ЛИНЕАРИЗАЦИИЯ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ФУРЬЕ.

Алашеева Е.А.

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (443079, Самара, Льва Толстого 23)

Рогова Н.В.

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (443079, Самара, Льва Толстого 23)

Галдеев В.В.

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (443079, Самара, Льва Толстого 2)

Возможности приближения рядов Фурье в случае линейного сигнала бывает необходимым для построения функций в случае разрывных периодических элементов. Возможности использования данного метода для построения и разложения их с использованием конечных сумм ряда Фурье использующих при решении многих задач различных наук, таких как физики, сейсмологии и так далее. Процессы океанских приливов, солнечной активности рассматриваются способом разложения колебательных процессов, функций описываемых эти преобразования. С развитием компьютерных технологий ряды Фурье стали применяться для более и более сложных задач, а так же благодаря этому стало возможным использование данных преобразований в косвенных науках, таких как медицина, химия. Преобразование Фурье описывается как в действительной, так и в комплексной форме, второе распределение дало возможность произвести прорыв в исследовании космического пространства. Результатом данной работы является применение рядов Фурье к линеаризации разрывной функции и подбором количества коэффициентов ряда для более точного наложения ряда на функцию. Причем, при использовании разложения в ряд Фурье, данная функция перестает быть разрывной и уже при достаточно малых n, осуществляется хорошее приближение используемой функции [2,4].

Ключевые слова: ряд Фурье, преобразование Фурье, фазовый спектр.

LINEARIZATSII OF FUNCTIONS BY FOURIER SERIES.

The possibility of approximation of Fourier series in the case of a linear signal is necessary for the construction of functions in the case of discontinuous periodic elements. The possibilities of using this method to construct and decompose them using finite sums of Fourier series used in solving many problems of various Sciences, such as physics, seismology and so on. The processes of ocean tides, solar activity are considered by the method of decomposition of oscillatory processes, the functions described by these transformations. With the development of computer technology Fourier series were used for more and more complex tasks, as well as due to this it became possible to use these transformations in indirect Sciences, such as medicine, chemistry. Fourier transform is described in both real and complex form, the second distribution made it possible to make a breakthrough in the study of outer space. The result of this paper is the application of Fourier series to linearization of a discontinuous function and the selection of the number of series coefficients for a more accurate series overlay on the function. Moreover, when using the Fourier series decomposition , this function ceases to be discontinuous and already at sufficiently small, a good approximation of the function used is carried out [2,4].

Key words: Fourier series, Fourier transform, phase spectrum.

In this paper reveals the possibility of approximation of Fourier series in the case of a linear signal . And the use of finite sums of the series for their construction .

Keywords : Fourier series , Fourier transform, phase spectrum .

Alasheeva E.A.

«Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics» (443079, Samara, Leo Tolstoy 23)

Rogova N. V.

«Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics» (443079, Samara, Leo Tolstoy 23)

Galdeev V.V.

«Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics» (443079, Samara, Leo Tolstoy 23)

Представление произвольно взятой функции с конкретным периодом в виде ряда называется рядом Фурье. Разложением по ортогональному базису называют данное решение в общем виде. Разложение функций в ряд Фурье является довольно мощным инструментом при решении разнообразных задач. Т.к. хорошо известны и изучены свойства данного преобразования при интегрировании, дифференцировании, а также сдвиге выражения по аргументу и свертке [3]. Человек, не знакомый с высшей математикой, а также с трудами французского ученого Фурье, скорее всего, не поймет, что это за «ряды» и для чего они нужны. Данное преобразование Фурье очень плотно вошло в нашу жизнь. Им пользуются не только математики, но и физики, химики, медики, астрономы, сейсмологи, океанографы и многие другие.

Ряды Фурье используются при решении многих прикладных задач. Преобразование Фурье можно проводить аналитическими, числительными и другими методами. Такие процессы как океанские приливы и световые волны до циклов солнечной активности относятся к числительному способу разложения любых колебательных процессов в ряд Фурье. Используя эти математические приемы, можно разбирать функции, представляя любые колебательные процессы в качестве ряда синусоидальных составляющих, которые переходят от минимума к максимуму и обратно. Преобразование Фурье является функцией, описывающей фазу и амплитуду синусоид, соответствующих определенной частоте. Данное преобразование используется для решения весьма сложных уравнений, которые описывают динамические процессы, возникающие под действием тепловой, световой или электрической энергии. Также ряды Фурье позволяют выделять постоянные составляющие в сложных колебательных сигналах, благодаря чему стало возможным правильно интерпретировать полученные экспериментальные наблюдения в медицине, химии и астрономии [1,5].

С ростом технологий, т.е. появление и развития компьютера, вывело преобразование Фурье на новый уровень. Данная методика прочно закрепилась практически во всех сферах науки и техники. В качестве примера можно привести цифровой аудио- и видеосигнал. Который стал наглядной реализацией роста научного процесса и применения рядов Фурье. Так, ряд Фурье в комплексной форме позволил совершить прорыв в изучении космического пространства. Кроме того, это повлияло на изучение физики полупроводниковых материалов и плазмы, микроволновой акустики, океанографии, радиолокации, сейсмологии [5].

Рассмотрим фазовый спектр периодического сигнала $x_p(t)$ определяется из следующего выражения:

$$\Psi_n = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{Im[c_n]}{Re[c_n]}\right), n = \pm1, \pm2, \dots \\ 0, \quad n = 0 \end{cases}$$

где символами $Im[c_n]$и $Re[c_n]$соответственно обозначены мнимая и действительная части величины, заключенной в квадратные скобки.

Если $x_p(t)$ умножить на действительную постоянную величину *K*, то разложение в ряд Фурье имеет следующий вид:

$$Kx_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (Kc_n)e^{in\omega_0 t.} \quad (1)$$

Из выражения (1) следует, что фазовый Фурье-спектр обладает следующими свойствами:

1) Ψ_nявляется функцией τ, т. е. в отличие от спектра мощности, который не зависит от τ,Ψ_n , изменяется при сдвиге сигнала вдоль оси времени;

2)Ψ_n не зависит от *K*, т. е. Ψ_n инвариантен к усилению или ослаблению сигнала, в то время как спектр мощности является функцией К.

3) $\Psi_{-l} = -\Psi_{l,}, l = 1,2,3, \dots$ т. е. Ψ_n является нечетной, функцией n.

Примечание. С учетом геометрической интерпретации c_n приведенных выше рассуждений,c_n можно выразить через спектр мощности и фазовый спектр следующим образом:

$$c_n = \sqrt{P_n}e^{i\psi_n}, n = 0, \pm1, \pm2, \dots \quad (2)$$

или

$$c_n = p_n e^{i\psi_n}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

где $p_n = |c_n|$ и $\Psi_n = \varphi_n$.

Поскольку

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

то из (2) и (3) следует, что $x(t)$ может быть восстановлен однозначно, если известны амплитудный (или спектр мощности) и фазовый спектры.

Рассмотрим пример. Нам дана функция $f(x) = x + \pi$, на промежутке $[-\pi; \pi]$

Общий вид ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Найдем a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Подставим свои значения и получим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{(\pi + x)^2}{2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = = \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\pi^2}{2} \right) = 2\pi$$

Найдем a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

Подставим свои значения и получим:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\,dx$$

Используем замену:

$$\left| \begin{matrix} u = x+\pi; & dv = \cos nx dx \\ du = dx; & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right|$$

Получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\left((x+\pi)\frac{1}{n}\sin nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx dx\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi\sin n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$a_n = 0$

Найдем b_n по формуле:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Подставим свои значения и получим:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin nx dx$$

Используем замену:

$$\left[\begin{matrix} u = x+\pi; & dv = \sin nx \\ du = dx; & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right]$$

Получаем:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left((x+\pi)\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx dx\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi\cos(\pi n)}{n} + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi\cos(\pi n)}{n} + \frac{1}{n^2}(\sin(\pi n) - \sin(-\pi n))\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi(-1)^n}{n}\right);\ b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

Общий вид функции:

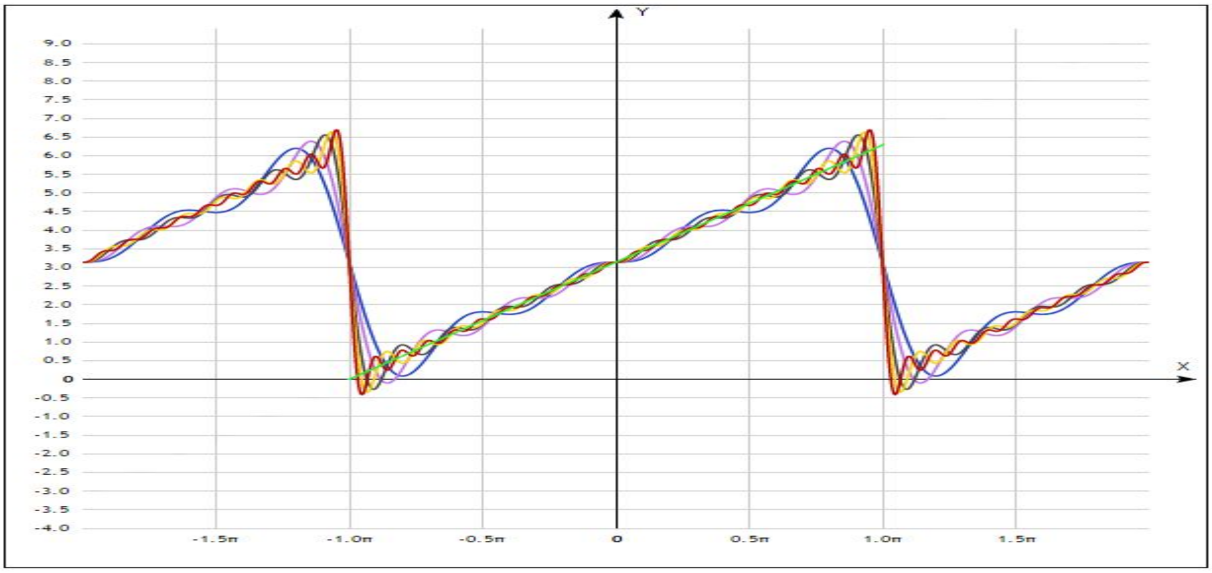
$$f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin nx$$

Найдем $f(x); S_6(x); S_{10}(x),\ S_{14}, S_{20}$ и построим график:

$$S(x) = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2};\ S(x) = \frac{(2\pi) + (0)}{2} = \pi$$

Максимальное значение суммы считается по формуле:

$$S_{20}(x) = \pi + \sum_{n=1}^{20} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx).$$



Вывод: несмотря на очень маленькие значения nдля линейных функций, приближение осуществляется достаточно точно. И чем больше значение n, тем точнее график суммы ряда описывает данную функцию.

Список литературы:

1. Алашеева Е.А., Рогова Н.В. Численный метод решения задачи электродинамики в тонкопроволочном приближении. Наука и мир. Международный научный журнал, № 8(12), 2014. Том 1. г. Волгоград. С.17-19.
2. Воробьев Н.Н. Теория рядов. Изд. Наука, Главная редакция физико-математической литературы, М., 1979, -408 С.
3. Калинина В.Н., Панкин В.Ф. Математическая статистика. - М.: Высшая школа, 2001.
4. Р.Эдвардс Ряды Фурье в современном изложении. Изд. Мир. В 2 томах. Том 1. 1985 год. 362 стр.
5. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. Изд. 2-е стереотипное. «Техніка»,1997. – 768 с.