УДК 519.812.3: 519.21: 330.4

ПРИНЯТИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОЦЕНОК И СУЖДЕНИЙ

А.С. ЛОМАКИНА
Факультет Бизнеса и менеджмента Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», Россия, 101000, Москва, ул. Мясницкая, д. 20. E-mail: Anastasia-993@mail.ru

В статье рассматривается метод принятия многокритериальных решений при интервальной неопределенности суждений и оценок, выносимых лицом, принимающим решение (ЛПР). Метод является развитием классического точечного метода аналитической иерархии Т. Саати (МАИ), в котором все оценки как критериев, так и альтернатив по критериям, являются точечными и однозначно определенными. В рассматриваемом методе (ИС-МАИ – интервально стохастическом) оценки критериев и альтернатив по критериям в матрицах попарных сравнений являются интервальными и равномерно распределенными внутри интервалов случайными величинами. В отличие от классического точечного метода МАИ, разработанный метод ИС-МАИ учитывает психологию человека при принятии решения, вынесении суждений и оценок. Получающиеся в методе ИС-МАИ глобальные приоритеты альтернатив носят интервальный характер, что позволяет, совместно с анализом введенной величины интервальной устойчивости альтернативы, принимать наилучшие научно обоснованные многокритериальные решения, отвечающие психологии суждений и оценок человека. Применение разработанного интервально стохастического метода ИС-МАИ рассмотрено на практической проблеме выбора грузового автомобиля из четырех альтернатив по пяти критериям.

Ключевые слова: метод аналитической иерархии, интервальные оценки, интервальная матрица попарных сравнений, интервально стохастический, неопределенность, принятие решения, многокритериальный, альтернативы

A.S. LOMAKINA (ПЕРЕВОД НА АНГЛ.)
Faculty of Business and management, National research University "Higher school of Economics", Moscow, Russia, 101000, Moscow, Myasnitskaya str. 20. E-mail Anastasia-993@mail.ru

The article discusses a method of multi-criteria decision making under interval uncertainty and judgments made by the decision maker (DM). The considered method is a development of the classical point method, analytical hierarchy process of T. Saati (AHP), in which all the scores in both criteria and alternatives on criteria that are point and clearly defined. In the present method (EC-MAI – interval stochastic) the evaluation criteria and alternatives according to the criteria in the pairwise comparison matrices are interval and uniformly distributed in the interval random variables. In contrast to the classical point method the AHP method was developed of is-MAI takes into account human psychology when making decisions, making judgments and evaluations. The resulting method is-MAI global priorities of the alternatives are interval in nature, which allows, together with the analysis of the entered value is interval sustainability of alternatives to make better scientifically-based multiobjective solutions corresponding psychology and judgments of a human. The application of the developed stochastic interval method MAI is used for solution of the practical problem of choosing the truck of the four alternatives in the five criteria.
Key words: analytical hierarchy process, interval assessment, pairwise comparison matrix, interval stochastic, uncertainty, decision making, multicriteria, alternatives

Введение

Любые решения, принимаемые в настоящем, приведут к результатам и последствиям только в будущем, при этом достоверно и точно спрогнозировать к какому именно результату приведет принятое ранее решение практически невозможно. Помимо проблемы неопределенности и непредсказуемости будущего необходимо принимать во внимание и тот факт, что в любом процессе принятия решения в значительной степени присутствует человеческие фактор, который оказывает влияние на окончательное решение лица, принимающего решение (ЛПР): выбор критериев, наилучшей, для данного ЛПР, альтернативы, вынесение суждений и оценок, и пр. Психология вынесения суждений и оценок человеком [9], свидетельствует о том, что как суждения, так и оценки даются не в точечном, а интервальном виде [2, 3, 5]. При этом любое значение оценки внутри интервала ее изменения равновероятно, то есть имеют равномерное распределение вероятностей. Поэтому модель интервально неопределенных оценок является интервально стохастической и представляет собой случайные равномерно распределенные величины в интервале своего изменения [1, 3, 6].

Среди большого количества существующих методов принятия многокритериальных решений [1], метод аналитической иерархии (МАИ) является на сегодняшний день наиболее универсальным и научно обоснованным методом, позволяющим принимать наилучшие решения при многих критериях как качественных, так и количественных [7]. Однако классический метод МАИ [1, 4, 8] имеет дело лишь с однозначными, точечными оценками и не позволяет принимать решение в условиях интервальной неопределенности суждений и оценок, отвечающей психологии вынесения оценок и суждений человеком..

В статье рассматривается интервально стохастический метод аналитической иерархии (ИС-МАИ), развитый в работах проф. А.Г. Мадеры [3, 5], позволяющий принимать наилучшие решения в многокритериальных проблемах при интервально стохастической неопределенности суждений и оценок. Применение метода продемонстрировано на конкретной многокритериальной неопределенной проблеме принятия решения о закупке руководством фирмы грузового автомобиля.

Интервально стохастический метод аналитической иерархии ИС-МАИ

Теоретическое обоснование метода ИС-МАИ приведено в [3], детерминированный классический метод МАИ – в [1, 4, 8]. Алгоритм применения метода ИС-МАИ для произвольной матрицы попарных сравнений содержит следующие шаги:

1. Строится интервально стохастическая матрица попарных сравнений (оценок критериев и сравниваемых альтернатив по каждому критерию), вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & [\underline{a}_{12}, \overline{a}_{12}] & \cdots & [\underline{a}_{1j}, \overline{a}_{1j}] & \cdots & [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}] \\ [1/\underline{a}_{12}, 1/\,\overline{a}_{12}] & 1 & \cdots & [\underline{a}_{2j}, \overline{a}_{2j}] & \cdots & [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}] \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ [1/\underline{a}_{1j}, 1/\,\overline{a}_{1j}] & [1/\underline{a}_{2j}, 1/\,\overline{a}_{2j}] & \cdots & 1 & \cdots & [\underline{a}_{in}, \overline{a}_{in}] \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ [1/\underline{a}_{1n}, 1/\,\overline{a}_{1n}] & [1/\underline{a}_{2n}, 1/\,\overline{a}_{2n}] & \cdots & [1/\underline{a}_{in}, 1/\,\overline{a}_{in}] & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

где $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ – интервальная оценка значимости фактора по фундаментальной шкале [1, 3]; $\underline{a}_{ij}$ и $\overline{a}_{ij}$ – нижняя и верхняя границы интервала изменения. Оценки в матрице попарных сравнений являются статистически независимыми равномерно распределенными случайными величинами $a_{ij}(\omega) \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, $\omega \in \Omega$, где ω – элементарные события из пространства элементарных событий Ω [7].

2. Определение нормированных статистических мер (математических ожиданий (МО), дисперсий (Д), среднеквадратических отклонений СКО)) элементов w_i собственных векторов $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, или векторов приоритетов (коэффициентов важности):

$$\text{МО}_{wi} = \frac{w_i^*}{\sum_{i=1}^n w_i^*}, \tag{1}$$

$$w_i^* = c_{i1} c_{i2} \cdot \ldots \cdot c_{i,i-1} \cdot 1 \cdot b_{i,i+1} b_{i,i+2} \cdot \ldots \ b_{i,n},$$

– если элемент в столбце j и -й строке матрицы A имеет вид $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, то компонент в произведении w_i^* равен

$$b_{ij} = \frac{\overline{a}_{ij}^{\,1+1/n} - \underline{a}_{ij}^{\,1+1/n}}{(\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})(1 + 1/n)},$$

– если элемент в столбце j и i-й строке матрицы A имеет вид $[1/\underline{a}_{ij}, 1/\,\overline{a}_{ij}]$, то компонент w_i^* в произведении равен

$$c_{ij} = \frac{\overline{a}_{ij}^{\,1-1/n} - \underline{a}_{ij}^{\,1-1/n}}{(\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})(1 - 1/n)}.$$

$$\text{Д}_{wi} = \frac{w_i^{**}}{\sum_{i=1}^n w_i^*} \tag{2}$$

$$w_i^{**} = d_{i1} d_{i2} \cdot \ldots \cdot d_{i,i-1} \cdot 1 \cdot e_{i,i+1} e_{i,i+2} \cdot \ldots \ e_{i,n},$$

– если элемент в столбце j и -й строке матрицы A имеет вид $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, то компонент в w_i^{**} произведении равен

$$e_{ij} = \frac{\overline{a}_{ij}^{\,1+2/n} - \underline{a}_{ij}^{\,1+2/n}}{(\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})(1 + 2/n)},$$

– если элемент в столбце j и i-й строке матрицы A имеет вид $[1/[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, то компонент w_i^{**} в произведении равен

$$d_{ij} = \frac{\overline{a}_{ij}^{\,1-2/n} - \underline{a}_{ij}^{\,1-2/n}}{(\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})(1 - 2/n)},$$

$$\text{СКО}_{wi} = (\text{Д}_{wi})^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

3. Определение нормированных МО, Д и СКО векторов приоритетов для критериев и альтернатив по каждому критерию.

В точечном детерминированном методе МАИ [8] составляются несколько матриц попарного сравнения: одна матрица (A_f) для критериев $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T$ и m матриц (A_x^f) для альтернатив $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T$ относительно каждого критерия из вектора f. Затем для каждой матрицы попарных сравнений критериев определяются их собственные векторы, являющиеся векторами приоритетов критериев $w_f = (w_{f1}, w_{f2}, \dots, w_{fmn})^T$ и векторами приоритетов альтернатив $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ относительно каждого критерия f_i ($i = 1,2, \dots, m$), то есть $w_x^{fi} = (w_{x1}^{fi}, w_{x2}^{fi}, \dots, w_{xk}^{fi})^T$.

В рассматриваемом интервально стохастическом *методе Мадеры* ИС-МАИ, в отличие от классического МАИ, элементы матриц попарных сравнений являются интервально стохастическими и имеют случайные собственные векторы. Вычислим их статистические меры – МО по (1), Д по (2) и СКО по (3) – для векторов приоритетов *критериев* $w_f = (w_{f1}, w_{f2}, \dots, w_{fmn})^T$: МО_{wfi} , Д_{wfi} , СКО_{wfi} , и векторов приоритетов *альтернатив* $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ относительно каждого критерия f_i ($i = 1,2, \dots, m$), то есть $w_x^{fi} = (w_{x1}^{fi}, w_{x2}^{fi}, \dots, w_{xk}^{fi})^T$: МО_{wxj}^{fi}, Д_{wxj}^{fi}, СКО_{wxj}^{fi}.

4. Определение нормированных МО, Д и СКО для вектора глобальных приоритетов альтернатив каждой альтернативы (решения).

Значения глобальных приоритетов (ГП) альтернатив в детерминированном МАИ [8], по величине которых производится окончательный выбор наилучшего решения в многокритериальной проблеме, вычисляются как сумма произведений приоритетов данной альтернативы относительно каждого критерия на приоритеты соответствующих критериев.

В интервально стохастическом *методе Мадеры* (ИС-МАИ) приоритеты как критериев $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$, так и альтернатив $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ относительно каждого критерия f_i ($i = 1,2, \dots, m$), то есть $w_x^{fi} = (w_{x1}^{fi}, w_{x2}^{fi}, \dots, w_{xk}^{fi})^T$, представляют собой случайные величины. Поэтому глобальные приоритеты Γ_{xj} альтернатив x_j ($j = 1,2, \dots, k$) также будут случайными и независимыми между собой. Вычислим их статистические меры: $\text{МО}_{\Gamma j}$, и $\text{Д}_{\Gamma j}$, $\text{СКО}_{\Gamma j}$ ($\text{СКО}_{\Gamma j} = (\text{Д}_{\Gamma j})^{\frac{1}{2}}$):

$$\text{МО}_{\Gamma j} = \sum_{i=1}^{m} \text{МО}_{wxj}^{fi} \cdot \text{МО}_{wfi},$$

$$\text{Д}_{\Gamma j} = \sum_{i=1}^{m} \text{Д}_{wxj}^{fi} \cdot \text{Д}_{wfi} + \text{Д}_{wxj}^{fi} \cdot \text{МО}_{wfi}^2 + \text{Д}_{wfi} \cdot (\text{МО}_{wxj}^{fi})^2.$$

5. По вычисленным значениям $\text{МО}_{\Gamma j}$, $\text{Д}_{\Gamma j}$ и $\text{СКО}_{\Gamma j}$ для значений Γ_{xj} относительно каждой альтернативы x_j ($j = 1,2, \dots, k$), строятся ε -интервалы, внутри которых с доверительной вероятностью $P_{\text{дов}}$ будут лежать значения ГП, а именно, $\Gamma_{xj} \in [\underline{\Gamma}_{xj}, \overline{\Gamma}_{xj}]$. При этом нижние и верхние границы $\underline{\Gamma}_{xj}, \overline{\Gamma}_{xj}$ интервалов ГП альтернатив x_j равны $\underline{\Gamma}_{xj} = \text{МО}_{\Gamma j} - \varepsilon \cdot \text{СКО}_{\Gamma j}$, $\overline{\Gamma}_{xj} = \text{МО}_{\Gamma j} + \varepsilon \cdot \text{СКО}_{\Gamma j}$, или значения Γ_{xj} для альтернативы x_j заключены в

интервале $\text{МО}_{\Gamma j} - \varepsilon \cdot \text{СКО}_{\Gamma j} \le \Gamma_{xj} \le \text{МО}_{\Gamma j} + \varepsilon \cdot \text{СКО}_{\Gamma j}$. Целесообразно выбирать $\varepsilon = 3$, при котором вероятность обнаружить ГП вне $[\underline{\Gamma}_{xj}, \overline{\Gamma}_{xj}]$ менее 0,1 [7].

6. Построение диаграммы интервальных глобальных приоритетов и принятие наилучшего решения в интервально стохастическом *методе Мадеры* (ИС-МАИ) [3, 5].

Полученные в п. 5 интервалы возможных значений ГП служат для выбора наилучшей альтернативы, который осуществляется посредством анализа относительного расположения нижних и верхних границ интервалов ГП различных альтернатив. Целесообразно выбирать такое интервальное решение, для которого нижняя и верхняя границы интервала ГП имеют максимальные значения среди границ интервалов ГП других альтернатив. Так, на рис. 1,а таковым является интервал ГП альтернативы *x*'. Худшей будет альтернатива *x*' (рис. 1,а), для которой границы ГП минимальны и сдвинуты влево. Сказанное справедливо и для тех

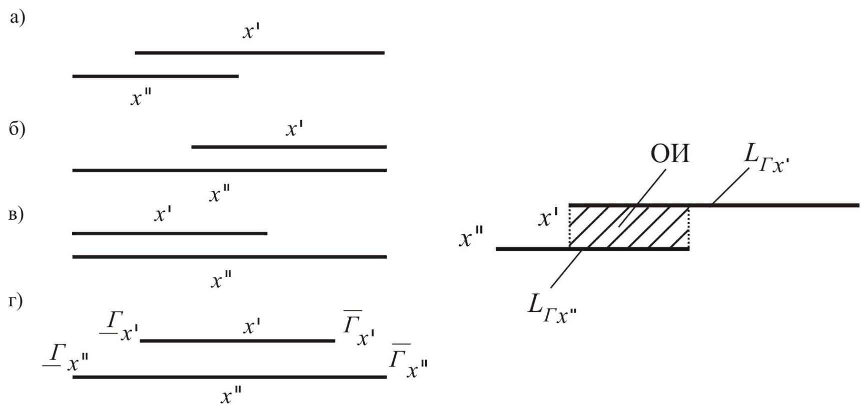

Рис. 1. Варианты относительного расположения ГП-интервалов и общий интервал (ОИ) двух пересекающихся интервалов ГП, соответствующих альтернативам *x*' и *x*''

случаев, когда у двух сравниваемых между собой ГП-интервалов совпадают либо верхняя (рис. 1,б), либо нижняя (рис. 1,в) границы. Так, если верхние границы двух интервалов ГП совпадают, то выбирается то решение, у которого значение нижней границы больше (*x*', рис. 1,б), а если нижние границы ГП совпадают, то лучшим будет решение с большим значением верхней границы (*x*'', рис. 1,в). Когда у двух альтернатив нижняя и верхняя границы совпадают, то оба решения равноценны по всем критериям и принятие одного из них определяется только мнением и пристрастиями ЛПР.

7. Оценка интервальной устойчивости альтернатив.

Ввиду того, что наилучшее решение в интервально стохастическом АНР определяется на основании интервальных оценок, необходимо также оценить *устойчивость* интервальной альтернативы [3, 5], которая характеризует область интервала ГП, в пределах которой принятое решение остается неизменным, а при выходе за ее пределы области (оставаясь внутри ГП-интервала) изменяется на иное решение (рис. 1). Интервальная устойчивость альтернативы Q $(0 \leq Q \leq 1)$ определяется как $Q = \frac{L_{\Gamma} - L_{ОИ}}{L_{\Gamma}}$. Если $L_{\Gamma} = L_{ОИ}$, то *интервальная устойчивость* данной альтернативы $Q = 0$ и данная альтернатива в границах внутри ОИ будет ничем не лучше другой. Когда интервалы ГП двух альтернатив не пересекаются, длина $L_{ОИ} = 0$, *интервальная устойчивость* обеих альтернатив будет максимальной и равной $Q = 1$. Вообще, чем больше Q у данной альтернативы, тем в большем диапазоне ГП-интервала она будет сохранять свое преимущество перед остальными. И наоборот, чем меньше величина Q альтернативы, тем меньше у нее преимуществ перед другими и она может быть

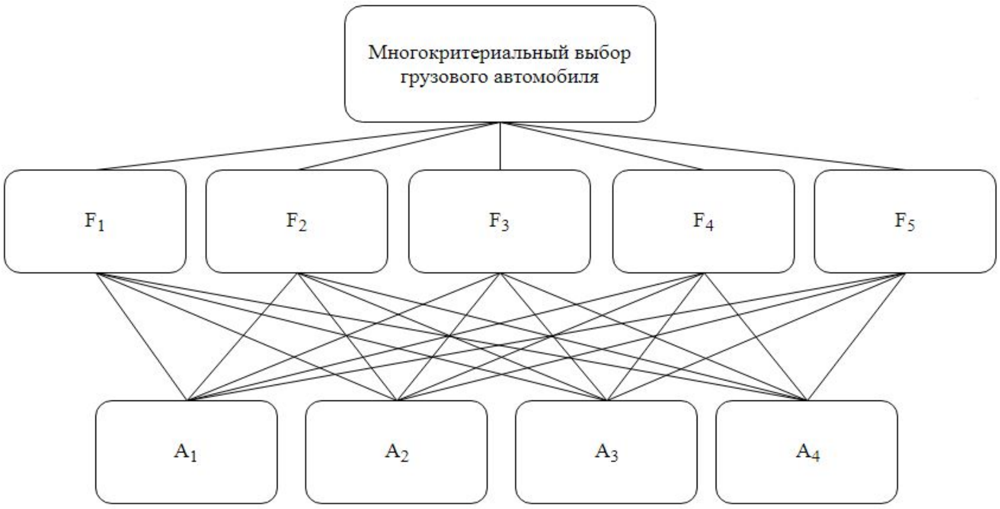

Рис. 2. Иерархическая структура (Цель – Критерии – Альтернативы) принятия многокритериального решения о покупке автомобиля

заменена другой альтернативой.

Применение метода для многокритериального выбора грузового автомобиля

Логистическая компания планирует расширить парк седельных тягачей с колесной формулой 4×2 и с этой целью намеревается приобрести новый грузовой автомобиль, руководствуясь пятью критериями: f_1 – цена автомобиля, руб; f_2 – средний расход топлива на 100 км; f_3– подверженность деталей износу; f_4 – вероятность поломки; f_5 – максимально нагрузка (максимальное количество тонн продукта, которое машина может перевезти за 1 рейс). Критерий f_3 должен принимать как можно большее значение, критерии f_1, f_2, f_4, f_5 – меньшие. Рассматриваемые альтернативы: Volvo (x_1); Scania (x_2); МАЗ (x_3); Mercedes (x_4).

Интервальные матрицы попарных сравнений важности критериев A_f и альтернатив x_1, x_2, x_3, x_4 по каждому критерию f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, то есть A_x^{f1}, A_x^{f2}, A_x^{f3}, A_x^{f4}, имеют вид.

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & [4;5] & [4;6] & [1/6;1/4] & [1/5;1/4] \\ [1/5;1/4] & 1 & [6;7] & [1/7;1/5] & [1/4;1/2] \\ [1/6;1/4] & [1/7;1/6] & 1 & [1/6;1/4] & [1/5;1/4] \\ [4;6] & [5;7] & [4;6] & 1 & [2;3] \\ [4;5] & [2;4] & [4;5] & [1/3;1/2] & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_x^{f1} = \begin{pmatrix} 1 & [4;5] & [4;6] & [1/6;1/4] \\ [1/5;1/4] & 1 & [6;7] & [1/7;1/5] \\ [1/6;1/4] & [1/7;1/6] & 1 & [1/6;1/4] \\ [4;6] & [5;7] & [4;6] & 1 \end{pmatrix}, A_x^{f2} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & [2;3] & [4;5] & [1/2;1] \\ [1/3;1/2] & 1 & [3;5] & [1/5;1/3] \\ [1/5;1/4] & [1/5;1/3] & 1 & [6;7] \\ [1;2] & [3;5] & [1/7;1/6] & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_x^{f3} = \begin{pmatrix} 1 & [4;5] & [6;7] & [4;5] \\ [1/5;1/4] & 1 & [4;5] & 1 \\ [1/7;1/6] & [1/5;1/4] & 1 & [1/5;1/4] \\ [1/5;1/4] & 1 & [4;5] & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_x^{f4} = \begin{pmatrix} 1 & [5;6] & [7;8] & [2;4] \\ [1/6;1/5] & 1 & [6;7] & [1/5;1/3] \\ [1/8;1/7] & [1/7;1/6] & 1 & [1/6;1/5] \\ [1/4;1/2] & [3;5] & [5;6] & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_x^{f5} = \begin{pmatrix} 1 & [2;3] & [4;5] & [2;3] \\ [1/3;1/2] & 1 & [3;4] & [2;3] \\ [1/5;1/4] & [1/4;1/3] & 1 & [1/3;1/2] \\ [1/3;1/2] & [1/3;1/2] & [2;3] & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисления по вышеизложенной методике приводят в следующим интервалам ГП:

$\Gamma_{x1} \in$ [0,397; 0,516]; Γ_{x2}= $\in$ [0,113; 0,141]; Γ_{x3}= $\in$ [0,108; 0,141]; Γ_{x4}= $\in$ [0,134; 0,177].

Интерпретация результатов

Из диаграммы интервальных глобальных приоритетов (рис. 3) следует, что левая и правая границы ГП-интервала альтернативы x_1 принимают наибольшие значения и поэтому

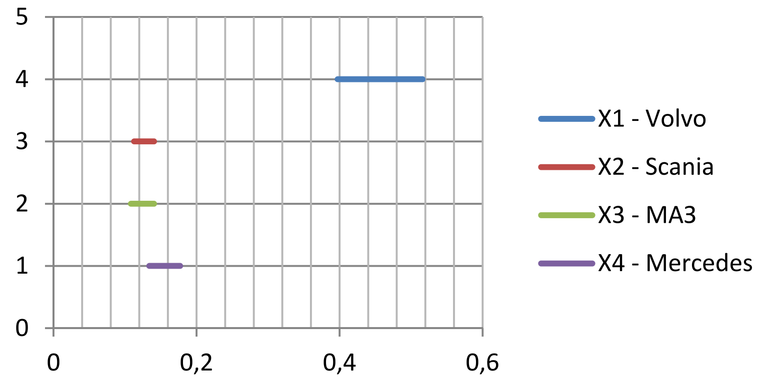

Рис. 3. Диаграмма интервальных глобальных приоритетов альтернатив x_1, x_2, x_3, x_4

является наилучшей. Таким образом, основываясь на интервально *методе Мадеры* ИС-МАИ руководству компании следует купить грузовой автомобиль марки Volvo. Кроме того, ГП-интервал альтернативы x_1 не пересекается с ГП-интервалами других альтернатив (рис. 3), поэтому интервальная устойчивость уx_1 максимальна ($Q_{x1} = 1$),что также свидетельствует в пользу выбора альтернативы x_1.

Заключение

В статье рассмотрен алгоритм применения на практике интервально стохастического метода ИС-МАИ [3, 5], позволяющего принимать наилучшие, научно обоснованные решения в многокритериальных проблемах при неопределенности оценок и суждений ЛПР. В отличие от классического метола МАИ [8], в методе ИС-МАИ учитывается психология принятия решений и вынесения субъективных суждений и оценок, присущих человеку, что существенно повышает достоверность принятия многокритериальных решений. А введенные в [3, 5] диаграммы интервальных глобальных приоритетов альтернатив и интервальная устойчивость, позволяют принимать наилучшее, обладающее максимальной устойчивостью к замене его другим, многокритериальное решение. Применение метода рассмотрено на примере многокритериальной проблемы выбора грузового автомобиля.

Выражаю благодарность своему научному руководителю профессору, доктору наук Мадере А.Г. за постановку задачи, руководство и обсуждение полученных результатов.

Список литературы

1. Мадера А.Г. Моделирование и принятие решений в менеджменте. М.: Издательство ЛКИ, 2009. 688 с.

2. Мадера А.Г. Оценка кредитоспособности потенциального заемщика // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2013. №1. С.72-75.

3. Мадера А.Г. Интервально стохастическая неопределенность оценок в многокритериальных задачах принятия решений // Искусственный интеллект и принятие решений. 2014. №3. С. 105-115.

4. Мадера А.Г. Риски и шансы: неопределенность, прогнозирование и оценка. М.: КРАСАНД, 2014. 448 с.

5. Мадера А.Г. Процесс аналитической иерархии AHP в условиях интервальной стохастической неопределенности оценок // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014. №3. С.34–39.

6. Подиновский В.В. Интервальные оценки важности критериев в многокритериальной оптимизации // Научно-техническая информация. Сер. 2. 2002. № 10. С. 19-21.

7. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1985. 320 с.

8. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 320с.

9. Kahneman D., Slovic P., Tversky A. (2001) *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*, Cambridge: Cambridge University Press.