УДК 517.929

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Колпаков И. Ю.
Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29), Пермский государственный национальный исследовательский университет (614990, Пермь, ул. Букирева, 15), kolpakov.ilia@mail.ru
Ефимов Н.А.
Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29), nfmv@mail.ru
Юдин Р.Ю.
Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29), rostislav-yudin@yandex.ru

В работе найдены условия разрешимости задачи Коши для одного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Построение математических моделей некоторых реальных процессов приводит к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной и, в частности, к задаче, рассматриваемой в работе. Поэтому исследование таких задач является актуальным. С помощью метода явной линеаризации исходная задача сводится к квазилинейной краевой задаче, для доказательства существования решения которой применяется теорема типа Лере-Шаудера. В работе доказывается существование решения рассматриваемой задачи на шаре радиуса R с центром в нуле пространства абсолютно непрерывных функций. Результаты работы могут быть использованы при исследовании краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной.

Ключевые слова: задача Коши; теорема Лере-Шаудера; существование решения.

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR THE DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIRST ORDER WHICH HASN'T BEEN RESOLVED BY RATHER DERIVATIVE

I. Yu. Kolpakov
Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky ave., 29), Perm State University (614990, Perm, Bukireva street, 15), kolpakov.ilia@mail.ru
N. A. Efimov
Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky ave., 29), nfmv@mail.ru
R. Yu. Yudin
Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky ave., 29), rostislav-yudin@yandex.ru

Conditions of solvability of the Cauchy problem for one differential equation of the first order which hasn't been resolved by rather derivative are found in work. Creation of mathematical models of some real processes leads to problems for the ordinary differential equations which haven't been resolved by rather senior derivative and, in particular, to a task, considered in work. Therefore research of such problems is actual. By means of a method of obvious linearization the initial task is reduced to a quasilinear boundary value problem, the Leray–Schauder′s type the theorem is applied to the proof of which existence of the solution. In work existence of the solution of a considered problem on a sphere of radius R with the center in zero of space of the absolutely continuously functions is proved. Results of work can be used at research of boundary value problems for the ordinary differential equations of the first order which haven't been resolved by rather derivative.

Key words: the Cauchy problem; Leray–Schauder's theorem; existence of solution.

Рассмотрим нелинейную задачу для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

$$\begin{cases} g(t,\dot{x}) = f(t,x), \\ x(0) = x_0,\, t \in [0;T], \end{cases} \tag{1}$$

где функции $f, g:[0;T]\times R^1 \to R^1$ и предполагается, что функция g непрерывна, функция f удовлетворяет условию Каратеодори.

Пусть L_p – пространство суммируемых в степени p на отрезке $[0;T]$ функций, L_∞ – пространство измеримых ограниченных в существенном на отрезке $[0;T]$ функций, C - пространство непрерывных на отрезке $[0;T]$ функций, D_p - пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0;T]$ функций с нормой: $\|x\|_{D_p} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L_P}$. Под решением понимается такой элемент пространства D_p, который почти всюду на отрезке $[0;T]$ удовлетворяет уравнению и начальному условию задачи (1).

В работе доказывается существование решения задачи (1) в шаре радиуса R с центром в точке $x=0$ пространства D_p. С помощью метода явной линеаризации задача (1) сводится к квазилинейной задаче с обратимым линейным оператором. В последующем, полученная задача заменяется эквивалентным ей операторным уравнением, к которому применяется теорема типа Лере-Шаудера [10]. При этом решение задачи (1) ищется в предположении, что существует функция $g_0(t,v)=l(t)v$, удовлетворяющая условию: для каждого фиксированного $t\in[0;T]$ на искомом шаре с центром в точке $x=0$ пространства D_p выполняется неравенство

$$|g_0(t,v)-g(t,v)|\le k|v|.$$

Случай задачи (1) с периодическим краевым условием рассматривался ранее в работе [6].

Некоторые математические модели реальных процессов приводят к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной и, в частности, к задаче (1). Обычно при исследовании нелинейных задач, в том числе и задачи (1), используется явная или неявная линеаризация. В частности, в работах [3,5,8] используется редукция нелинейной задачи к некоторой вспомогательной квазилинейной, к которой применяются известные схемы исследования на разрешимость квазилинейных или резонансных краевых задач. К числу методов, использующих неявную линеаризацию нелинейных задач можно отнести метод Ньютона-Канторовича, метод применения теорем о неявной функции, методы теории нелинейных фредгольмовых операторов. В этом случае нелинейный оператор аппроксимируется своей производной [1,2,4].

Обозначим через $h(t)=\dfrac{1}{l(t)}$, при этом будем предполагать, что функции $l(t), l^{-1}(t)\in L_\infty$ на отрезке $[0;T]$. Существование такой функции позволяет задачу (1) переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=h(t)\big(g_0(t,\dot{x})-g(t,\dot{x})+f(t,x)\big), \\ x(0)=x_0,\, t\in[0;T]. \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим через X и Y пространства $X=\left\{x\in D_p[0;T]\,\middle\|\, x(0)=x_0\right\}$ и $Y=L_p[0;T]$ соответственно. Задачу (2) в пространстве X запишем в виде операторного уравнения

$$Lx = Nx\,,$$

где операторы $L\,, N: X\to Y$ определены равенствами

$$Lx=\dot{x}\,,\ Nx=h(t)n(t,x,\dot{x})\,,$$

$$n(t,x,\dot{x})\overset{def}{=}g_0(t,\dot{x})-g(t,\dot{x})+f(t,x)\,.$$

Так как оператор L является обратимым на пространстве X, то краевая задача (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t)=x_0+\int\limits_0^t h(s)n\big(s,x(s),\dot{x}(s)\big)ds\,. \tag{3}$$

Соответствующее операторное уравнение тогда запишется в виде

$$x=KNx\overset{def}{=}Fx\,,$$

где $F:X\to X$, $K:Y\to X$ - обратный к L оператор.

Ниже под $\overline{S_R(0)}$ и $\sigma_R(0)$ понимается замкнутый шар и сфера радиусов R с центрами в нуле.

Для нахождения условий существования решения уравнения (3) воспользуемся теоремой типа Лере – Шаудера [10] из книги [9, стр.406]:

Теорема 1. Пусть оператор F действует из шара $\overline{S_R(0)}\subset X$ в X и вполне непрерывен. Если $\|Fx\|\le\|x\|$ для всех x с $\|x\|=R$, то оператор F имеет в $\overline{S_R(0)}$ неподвижную точку.

Для доказательства полной непрерывности произведения KN рассмотрим расширение оператора K на пространство C, то есть будем считать, что оператор K действует из пространства L_p в C. Тогда оператор K вполне непрерывен, а, следовательно, произведение KN также вполне непрерывно. Не трудно показать, что $\|Ky\|_C\le|x_0|+T^{1/q}\|y\|_{L_p}$.

Докажем существование решения уравнения $x(t)=x_0+\int\limits_0^t (Nx)(s)\,ds$ на пространстве X, содержащегося в пространстве C. Тогда, вследствие непрерывности оператора N, правая часть данного уравнения принадлежит D_p и, следовательно, само решение $x(t)$ также принадлежит D_p. Это доказывает существование решения исходной задачи (1) в пространстве D_p. Подобный подход использовался в работе [7].

Для нахождения эффективных условий разрешимости, ценим оператор N в уравнении (3):

$$\|Nx\|_{L_P}=\left\|h(t)n\left(t,x(t),\dot{x}(t)\right)\right\|_{L_P}=\left(\int\limits_0^T\left|h(s)n\left(s,x(s),\dot{x}(s)\right)\right|^p ds\right)^{1/p}\le c\left(\int\limits_0^T\left|n\left(s,x(s),\dot{x}(s)\right)\right|^p ds\right)^{1/p}\le$$

$$\le c\left(\left(\int\limits_0^T\left|g_0\left(s,\dot{x}(s)\right)-g\left(s,\dot{x}(s)\right)\right|^p ds\right)^{1/p}+\left(\int\limits_0^T\left|f\left(s,x(s)\right)\right|^p ds\right)^{1/p}\right)\le$$

$$\le c\left(k\left(\int\limits_0^T\left|\dot{x}(s)\right|^p ds\right)^{1/p}+\left(\int\limits_0^T\left|a+bx(s)\right|^p ds\right)^{1/p}\right)\le$$

$$\le c\left(k\|\dot{x}\|_{L_P}+aT^{1/p}+b\left(\int\limits_0^T\left|x_0+\int\limits_0^s\dot{x}(\tau)\,d\tau\right|^p ds\right)^{1/p}\right)\le +$$

$$\le c\left(k\|\dot{x}\|_{L_P}+aT^{1/p}+bT^{1/p}\left(|x_0|+\int\limits_0^T\left|\dot{x}(\tau)\right|d\tau\right)\right)\le$$

$$\le c\left(aT^{1/p}+bT^{1/p}|x_0|+(k+bT)\|\dot{x}\|_{L_P}\right)\le c\left(aT^{1/p}+\alpha\|x\|_{D_P}\right)$$

(где $c=vrai\sup\left|h(t)\right|$, $\alpha=\max\left(bT^{1/p};k+bT\right)$).

Так как $\|x\|_C\le\beta\|x\|_{D_P}$, где $\beta=\max\left(1;T^{1/q}\right)$, то условие Теоремы 1: $\|Fx\|\le\|x\|$ для всех x с $\|x\|=R$, примет вид

$$|x_0|+T^{1/q}c\left(aT^{1/p}+\alpha\|x\|_{D_P}\right)\le\|x\|_{D_P}.$$

Из данного неравенства находим радиус шара R, на котором существует решение уравнения (3):

$$\|x\|_{D_P}\ge\frac{|x_0|+acT}{1-\alpha cT^{1/q}}.$$

Откуда следует, что если $\alpha c T^{1/q} < 1$, то на сфере $\sigma_R(0) \subset X$ радиуса $R = \dfrac{|x_0| + acT}{1 - \alpha c T^{1/q}}$ выполнены условия теоремы 1.

Таким образом, доказано утверждение о существовании решения краевой задачи (1):

Теорема 2. Пусть функция $g(t,v)$ непрерывна, функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию Каратеодори и существует функция $g_0(t,v) = l(t)v$ $(l(t), l^{-1}(t) \in L_\infty)$, удовлетворяющая условию:

для каждого фиксированного $t \in [0;T]$ выполняется неравенство

$$|g_0(t,v) - g(t,v)| \le k|v|.$$

Тогда если выполнены условия

1) $|f(t,x)| \le a + b|x|$;

2) $\alpha c T^{1/q} < 1$,

где $\alpha = \max\left(bT^{1/p}; b_0 + bT\right)$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$, $c = vrai\sup\left|l^{-1}(t)\right|$,

то существует решение задачи (1) на шаре $\overline{S_R(0)} \subset D_p[0;T]$ с радиусом $R = \dfrac{|x_0| + acT}{1 - \alpha c T^{1/q}}$.

Список литературы

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, пер. с англ., М., 1968. 184 с.
2. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера // УМН,1977. т.32, №4. С.3-54.
3. Диблик Й. Существование и единственность решения начальной краевой задачи для дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производных // Деп. в ВИНИТИ. 1984, № 908-84.
4. Дмитриенко В.Т. Двухточечная краевая задача для дифференциальных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Куйбышев, 1982. С.47-58.
5. Елисеенко М.Н. О периодических решениях обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, не разрешенных относительно производных // Дифференциальные уравнения, 1985, т.21, №9. С. 1618-1621.

6. Колпаков И.Ю. О существовании периодического решения краевой задачи для одного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной // Современные проблемы науки и образования, 2014, №3. http://www.science-education.ru/117-13237.
7. Максимов В.П. Вопросы общей теории ФДУ: дис. докт. физ.-мат. наук. - Пермь, 1984. – 254 с.
8. Просенюк Л.Г. Существование и асимптотика О-решений дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной // Украинский математический журнал, 1987. т.39, №6. С.796-799.
9. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002, 488 с.
10. J. Leray – J. Schauder // Ann. Ecole Norm. Sup. 1934. Vol. 51, № 3. P. 45–78.