежащий в первой четверти. Остальные три лепестка получатся, если построить кривую в оставшихся четвертях.

Отметим следующие интересные свойства четырёхлепестковой розы:

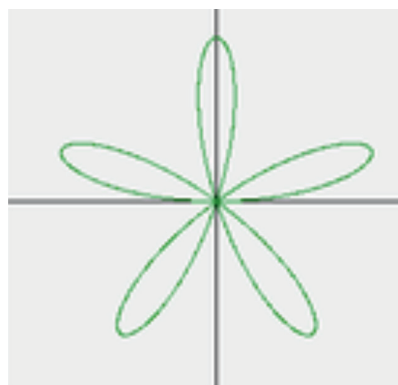
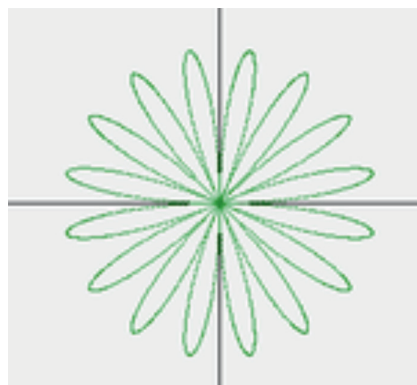


Рис. 2. График «розы» $r = n \cdot \sin(k \cdot a)$

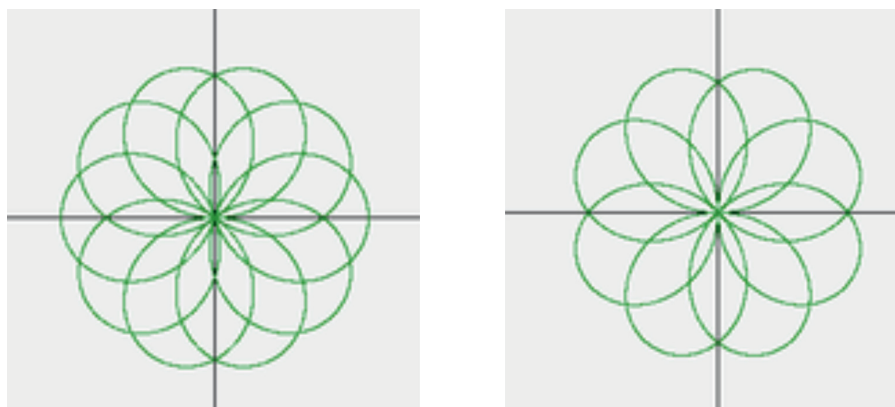


Рис. 3. График «розы» $r = n \cdot \sin((c/b) \cdot a)$

● четырехлепестковая роза есть геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на отрезок длиной 1, концы которого скользят по координатным осям;

● площадь, ограничиваемая четырехлепестковой розой, равна $\frac{\pi}{2}$.

Розы Гранди нашли свое применение в технике, в частности, если некоторая точка совершает колебание вдоль прямой, вращающейся с постоянной скоростью вокруг неподвижной точки – центра колебаний, то траектория этой точки будет розой.

Графики роз Гвидо Гранди для основных уравнений $r = n \cdot \sin(k \cdot a)$ и $r = n \cdot \sin((c/b) \cdot a)$ представлены на рис. 2 и 3.

Исследовав, как изменяются кривые Гвидо Гранди, заданные в полярной системе координат в зависимости различных значений параметров n , k , m , мы установили связь между количеством лепестков, их формул и симметричности получившегося рисунка [7, 8, 11]. Исследования проводились с целью разработки контента информационно-образовательной среды [5, 4, 6] кафедры ОНД АМТИ. В качестве среды моделирования использовалась система MathCAD [2, 3, 9].

В ходе исследовательской работы была приведена также классификация кривых Гвидо Гранди и описаны их основные свойства. Исследовав, как изменяются кривые Гвидо Гранди, заданные в полярной системе координат $r = n \cdot \sin(k \cdot a) + m$ в зависимости различных значений параметров n , k , m , мы установили связь между количеством лепестков, их формул и симметричностью получившегося рисунка. Когда мы получали «розы» из четного количества лепестков, рисунок был симметричен относительно начала координат и осей координат. Если

мы генерировали цветы из нечётного количества лепестков, то рисунок был симметричен только оси ординат.

В ходе исследовательской работы получено большое разнообразие форм «роз» Гвидо Гранди, которые дают фантазию для их применения.

Список литературы

- 1 Гильберт Д. Наглядная геометрия. М.-Л., ОНТИ, 1986 – 304 с.
- 2 Горovenko Л.А. Математические методы компьютерного моделирования физических процессов: учебное пособие / Л. А. Горovenko. – Армавир: РИО АГПУ, 2016. – 104 с.
- 3 Горovenko Л.А. Математические методы компьютерного моделирования физических процессов // Международный журнал экспериментального образования. Пенза: ИД «Академия естествознания», 2017. – № 2. – с. 92-93.
- 4 Горovenko Л.А. Построение информационно-образовательной среды с элементами искусственного интеллекта: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. тех. наук: (05.13.01) / Горovenko Любовь Алексеевна; [Куб. гос. тех. ун-т]. – Краснодар, 2002. – 24 с.
- 5 Горovenko Л.А. Экспертно-обучающие системы оценки знаний, умений, навыков как основа компьютерной технологии обучения // Научный потенциал вуза – производству и образованию: сборник трудов по материалам межвузовской научно-производственной конференции, посвящённой 90-летию КубГТУ. – Армавир: Изд. АМТИ, 2008. С 342-344.
- 6 Горovenko Л.А., Голиус Д.А. Уравнение циклоиды и его приложения в инженерных науках // Сборник докладов победителей и лауреатов XXII студенческой научной конференции АМТИ. Армавир: ООО «Редакция газеты «Армавирский собеседник», подразделение Армавирская типография», 2016. – С. 73-77.
- 7 Горovenko Л.А., Демьянко А.В. Математический цветок: розы Гвидо-Гранди // Сборник докладов победителей и лауреатов XXII студенческой научной конференции АМТИ. Армавир: ООО «Редакция газеты «Армавирский собеседник», подразделение Армавирская типография», 2016. – С. 77-81.
- 8 Горovenko Л.А., Довгалёв А.Ю. Исследование параметров уравнения циклоиды // Сборник докладов победителей и лауреатов XXII студенческой научной конференции АМТИ. Армавир: ООО «Редакция газеты «Армавирский собеседник», подразделение Армавирская типография», 2016. – С. 81-84.
- 9 Горovenko Л.А., Коврига Е.В. Теория и практика компьютерного моделирования физических процессов: учебное пособие / Л.А. Горovenko. – Армавир: РИО АГПУ, 2017. – 132 с.
- 10 Норден А.П. Дифференциальная геометрия 2-е изд. – Москва, Физматгиз, 1988. – 244 с.
- 11 Часов К.В., Вандина А.И. Обучающий интерактивный документ по изучению графиков функций // Успехи современного естествознания. – 2013. – № 10. – С. 101-104; URL: <http://www.natural-sciences.ru/ru/article/view?id=32985> (дата обращения: 23.08.2016).