Приложение криволинейных интегралов к решению задач по физике

Евдокимова И. С., магистрант ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет»

Аннотация

Умение интегрировать функции связано не только с вычислением интеграла, но и с умением применять соответствующие знания к решению прикладных задач. В данной работе приведены задачи на применение криволинейных интегралов первого и второго рода. При написании работы важно было разобрать основные виды прикладных задач, показать способы решения задач, дать графическое сопровождение задачи, что позволяет более точно представить объект исследования и быстро найти необходимый путь решения. При этом графическое сопровождение задачи делает ее не только более видимой для решения, но и более интересной, ведь достаточно часто оказывается трудным найти решение еще и потому, что нет четкого представления о той фигуре, с которой связано условие задачи.

В статье показано, что интегрирование в математическом анализе – не просто обратная операция по отношению к дифференцированию, а метод, позволяющий получить эффективное решение многих задач. Приведенные в статье задачи расширяют круг задач, решаемых с помощью криволинейных интегралов, повышают интерес к изучаемой теме.

Ключевые слова: криволинейный интеграл, интеграл, винтовая линия, масса, работа, индукция, магнитное поле.

Evdokimova, I. S., master student of the "Smolensk state University"

Abstract

The ability to integrate the functions associated not only with the evaluation of the integral, but also with the ability to apply appropriate knowledge to the solution of applied problems. In this work the objectives for the use of curvilinear integrals of the first and second kind. When writing it is important to understand the main types of applied problems, to show how to solve problems, to give graphical support allows one to more accurately represent the object of study and quickly find the required solution. The graphical support of the task makes it not only more visible for the solution, but also more interesting, because quite often difficult to find a solution because there is no clear idea about the figure, which is associated with the task condition.

The article shows that the integration of the mathematical analysis is not simply the reverse operation relative to differentiation, and a method to get an effective solution of many problems. In article objectives expand the range of tasks solved by means of curvilinear integrals, raise interest in the subject.

Key words: line integral, integral, helix, weight, work, induction, magnetic field.

Теория криволинейных интегралов представляет собой раздел математического анализа, где происходит обощение методов интегрального исчисления на вычисление интегралов по областям, которые расположены на плоскости или в пространстве.

Именно с помощью криволинейных интегралов можно высчитать длину кривой, статические моменты, координаты центра тяжести, площади плоских фигур и цилиндрической поверхности, работу переменной силы и многое другое. Поскольку приложения криволинейных интегралов очень обширны, можно сделать вывод о том, что выбранная тема является актуальной [5].

Раздел «Криволинейные интегралы» является одним из основных в курсе математического анализа, порой трудно поддающимся для глубокого усвоения и понимания изучаемого материала.

Рассмотрим ряд задач, имеющих прикладной характер:

1. Вычислить момент инерции относительно аппликаты одного витка однородной винтовой линии (Рис. 1) $p(x, y, z) = p$ [1].

$$x = r\cos\omega t, y = r\sin\omega t, z = \vartheta t, 0 \le t \le 2\pi .$$

<u>Решение:</u> По формулам, получаем $I_z = \int_0^{2\pi}(x^2 + y^2)p\,dl = \int_0^{2\pi} r^2 p\sqrt{r^2\omega^2 + \vartheta^2}dt = 2\pi r^2 p\sqrt{r^2\omega^2 + \vartheta^2}$.

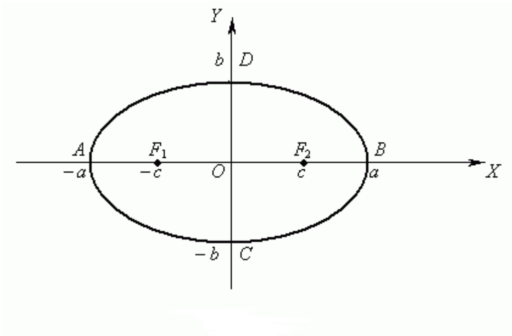

Рис. 1

<u>Решение:</u> Данная задача сводится к вычислению криволинейного интеграла первого рода $\int_L |y|dl$. Используя формулу вычисления момента инерции получим:

$$\int_L |y|dl = b\int_0^{2\pi} |\sin t|\sqrt{a^2 sin^2 t + b^2 cos^2 t}\, dt =$$

$$= b\int_0^{\pi} \sin t\sqrt{a^2 sin^2 t + b^2 cos^2 t}\, dt$$

$$- b\int_{\pi}^{2\pi} \sin t\sqrt{a^2 sin^2 t + b^2 cos^2 t}\, dt =$$

$$= -b\int_0^{\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)cos^2 t}\; d(\cos t)$$

$$+ b\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)cos^2 t}\; d(\cos t) =$$

$$= 2b(b + a\frac{\arcsin e}{e})$$

где $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

2. Вычислить ньютонов потенциал окружности $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ массой m в точке $P(a, 0, c)$, плотность в любой точке окружности пропорциональна расстоянию от этой точки до оси OX [3].

<u>Решение:</u> Воспользуемся полярными координатами (рис. 2):

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi$$

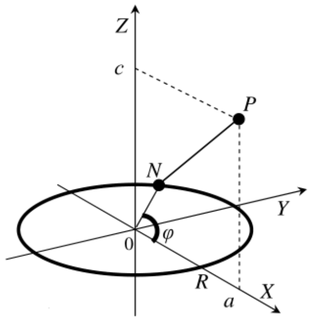

Рис. 2

Получаем $dl = \sqrt{(-R\sin\varphi)^2 + (R\cos\varphi)^2}\,d\varphi = Rd\varphi$.

$$|NP| = \sqrt{(R\cos\varphi - a)^2 + (R\sin\varphi)^2 + c^2}$$
$$= \sqrt{R^2 + a^2 + c^2 - 2Ra\cos\varphi}.$$

Плотность линии в точке $N(x,y)$: $\mu = k|y| = kR|\sin\varphi|$. Очевидно, что нам надо подсчитать коэффициент $k, k > 0$. Вычислим массу окружности:

$m = 2\int_0^\pi \mu\, dl = 2kR^2\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi = 4kR^2$. $m = 4kR^2 \Rightarrow k = \frac{m}{4R^2}$.

По формуле вычисления потенциала в некоторой точке M_0:

$U(M_0) = \int_L \frac{\mu(x,y,z)}{R(x,y,z)}dl$ получим: $U(P) = \int_L \frac{\mu dl}{|PN|} = 2\int_0^\pi \frac{k\,R^2\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{R^2+a^2+c^2-2Ra\cos\varphi}}$.

Произведем замену: $s = R^2 + a^2 + c^2 - 2Ra\cos\varphi$.

$ds = 2Ra\sin\varphi\, d\varphi$. Если $\varphi = 0$, тогда $s = c^2 + (R-a)^2$, а если $\varphi = \pi$, то $s = c^2 + (R+a)^2$. Подставив все наши преобразования в формулу:

$$U(P) = \frac{kR}{a}\int_{c^2+(R-a)^2}^{c^2+(R+a)^2}\frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{m}{2aR}\left(\sqrt{c^2+(R+a)^2} - \sqrt{c^2+(R-a)^2}\right) =$$
$$= \frac{2m}{\sqrt{c^2+(R+a)^2} + \sqrt{c^2+(R-a)^2}}.$$

3. Вычислить работу векторного поля $F = \left(2y + y\sin\frac{\pi x}{y}\right)i - \left(\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{y} + x + x\sin\frac{\pi x}{y}\right)j$ вдоль правой части кривой $x^2 + y^2 + 30 = 4x + 12y$ от точки $A(1,3)$ до точки $B(3,9)$[6].

<u>*Решение:*</u> Преобразуем уравнение кривой $x^2 + y^2 + 30 = 4x + 12y$. Данное уравнение $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 10$ задает окружность с

радиусом $r = \sqrt{10}$, с центром в точке $C(2{,}6)$. Точки A и B лежат на этой окружности, причем противоположно, на диаметре. Обозначим путь Γ_1, который обозначает правую дугу окружности, которая соединяет точки A и B. А путь Γ_2 – отрезок прямой AB. Тогда необходимая нам область – это полукруг радиуса $r = \sqrt{10}$.

Зададим путь Γ_2: $y = 3x$, где x изменяется от 1 до 3. Получаем:

$$P = 2y + y\sin\frac{\pi x}{y} = 6x + 3x\sin\frac{\pi}{3} = x\left(6 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$Q = -\left(\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{y} + x + x\sin\frac{\pi x}{y}\right) = -\frac{6x}{\pi}\cos\frac{\pi}{3} - x - x\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$= -x\left(\frac{3}{\pi} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $dy = 3\,dx$.

$$\int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy = \int_1^3 x\left(6 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{\pi} - 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)dx = 4\left(3 - \frac{9}{\pi}\right).$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{y} + x + x\sin\frac{\pi x}{y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2y + y\sin\frac{\pi x}{y}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{y} - 1 - \sin\frac{\pi x}{y} - \frac{\pi x}{y}\cos\frac{\pi x}{y} - 2 - \sin\frac{\pi x}{y} + \frac{\pi x}{y}\cos\frac{\pi x}{y} = -3.$$

Если D – наша область, то формулу нахождения работы можно записать так:

$$\int_{\Gamma_1} F\,dl = \int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy + \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= 4\left(3 - \frac{9}{\pi}\right) + \iint_D (-3)dxdy = 4\left(3 - \frac{9}{\pi}\right) - 3 * \frac{1}{2} * 10\pi =$$

$= 4\left(3 - \frac{9}{\pi}\right) - 15\pi.$

4. Найти индукцию магнитного поля в вакууме на расстоянии $r = 15$ см от оси бесконечно длинного проводника с током $I = 10$ А.

Решение: Выведем для начала нашу формулу в общем виде. Рассмотрим круговой контур произвольного радиуса (рис.3) r, который расположен перпендикулярно проводнику с током I.

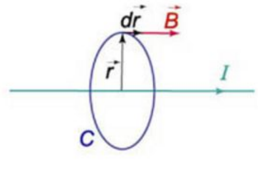

Рис. 3

Так как магнитное поле направлено по касательной к круговому контуру в любой его точке, то скалярное произведение $\vec{B}, d\vec{r}$ равно Bdr. Воспользуемся формулой криволинейного интеграла:

$\oint_C B\, dr = \oint \ Bdr = B\oint_C \ dr = 2\pi r B$. В результате получим: $2\pi r B = \mu\,\mu_0 I$ или $B = \frac{\mu\,\mu_0 I}{2\pi r}$, где $\mu -$ относительная магнитная проницаемость среды,

$\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ – магнитная постоянная. Подставляя данные нашей задачи, получим $B = \frac{4\pi * 10^{-7}\frac{\text{Гн}}{\text{м}} * 10\ A}{2\pi * 0{,}15\ \text{м}} \approxeq 133 * 10^{-7}$ Тл.

5. Рассчитать значение электрического поля E и электродвижущей силы ε, которые возникают в кольце $r = 4$ см у летчика самолета в магнитном поле Земли, если летчик разгонит самолет до скорости 864 км/ч.

   <u>Решение:</u> Рассчитаем для начала значение электрического поля. Образованное электрическое поле имеет постоянную амплитуду в силу симметрии абсолютно в любой точке кольца. Данное электрическое поле направлено к кольцу по касательной в любой его точке. Вычислим криволинейный интеграл: $\varepsilon = \oint_C \ E\, dr = \oint_C \ E\, dr \cos 0 = E\oint_C \ dr = 2\pi r E$.

   Очевидно, что для вычисления электродвижущей силы, необходимо найти электрическое поле. По закону Фарадея $\varepsilon = \oint_C \ E\, dr = -\frac{d\psi}{dt}$. Появляется изменение магнитного потока ψ, которое проходит через кольцо, так как проводящее кольцо перемещается в магнитном поле Земли. Сделаем предположение, что магнитное поле B перпендикулярно плоскости кольца. Изменение магнитного потока за Δt равно $\Delta\psi = 2rBv\Delta t$, где $v -$скорость самолета. Подставляя в формулу, полученную выше, получаем:

   $\varepsilon = -\frac{d\psi}{dt} = 2rBv$. Все формулу найдены, теперь осталось только подсчитать:

   $\varepsilon = 2rBv = 2 * 0{,}04\ \text{м} * 5 * 10^{-5}\ T * 240\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 0{,}00096\ B.$

   $E = \frac{\varepsilon}{2\pi r} = \frac{0{,}00096\ B}{2\pi * 0{,}04\text{м}} \approxeq 0{,}004\frac{B}{\text{м}}.$

6. В деревне Черныши Краснинского района трактористу Анатолию надо вспахать борозду, чтобы засеять ее морковью. Сложность работы Анатолия заключается в том, что борозда неровная и через равные участки длиной 5 м ему попадаются сильные насыпи одинакового размера в форме циклоиды, высотой 65 см, причем их 8 штук. За сколько примерно времени тракторист вспашет борозду, если скорость его рабочей машины 7,2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

Решение: Для решения данной задачи необходимо найти длину нашей борозды (рис. 4). Найдем длину нашей борозды, но для начала найдем длину одной насыпи.

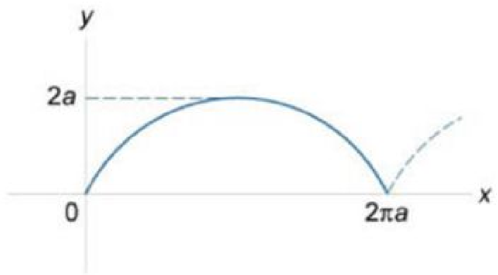

Рис. 4

Зададим нашу линию параметрически:

$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t), \text{где } t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$ Будем использовать формулу $L = \int_{AB} dl = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$.

Вычислим производные:

$\frac{dx}{dt} = \frac{d(a(t - \sin t))}{dt} = a(1 - \cos t), \frac{dy}{dt} = \frac{d(a(1 - \cos t))}{dt} = a \sin t.$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + cos\ ^2 t + sin^2 t)}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(2 - 2\cos t)} dt$$

$$= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\, sin^2(\frac{t}{2})} dt =$$

$$= 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 2a \left[\left(-\frac{\cos\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} \right) |_0^{2\pi} \right] = 4a(-\cos\pi + \cos 0) = 8a.$$

Высота нашей насыпи 0,65 м, значит $2a = 0{,}65$; $a = 0{,}325$, поэтому длина нашей насыпи $8 * 0{,}325$ м $= 2{,}6$ м.

Так как всего наших насыпей 8 штук, то значит длина всех неровностей 20,8м.

Но наша борозда состоит и из ровных участков, длиной 5м (рис. 5), их 9 штук:

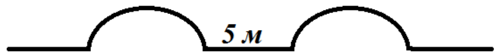

Рис.5

Подсчитаем общую длину борозды: $9 * 5\text{м} + 20{,}8\text{м} = 65{,}8\text{м}.$

Переведем $7{,}2\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{7200}{60*60} = 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Осталось подсчитать время $t = \frac{65{,}8\ \text{м}}{2\frac{\text{м}}{\text{с}}} = 32{,}9$ с.

В статье показано, что интегрирование в математическом анализе – не просто обратная операция по отношению к дифференцированию, а метод, позволяющий получить эффективное решение многих задач. Приведенные в статье задачи расширяют круг задач, решаемых с помощью криволинейных интегралов, повышают интерес к изучаемой теме.

Список литературы

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа/Берман Г.Н.– М.: Наука, 1969. – 440 стр.
2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа для втузов: Учебник для вузов./ Бермант А. Ф., Араманович И. Г.– М.: Наука, 1966. – 736 с.
3. Бохан К.А. Курс математического анализа. Т. II./Бохан К.А., Егорова И.А., Лащенов К.В.– М.: издательство «Просвещение», 1966.
4. Будаев В.Д. Математический анализ для студентов-физиков. Часть 2. Дифференциальное и интегральное исчисления и их приложения/ Будаев В.Д., Василенков В.Д. – Смоленск: СГПИ, 1997.
5. Виленкин Н.Я. Задачник по курсу математического анализа. Ч. II.Под ред. Н.Я. Виленкина. Учебн. пособие для

студентов заоч. отд-ний физ-мат. Фак. Techинститутов./Виленкин. Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А.-М.,«Просвещение», 1971. 336 с. Перед загл. Авт. и др.

6. Ильин В.А. Основы математического анализа: в 2-х ч. Часть II: Учеб.: Для вузов. – 5-е изд./ Ильин В.А., Поздняк Э.Г. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 464 с. – (Курс высшей математики и математической физики).

7. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. II: Учебник. – 7-е изд./ Фихтенгольц Г.М.- М.:ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 440 с.