УДК 539.3

ЗАДАЧА СТАТИКИ СЛАБО АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Иванычев Д.А.

Липецкий государственный технический университет

Аннотация: разработана теория решения плоских задач равновесия пластинок из поликристаллических металлов. Математическая модель разработана на основе синтеза методов малого параметра и метода граничных состояний, позволяющего получить параметрические выражения для характеристик напряженно-деформированного состояния, содержащие технические константы материала в явном виде. Обобщенному закону Гука для анизотропной среды придается вид закона Гука для изотропной среды, где в качестве малых параметров представлены параметры, представляющие анизотропную среду, как вариацию изотропной среды. В результате задача сводится к решению ряда изотропных задач со связанными граничными условиями. Решение изотропных задач реализовано энергетическим методом граничных состояний. Основу метода составляют пространства внутренних и граничных состояний. Оба пространства гильбертовы и сопряжены изоморфизмом, что позволяет отыскание внутреннего состояния свести к исследованию изоморфного ему граничного состояния. Задача сводится к разложению искомого состояния в ряд по элементам ортонормированного базиса и отысканию коэффициентов Фурье этой линейной комбинации. Исследована задача равновесия круговой в плане пластинки с граничными условиями, вызывающее неоднородное напряженное состояние. Выписаны параметрические выражения для компонент вектора перемещения.

Ключевые слова: пластинка, равновесие, метод малого параметра, метод граничных состояний, параметрические решения, поликристаллические металлы.

THE STATICS WEAKLY ANISOTROPIC PLATES WITH NONHOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS

Ivanychev D.A.

Lipetsk State Technical University

Abstract: the theory of solving plane equilibrium problems of polycrystalline metal plates is developed. The mathematical model is developed on the basis of synthesis of methods of a small parameter and a method of the boundary States allowing to receive parametric expressions for characteristics of the strained-deformed state containing technical constants of a material in an explicit form. The generalized Hooke law for an anisotropic medium is given the form of the Hooke law for an isotropic medium, where the parameters representing an anisotropic medium as a variation of the isotropic medium are presented as small parameters. As a result, the problem reduces to solving a number of isotropic problems with related boundary conditions. The solution of isotropic problems is realized by the energy method of boundary States. The basis of the method is the spaces of internal and boundary States. Both spaces are Hilbert and conjugated by an isomorphism, which allows finding the inner state to be reduced to the study of the isomorphic boundary state. The problem is reduced to the decomposition of the desired state in a series of orthonormal basis elements and the search for Fourier coefficients of this linear combination. The problem of equilibrium of a circular plate with boundary conditions causing an inhomogeneous stress state is investigated. Parametric expressions for the components of the displacement vector are written out.

Keywords: plate, equilibrium, small parameter method, boundary state method, parametric solutions, polycrystalline metals.

В машиностроении расчету на прочность и жесткость пластин предшествует определение напряженно-деформированного состояния при соответсвующих граничных условиях. Расчету предшествует математическая модель, основанная на гипотезах и методах теории упругости.

Постановка задачи с точки зрения теории упругости. Рассматривается упругое равновесие однородной анизотропной пластинки под действием внешних поверхностных усилий X_n, Y_n и Z_n. Материал пластинки слабо анизотропен и ортотропен. Через все точки тела проходят три взаимоперпендикулярные плоскости упругой симметрии, относительно которых наблюдается симметрия в упругих свойствах (плоскости ортотропии). Геометрические оси совпадают с осями анизотропии.

Обобщенный закон Гука для ортотропной среды в случае обобщенного плоского напряженного состояния имеет вид [6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_y; \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_x + \frac{1}{E_2}\sigma_y; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G_{12}}\tau_{xy}, \end{aligned} \qquad (1)$$

где E_1 и E_2 модули упругости в направлении оси x и y соответственно, ν_{12} и ν_{21} – коэффициенты Пуассона (ν_{12} – коэффициент, характеризующий сокращение в направлении x при растяжении в направлении y, ν_{21} – коэффициент, характеризующий сокращение в направлении y при растяжении в направлении x), причем $E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}$, G_{12} – модуль сдвига в плоскости xy.

Для решения задачи применяется метод малого параметра [9], основанный на представлении искомых функции в виде ряда, расположенного по степеням некоторых малых параметров, что позволяет свести задачу для анизотропной среды к плоской задачи для изотропной среды.

Закон Гука для случая изотропной среды может быть представлен в виде [7]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x; \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y; \\ \tau_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ – объемная деформация, λ и μ – параметры Ламе, причем μ – модуль сдвига в изотропной среде.

Придадим соотношениям (1) для ортотропной среды вид зависимостей (2) для изотропной среды. После преобразований получим:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda_1\,\theta + 2\mu_1\varepsilon_x;\\ \sigma_y &= \lambda_1\,\theta + 2\mu_2\varepsilon_y;\\ \tau_{xy} &= 2\mu_0\varepsilon_{xy},\end{aligned} \tag{3}$$

$$\lambda_1 = \frac{E_1\;E_2\,\nu_{12}}{E_1\;-E_2\,\nu_{12}^{\;2}};\;\mu_1 = \frac{1}{2}\;\frac{E_1\;(E_1\;-E_2\,\nu_{12})}{E_1\;-E_2\,\nu_{12}^{\;2}};\;\mu_2 = -\frac{1}{2}\;\frac{E_1\;E_2\,(\nu_{12}-1)}{E_1\;-E_2\,\nu_{12}^{\;2}};\;\mu_0 = G_{12},$$

где λ_1, μ_1, μ_2 и μ_0 – параметры, зависящие от упругих свойств материала.

Для построения решения необходимо определить параметры изотропной среды основываясь на известных параметрах ортотропной среды.

Модуль упругости E примем как среднее значение: $E = \left(E_1 + E_2\right)/\,2$.

Коэффициент Пуассона ν примем равным таковому в анизотропной среде $\nu = \nu_{12}$.

Модуль сдвига μ определится зависимостью [6] $\mu = \dfrac{E}{2\left(1+\nu\right)}$.

Параметр Ламе $\lambda_{\text{ï.ä.}}$ вычисляем сначала для случая плоской деформации [7] $\lambda_{\text{ï.ä.}} = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, затем для случая обобщенного плоского напряженного состояния [6] $\lambda = \dfrac{2\lambda_{\text{ï.ä.}}\,\mu}{\lambda_{\text{ï.ä.}} + 2\mu}$.

Введем малые параметры $\alpha,\beta,\gamma,\delta$:

$$\lambda_1 = \lambda\left(1+\alpha\right);\;\mu_1 = \mu\left(1+\beta\right);\;\mu_2 = \mu\left(1+\gamma\right);\;\mu_0 = \mu\left(1+\delta\right). \tag{4}$$

Можно убедиться, что при любых значениях технических постоянных, параметры α и γ равны, поэтому примем $\mu_2 = \mu\left(1+\alpha\right)$ и варьировать будем три параметра.

Окончательно закон Гука (3) для слабо анизотропной среды можно рассматривать с учетом (4) как «возмущение» изотропной среды.

$$\begin{gathered}\sigma_{xx} = \lambda\left(1+\alpha\right)\theta + 2\mu\left(1+\beta\right)\varepsilon_{xx};\\ \sigma_{yy} = \lambda\left(1+\alpha\right)\theta + 2\mu\left(1+\alpha\right)\varepsilon_{yy};\\ \sigma_{xy} = 2\mu\left(1+\delta\right)\varepsilon_{xy}.\\ |\alpha|,|\beta|,|\delta| << 1;\;\alpha,\beta,\delta \in R^1.\end{gathered} \tag{5}$$

При $\alpha = \beta = \delta = 0 \rightarrow$ линейная изотропия.

Для кратности здесь и далее обозначим:

1) $\sum\limits_{mn\,kl} ... = \sum\limits_0^\infty \sum\limits_0^\infty \sum\limits_0^\infty ...;$

2) в записи a^{nmk} верхний составной индекс идентифицирует элемент в асимптотическом разложении

$$a^{nmk} = \sum_{mnk} \alpha^m \beta^n \delta^k a^{\ mnk} \ ,$$

а не степень.

Асимптотические ряды:

$$\begin{gathered}
\sigma_{ij} = \sum_{mnk} \alpha^m \beta^n \delta^k \sigma_{ij}^{\ mnk} \ ; \\
\varepsilon_{ij} = \sum_{mnk} \alpha^m \beta^n \delta^k \varepsilon_{ij}^{\ mnk} \ ; \\
u_i = \sum_{mnk} \alpha^m \beta^n \delta^k u_i^{\ mnk} \ ; \\
\theta = \sum_{mnk} \alpha^m \beta^n \delta^k \theta^{\ mnk} \ .
\end{gathered} \tag{6}$$

Такое представление унифицирует все индексы в $\sum\limits_{mnk} \ldots$, поэтому все слагаемые можно определить внутри единой суммы и, далее, каждую скобку внутри $\sum\limits_{mnk} \ldots$ приравнять нулю (декомпозиция).

Декомпозиция определяющих соотношений:

1. Закон Гука:

$$\begin{gathered}
\sigma_{xx}^{\ mnk} = \lambda\theta^{\ mnk} + 2\mu\,\varepsilon_{xx}^{\ mnk} + \lambda\alpha\theta^{\ mnk} + 2\mu\beta\,\varepsilon_{xx}^{\ mnk} \ ; \\
\sigma_{\acute{o}\acute{o}}^{\ mnk} = \lambda\theta^{\ mnk} + 2\mu\,\varepsilon_{xx}^{\ mnk} + \lambda\alpha\theta^{\ mnk} + 2\mu\alpha\,\varepsilon_{yy}^{\ mnk} ; \\
\sigma_{x\acute{o}}^{\ mnk} = 2\mu\varepsilon_{xy}^{\ mnk} + 2\mu\delta\,\varepsilon_{yy}^{\ mnk} \ .
\end{gathered} \tag{7}$$

2. Соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \ \Rightarrow \ \varepsilon_{ij}^{\ mnk} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{\ mnk} + u_{j,i}^{\ mnk}\right). \tag{8}$$

3. Уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j}^{\ mnk} + \mathrm{X}_i^{0\ mnk} = 0 \, , \tag{9}$$

где $\mathrm{X}_i^{0\ mnk}$ – массовые силы.

Нахождение частного решения от произвольно заданных массовых сил представляет некоторую трудность, однако в случае многочленов принципиальных трудностей нет.

Система уравнений (7), (8) и (9) по форме отвечает всем соотношения изотропной теории упругости. На каждом шаге m, n, k решается традиционная задача теории упругости для изотропного тела, причем всегда при одном и том же наборе параметров упругости λ, μ.

Таким образом, для решения слабо анизотропной задачи во втором приближении необходимо решить 8 задач о распределении напряжений в изотропной пластинке той же формы.

Заданные граничные условия (включая массовые силы) сразу учитываются в нулевом приближении; затем поправки в граничных условиях от $S_{ij}^{*\,mnk}$ вычитаются из «нулевых» граничных условий. Необходимо вносить поправки в механические поля и от «фиктивных» массовых сил $S_{ij,j}^{*mnk}$. Например, граничные условия на позиции $\mathbf{P}_i^{000} = \left(X_n, Y_n\right)$, а на позиции $\mathbf{P}_i^{001} = -S_{ij}^{*\,001} \cdot \mathbf{n}_i$.

Полученные поля напряжений σ_{ij}^{mnk}, деформаций ε_{ij}^{mnk} и перемещений u_i^{mnk} суммируются согласно (7).

В работе [4] рассматривалось равновесие круговой пластинки под действием усилий распределенных по боковой поверхности вызывающие однородное напряженное состояние. В работе [5] исследовалось равновесие призматического тела под действием усилий распределенных по торцам.

Решение задачи. Рассматривается прямоугольная пластинка (рис. 1) из поликристаллического алюминия [1] $E_1 = 64.1 \cdot 10^3$ *МПа*; $E_2 = 77.4 \cdot 10^3$ *МПа*; $G_{12} = 29 \cdot 10^3$ *МПа*; $\nu_{12} = 0.24$.

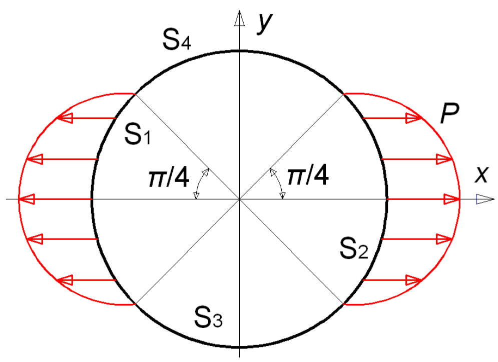

Рис. 1. Ортотропная плпстинка

Граничные условия:

$$p_x = Cos[\varphi] + Cos[\pi/4], p_y = 0, (x, y) \in S_1;$$

$$p_x = Cos[\varphi] - Cos[\pi/4], p_y = 0, (x, y) \in S_2;$$

$$p_x = 0, p_y = 0, (x, y) \in S_3;$$

$$p_x = 0, p_y = 0, (x, y) \in S_4 .$$

Массовые силы отсутствуют, $X_i^0 = 0$. Геометрическая и физическая стороны задачи рассматриваются в обезразмеренном виде с размерным коэффициентом $\eta^* = 10^9$ *Па*.

Решение задачи в целом, проводится с помощью метода малого параметра по методике, описанной выше, а изотропная задача теории упругости для пластинки на каждом приближении решается методом граничных состояний (МГС) [8].

Параметры изотропной среды:

$$E = 70.75 , \ \nu = 0.24 , \ \mu = 28.5282 , \ \lambda = 18.0178 .$$

Согласно (3), (4) и (5) малые параметры:

$$\alpha = 0.108045 , \ \beta = -0.142482 , \ \delta = 0.016537 .$$

Полученные в результате решения во втором приближении компоненты вектора перемещения слишком громоздки для полной обозримости, поэтому представим лишь их структуру (высшие степени и произведения малых параметров, начиная с 3-го порядка, отброшены):

$$u \approx [35x + 0.25x^3 - 448xy^2 - ... - 196x\alpha - ... - 267x\beta - 0.123x^3\beta + ...$$

$$+ 3xy^2\alpha^2\beta + ... + 29xy^2\alpha^2\delta - .. - 786x\alpha\delta^2 - ... - 0.737x\beta^2\delta + ...] \cdot 10^{-3} ;$$

$$v \approx [-1.54y + 1.51x^2y + ... + 0.58y\alpha - 2.95x^2y\alpha + ... + 1.14y\beta - ... - 0.55y^3\alpha^2\beta - ...$$
$$-1.57y\alpha^2\delta + ... + 1.93y\alpha\delta^2 + ... + 1.05x^2y\beta\delta^2 - ... - 0.238y\delta^3 + ...] \cdot 10^{-3} .$$

Для получения окончательных выражений, содержащих технические константы необходимо из (5) выразить малые параметры, подставить их в полученные выражения и провести обратную параметризацию.

Таким образом, мы получили механические характеристики как функции координат и малых параметров. Изменяя последние в определенных пределах, мы имеем возможность получать механические поля, не проводя каждый раз заново решение анизотропной задачи, что порой при сложных граничных условиях и геометрии тела, составляет непростую задачу, особенно если они имеют технологические отверстия [2], [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золоторевский В.С. Механические свойства металлов, 2 изд., М., 1983. – 352 с.

2. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении смешанных задач для плоской многосвязной транстропной области // Перспективы науки № 8 (95). С. 13-17.

3. Иванычев Д.А. Решение краевых задач теории упругости для тел клиновидной формы, имеющих полость // Е.А. Рязанцева, Д.А. Иванычев. Наука и бизнес: пути развития. 2014. № 4 (34). С. 64-69.

4. Иванычев Д.А. Параметрическое решение задачи о равновесии кругового в плане тела // «Наука и образование: новое время» № 1, 2018. С. 7-10.

5. Иванычев Д.А. Задача о равновесии призматического тела со слабо выраженной анизотропией // «Наука и образование: новое время» № 1, 2018. С. 11-14.

6. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 463 с.

7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. Издательство «Наука», М., 1966 – 707 с.

8. Пеньков В.Б. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // В.Б. Пеньков В.В. Пеньков. / Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т.2, №2. С. 115 – 137.

9. Сотников А.А. Метод малого параметра в задачах механики // А.А. Сотников, Д.А. Иванычев / Тенденции развития современной науки: сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета в 2 -х ч. Ч.1. - Липецк: Изд-во Липецкого государственного технического университета, 2017. - 618 с. С. 6-8.