УДК 539.3

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ СТЕРЖНЯ ИЗ СЛАБО АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Иванычев Д.А.

Липецкий государственный технический университет

Аннотация: разработана математическая модель расчета напряженно-деформированного состояния стержней из анизотропных материалов находящихся в равновесии под действием внешних сил. Модель основана на синтезе метода малого параметра (метода Пуанкаре) с методом граничных состояний. Метод граничных состояний является эффективными компьютерно-ориентированным методом решения краевых задач механики твердого тела. Искомое напряженно-деформированное состояние раскладывается по элементам базиса внутренних состояний, и суть задачи состоит в отыскании коэффициентов Фурье этой линейной комбинации. Обобщенный закон Гука для анизотропной среды приводится к виду закона Гука для изотропной среды, определяя тем самым малые параметры, как возмущение изотропного материала. Механические характеристики раскладываются в степенной ряд по малым параметрам, и задача сводится к вычислению ряда пространственных задач для изотропного тела со связанными граничными условиями. Приближенные выражения для механических полей содержат в явном виде упругие константы материала, что снимает необходимость строить заново решение анизотропной задачи при малом изменении последних. Построены параметрические поля механических характеристик задачи статики для прямоугольного тела из поликристаллического металла. Приведены выражения компонент вектора перемещения.

Ключевые слова: поликристаллические материалы, метод малого параметра, метод граничных состояний, параметрическое решение, слабо анизотропные материалы, равновесие стержней.

PARAMETRIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF EQUILIBRIUM OF A ROD OF WEAKLY ANISOTROPIC MATERIAL

Ivanychev D.A.

Lipetsk State Technical University

Abstract: a mathematical model is developed for calculating the stress-strain state of rods from anisotropic materials in equilibrium under the action of external forces. The model is based on the synthesis of the small parameter method (Poincare method) with the method of boundary States. The method of boundary States is an effective computer-oriented method for solving boundary value problems of solid mechanics. The sought stress-strain state is decomposed by the elements of the basis of internal States, and the essence of the problem is to find the Fourier coefficients of this linear combination. The generalized Hooke law for an anisotropic medium is given to the form of the Hooke law for an isotropic medium, thereby defining small parameters as perturbation of the isotropic material. The mechanical characteristics are decomposed into a power series with respect to small parameters, and the problem boils down to calculating a number of spatial problems for an isotropic body with associated boundary conditions. Approximate expressions for mechanical fields contain explicitly elastic constants of the material, which eliminates the need to rebuild the solution of the anisotropic problem with a small change of the latter. Parametric fields of mechanical characteristics of the static problem for a rectangular body made of polycrystalline metal are constructed. Expressions of the displacement vector components are given.

Keywords: polycrystalline materials, the method of small parameter, the boundary conditions, parametric solution of a weakly anisotropic materials, the equilibrium of rods.

Современные материалы, применяемые в авиастроении, строительстве, машиностроении с точки зрения теории упругости характеризуются как анизотропные, то есть материалы, у которых наблюдается различие в упругих свойствах для разных направлений. Если различия в упругих свойствах материала невелики, то такие среды называются слабо анизотропными, т.е. мало отличающихся от изотропных. Такая форма анизотропии наводится, например, в результате механической обработки, термообработки и других технологических процессов. С точки зрения математического моделирования, основным методом решения задач теории упругости для тел из таких материалов, является метод малого параметра (метод Пуанкаре). Немаловажную часть этого метода составляет способ введения малых параметров и их количество.

В настоящей работе предлагается приближенный способ решения пространственной статической задачи теории упругости для транверсально-изотропного тела со слабо выраженной анизотропией.

1. Обзор известных работ. Данной проблеме посвятил ряд работ С.Г. Лехницкий [6]. Он рассматривал плоскую ортотропную задачу и предложил метод разложения функции напряжений в ряд по двум параметрам, за которые он принимал малые отклонения от комплексных параметров μ_1 и μ_2 равных $i=\sqrt{-1}$ для изотропной среды.

$$\mu_1 = i(1+\lambda_1)\,,\ \mu_2 = i(1+\lambda_2)\,,$$

$$\overline{\mu}_1 = -i(1+\overline{\lambda}_1)\,,\ \overline{\mu}_2 = -i(1+\overline{\lambda}_2)\,,$$

где λ_1 и λ_2 – параметры, малые по сравнению с единицей настолько, что пренебрегаются высшие степени и произведения этих величин, начиная от 3-го порядка. Функция напряжений, через которую определяются напряжения, деформации и перемещения имеет вид:

$$F = F_{00} + (\lambda_1+\lambda_2)F_{10} + (\lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2)F_{20} + \lambda_1\lambda_2 F_{11}\,,$$

где F_{ij} – функции координат x и y.

В работе А.В. Саченкова и В.И. Дарагана [8] рассматривались два способа представления уравнения совместности деформаций для ортотропного материала при совщении осей с главными направлениями упругости.

В первом из них уравнение совместности имело вид:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\lambda_1 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda_2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0\,,$$

где

$$\lambda_1 = \left(\frac{E_2}{2G_{12}} - \frac{\nu_{12}E_2}{E_1}\right),\ \lambda_2 = \frac{E_2}{E_2}\,.$$

Здесь E_1, E_2 – модули упругости по главным направлениям x и y; G_{12} – модуль сдвига; ν_{12} – коэффициент Пуассона (обозначение технических констант в [8] отличается от выше приведенного).

Далее вводится новая переменная:

$$x = \sqrt{\frac{\lambda_1(1+\sqrt{\lambda})}{\lambda_2}} x_1 \text{, где } \lambda = (1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1^{\ 2}}) .$$

Уравнение (1.1) принимает вид:

$$\nabla_1^{\ 2}\nabla_1^{\ 2}F - \mu\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\ 2}}\nabla_1^{\ 2}F = 0, \tag{1.1}$$

где

$$\mu = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}, \ \nabla_1^{\ 2}() = \frac{\partial^2}{\partial x_1^{\ 2}}(\ ) + \frac{\partial^2}{\partial y_1^{\ 2}}(\ ).$$

И решение уравнения (1.1) ищется в виде:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_1 + \dots .$$

Во втором способе, уравнение (1.1) преобразуется с помощью переменных $x = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} x_1$, $y = y_1$ и приводится к уравнению:

$$\nabla_1^{\ 2}\nabla_1^{\ 2}F - \lambda\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^{\ 4}} = 0,$$

решение которого:

$$F = F_0 + \lambda F_1 + \lambda^2 F_1 + \dots .$$

Причем следует отметить, что в первом, что и во втором способах, чем меньше параметры μ и λ, тем сходимость наблюдается быстрее.

2. Постановка задачи и теоретическое обоснование. Рассматривается упругое равновесие однородного анизотропной тела под действием внешних поверхностных усилий X_n, Y_n и Z_n. Материал тела слабо анизотропен и трансверсально-изотропен. Через все точки тела проходят параллельные плоскости упругой симметрии, в которых все направления являются упруго-эквивалентными (плоскости изотропии).

Для решения задачи применяется метод малого параметра [9], основанный на представлении искомых функции в виде ряда, расположенного по степеням некоторых малых параметров, что позволяет свести решение задачи для анизотропной среды к решению ряда плоских задач для изотропной среды.

Придадим обобщенному закону Гука для транстропной среды [6] следующий вид:

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx} = A\varepsilon_{xx} - B\varepsilon_{yy} - C\varepsilon_{zz}; \quad \tau_{yz} = E\varepsilon_{yz}; \\ &\sigma_{yy} = -B\varepsilon_{xx} + A\varepsilon_{yy} - C\varepsilon_{zz}; \; \tau_{xz} = E\varepsilon_{xz}; \\ &\sigma_{zz} = D\varepsilon_{zz} - C(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}); \quad \tau_{xy} = F\varepsilon_{xy}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* – константы, зависящие от упругих свойств трансверсально-изотропного материала.

$$A = a(1+\alpha)\,;\; B = b(1+\beta)\,;\; C = c(1+\gamma)\,;\; D = d(1+\delta)\,;\; E = e(1+\varepsilon)\,; \tag{2.2}$$

$$F = (a + b + a\alpha + b\beta)\,,$$

где α, β, γ, δ, ε – малые параметры, характеризующие отклонение слабо анизотропной среды от некоторой изотропной среды.

Таким образом, вариации подлежат пять малых параметров α, β, γ, δ, ε, которые соответствуют пяти независимым константам упругости для транстропной среды.

Окончательно закон Гука (2.1) для слабо анизотропной среды можно рассматривать с учетом (2.2) как «возмущение» изотропной среды.

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx} = a(1+\alpha)\varepsilon_{xx} - b(1+\beta)\varepsilon_{yy} - c(1+\gamma)\varepsilon_{zz}\,;\; \tau_{yz} = e(1+\varepsilon)\varepsilon_{yz}\,; \\ &\sigma_{yy} = -b(1+\beta)\varepsilon_{xx} + a(1+\alpha)\varepsilon_{yy} - c(1+\gamma)\varepsilon_{zz}\,;\; \tau_{xz} = e(1+\varepsilon)\varepsilon_{xz}\,; \\ &\sigma_{zz} = d(1+\delta)\varepsilon_{zz} - c(1+\gamma)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\,;\; \tau_{xy} = (a + b + a\lambda + b\beta)\varepsilon_{xy}\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$|\alpha|, |\beta|, |\gamma| |\delta| |\varepsilon| << 1;\; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in R^1\,.$$

При $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = 0 \rightarrow$ линейная изотропия.

Для кратности здесь и далее обозначим:

1) $\sum\limits_{mnklf} \ldots = \sum\limits_0^\infty \sum\limits_0^\infty \sum\limits_0^\infty \sum\limits_0^\infty \sum\limits_0^\infty \ldots;$

2) в записи a^{nmklf} верхний составной индекс идентифицирует элемент в асимптотическом разложении

$$a^{nmklf} = \sum_{mnklf} \alpha^m \beta^n \gamma^k \delta^l \varepsilon^f a^{\,mnklf}\,,$$

а не степень.

Асимптотические ряды:

$$\sigma_{ij} = \sum_{mnklf} \alpha^m \beta^n \gamma^k \delta^l \varepsilon^f \sigma_{ij}^{\,mnklf}\,;$$

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{mnklf} \alpha^m \beta^n \gamma^k \delta^l \varepsilon^f \varepsilon_{ij}^{\,mnklf}\,; \tag{2.4}$$

$$u_i = \sum_{mnklf} \alpha^m \beta^n \gamma^k \delta^l \varepsilon^f u_i^{mnklf} .$$

Такое представление унифицирует все индексы в $\sum\limits_{mnklf}...$, поэтому все слагаемые можно определить внутри единой суммы и, далее, каждую скобку внутри $\sum\limits_{mnklf}...$ приравнять нулю (декомпозиция).

Декомпозиция определяющих соотношений:

1. Закон Гука:

$$\sigma_{xx}^{mnklf} = a\varepsilon_{xx}^{mnklf} - b\varepsilon_{yy}^{mnklf} - \tilde{n}\varepsilon_{zz}^{mnklf} + a\alpha\varepsilon_{xx}^{mnklf} - b\beta\varepsilon_{yy}^{mnklf} - \tilde{n}\gamma\varepsilon_{zz}^{mnklf} ;$$

$$\sigma_{yy}^{mnklf} = -b\varepsilon_{xx}^{mnklf} + a\varepsilon_{yy}^{mnklf} - \tilde{n}\varepsilon_{zz}^{mnklf} - b\beta\varepsilon_{xx}^{mnklf} + a\alpha\varepsilon_{yy}^{mnklf} - \tilde{n}\gamma\varepsilon_{zz}^{mnklf} ;$$

$$\sigma_{zz}^{mnklf} = d\varepsilon_{zz}^{mnklf} - c(\varepsilon_{xx}^{mnklf} + \varepsilon_{yy}^{mnklf}) + d\delta\varepsilon_{zz}^{mnklf} - c\gamma(\varepsilon_{xx}^{mnklf} + \varepsilon_{yy}^{mnklf}) ;$$

$$\tau_{yz}^{mnklf} = e\varepsilon_{yz}^{mnklf} + e\varepsilon\varepsilon_{yz}^{mnklf} ;$$

$$\tau_{xz}^{mnklf} = e\varepsilon_{xz}^{mnklf} + e\varepsilon\varepsilon_{xz}^{mnklf} ;$$

$$\tau_{xy}^{mnklf} = a\varepsilon_{xy}^{mnklf} + b\varepsilon_{xy}^{mnklf} + a\lambda\varepsilon_{xy}^{mnklf} + b\beta\varepsilon_{xy}^{mnklf} .$$

2. Соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \ \Rightarrow \ \varepsilon_{ij}^{mnklf} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{mnklf} + u_{j,i}^{mnklf}\right). \tag{2.5}$$

3. Уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j}^{mnklf} + \mathrm{X}_i^{0\,mnklf} = 0 , \tag{2.6}$$

где $\mathrm{X}_i^{0\,mnk}$ – массовые силы.

Необходимо организовать перебор $m, n, k\,l\,f$ так, чтобы кроме полей характеристик на определенной позиции, в уравнениях участвовали поля, ранее уже полученные.

Нахождение частного решения от произвольно заданных массовых сил представляет некоторую трудность, однако в случае многочленов принципиальных трудностей нет.

На каждом шаге $m, n, k\,l\,f$ решается традиционная задача теории упругости для изотропного тела, причем всегда при одном и том же наборе параметров упругости λ, μ .

В работах [2] и [3], рассмотрены задачи для призматического в плане тела с неоднородными нагрузками, приложенными к торцам тела. В работе [5] реализована методика построения параметрического решения для круговой пластинки; выписано явное решение для конкретной краевой задачи.

3. Решение задачи. Рассматривается первая основная задача для стержня прямоугольной формы $\{(-1 \le x \le 1), (-1 \le y \le 1), (-1 \le z \le 1)\}$ из меди [1] $E_{xy} = 1.25 \cdot 10^5$ *МПа*; $E_z = 1.42 \cdot 10^5$ *МПа*, $G_z = 0.46 \cdot 10^5$ *МПа*; $\nu_{xy} = 0.25$, $\nu_z = 0.34$. На боковой поверхности заданы усилия:

$$\begin{cases} p \in \left(-2 + x^2 + y^2, 0, 0\right), x = -1; \\ p \in \left(0,\ 0, 0\right), y = -1; \\ p \in \left(2 - x^2 - y^2,\ 0, 0\right), x = 1; \\ p \in \left(0, 0, 0\right), y = 1; \\ p \in \left(0, 0, 0\right), z = -1; \\ p \in \left(0,\ 0, 0\right), z = 1. \end{cases}$$

Постоянные, характеризующие изотропную среду: $a = 1.66396$, $b = -0.64824$, $c = -0.6821$, $d = 1.73744$, $e = 0.97$.

Малые параметры, «отклоняющие» слабо анизотропную среду от изотропной: $\alpha = -0.012184$, $\beta = -0.00703$, $\gamma = 0.140165$, $\delta = 0.121674$, $\delta = 0.12053$.

Массовые силы отсутствуют, $X_i^0 = 0$. Геометрическая и физическая стороны задачи рассматриваются в обезразмеренном виде с размерным коэффициентом $\eta^* = 10^9$ *Па*.

Решение задачи в целом, проводится методом малого параметра по методике, описанной выше, а изотропная задача теории упругости на каждом приближении решается методом граничных состояний (МГС) [7].

Полученные результаты решения во втором приближении слишком громостки, поэтому приведем лишь структуру компонент вектора перемещения (высшие степени и произведения малых параметров отброшены):

$$u \approx 1.487x + 0.062x^3 + \ldots - 0.527xy^2 + \ldots + 0.895xz + \ldots - 0.427xy^2\alpha^2\beta + \ldots$$
$$\ldots + 0.039xz\gamma^2\delta + \ldots + 0.013x\varepsilon + \ldots - 0.345xy^2z^2\beta^2\delta + \ldots + 0.947xy^2z\delta\varepsilon^2 + \ldots;$$

$$v \approx -0.51y + 0.185x^2y + \ldots + 0.09y^3 + \ldots - 0.038x^2y\beta + \ldots + 0.19x^2y\alpha\gamma^2 + \ldots$$
$$-0.642yz^2\gamma^2\delta + \ldots - 0.843yz\delta^2\varepsilon + \ldots - 0.107y\beta\varepsilon^2 + \ldots + 1.415x^2yz + \ldots +;$$

$$w \approx -0.9x^2 + \ldots + 0.9y^2 + \ldots + 0.48z + \ldots + 0.01y^2\alpha + \ldots - 1.94x^2z\alpha^3 + \ldots - 0.1x^2\beta + \ldots$$
$$-1.3x^2z\alpha\gamma^2 + \ldots + 0.18x^2\beta^2\delta + \ldots - 0.45x^2\alpha\delta^2 + \ldots - 0.33x^2z\delta^3 + \ldots + 2.38x^2\delta\varepsilon^2 + \ldots.$$

Таким образом, механические характеристики есть функции координат и малых параметров. Изменяя последние в определенных пределах, мы имеем возможность получать механические поля для различного (близкого по свойствам к меди) материала, не проводя каждый раз заново решение анизотропной задачи, что порой при сложных граничных условиях и геометрии тела, составляет непростую задачу [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золоторевский В.С. Механические свойства металлов, 2 изд., М., 1983. – 352 с.

2. Иванычев Д.А. Полнопараметрическое решение пространственных задач теории слабо анизотропной упругости // Д.А. Иванычев, В.Б.Пеньков / Наука и бизнес: пути развития. 2017. № 9 (75). С. 5-9

3. Иванычев Д.А. Задача о равновесии призматического тела со слабо выраженной анизотропией // «Наука и образование: новое время» № 1, 2018. С. 11-14.

4. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в приложении к осесиметричным задачам для анизотропных тел // Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал. – Липецк, ЛГТУ. – №1 –2014. С. 19-26.

5. Иванычев Д.А. Параметрическое решение задачи о равновесии кругового в плане тела // «Наука и образование: новое время» № 1, 2018. С. 7-10.

6. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 463 с.

7. Пеньков В.Б.. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // В.Б. Пеньков, В.В. Пеньков /Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т.2, №2. – С. 115 – 137.

8. Саченков А.В. Метод малого параметра в плоской задаче теории упругости анизотропного тела // А.В. Саченков, В.И. Дараган /, Исслед. по теор. пластин и оболочек, 1972, выпуск 8, С. 77 – 95.

9. Сотников А.А. Метод малого параметра в задачах механики // А.А. Сотников, Д.А. Иванычев / Тенденции развития современной науки: сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета в 2 -х ч. Ч.1. - Липецк: Изд-во Липецкого государственного технического университета, 2017. - 618 с. С. 6-8.