УДК 517

ЗАДАЧА О НАХОЖДЕНИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Мальцев Н.М., Медведева Н.В.

ФГБОУ ВО «Уральский государственный университет путей сообщения», Екатеринбург (620034, г. Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66), e-mail: zarmek@outlook.com, medvedeva_n_v@mail.ru

В современных условиях инженеры должны обладать хорошей подготовкой в областях фундаментальных наук таких, как математика, физика, механика. Такая подготовка является базой для быстрого усвоения и овладения новыми перспективными научными и техническими направлениями. Формирование профессиональной компетентности будущего специалиста зависит от того, насколько активно он включен в данный процесс. Актуализировать познавательную деятельность обучающегося можно посредством содержания учебного материала. Особое значение в подготовке будущего инженера имеет изучение методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, которые широко используются при описании явлений и процессов в различных областях естествознания и техники. В данной работе рассматривается проблема интегрирования линейного неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Нетривиальность данной задачи заключается в том, что для дифференциальных уравнений такого типа не существует универсального метода интегрирования. В работе рассмотрены подходы к нахождению общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Применение данных подходов проиллюстрировано на примере интегрирования линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, для которого получены общее и частное решения.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, методы интегрирования, общее решение

THE PROBLEM OF FINDING GENERAL SOLUTION FOR LINEAR NON-HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE VARIABLE COEFFICIENTS

Maltsev N.M., Medvedeva N.V.

Ural State University of Railways Transport, Ekaterinburg, Russia (620034, Ekaterinburg street Kolmogorov 66), e-mail: zarmek@outlook.com, medvedeva_n_v@mail.ru

The engineers must be well in a subject including the essential field of Science like mathematics, physics and mechanics in the modern conditions. This preparation is the foundation for rapid assimilation and acquirement of new perspective scientific and technical directions. The best part is that preparation for future engineer contains studying of integrating methods for ordinary differential equations, which are widely used for description of phenomenon in the different fields of natural science and engineering. This work considers the problem of integrating of linear, non-homogeneous differential equation with the variable coefficients. There is no universal way to solve this problem. These approaches for finding general solution for linear, non-homogeneous differen-

tial equation with the variable coefficients are considered in this work. The supplement of these approaches is illustrated by the example of integrating a second-order linear, non-homogeneous differential equation with the variable coefficients for which we get the general and the particular solutions.

Keywords: ordinary differential equations, integration methods, the general solution

В условиях постоянно возникающих новых технических задач инженеры должны обладать хорошей подготовкой в областях фундаментальных наук таких, как математика, физика, механика. Такая подготовка является базой для быстрого усвоения и овладения новыми перспективными научными и техническими направлениями. Формирование профессиональной компетентности будущего специалиста зависит от того, насколько активно он включен в данный процесс. Актуализировать познавательную деятельность обучающегося можно посредством содержания учебного материала [2, 3]. Особое значение в подготовке будущего инженера имеет изучение методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, которые широко используются при описании явлений и процессов в различных областях естествознания и техники [4].

В данной работе рассматривается проблема интегрирования линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Нетривиальность данной задачи заключается в том, что для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, в отличие от линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, не существует общего метода интегрирования.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) второго порядка с переменными коэффициентами:

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y = f(x), \qquad (1)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a;b]$.

Данному ЛНДУ (1) с переменными коэффициентами соответствует линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка с переменными коэффициентами:

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y = 0. \qquad (2)$$

Как известно [1], общее решение $y(x)$ ЛНДУ (1) есть сумма $y_{\text{о.о}}(x)$ – общего решения соответствующего ЛОДУ (2) и $Y(x)$ – некоторого частного решения ЛНДУ (1), то есть

$$y(x) = y_{\text{о.о}}(x) + Y(x). \qquad (3)$$

Общее решение $y_{о.о}(x)$ ЛОДУ (2) представляет собой линейную комбинацию двух его линейно независимых частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, то есть выражается формулой [1]:

$$y_{о.о}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Универсального алгоритма для нахождения частного решения $Y(x)$ ЛНДУ (1) не существует. Если известно общее решение $y_{о.о}(x)$ соответствующего однородного уравнения (2), то для нахождения частного решения $Y(x)$ неоднородного уравнения применяют метод Лагранжа произвольных постоянных. В общем случае, на практике при нахождении общего решения ЛНДУ (1) выполняют следующее:

1. Подбором находят $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – линейно независимые частные решения соответствующего однородного уравнения (2).

2. С помощью формулы Лиувилля – Остроградского [1]

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W_0(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt}, \quad x_0 \in [a;b] \tag{4}$$

получают $y_{о.о}(x)$ – общее решение ЛОДУ (2).

3. Методом Лагранжа вариаций произвольных постоянных определяют $y(x)$ – общее решение ЛНДУ (1).

Рассмотрим примеры нахождения общего и частного решений линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами с помощью данного подхода.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(3x - 4x^2)y'' + (6 - 4x)y' + 4y = 30, \; x > \frac{3}{4}.$$

Решение. Проведем решение поставленной задачи в следующей последовательности.

1. Сначала подберем частное решение для ЛОДУ:

$$(3x - 4x^2)y'' + (6 - 4x)y' + 4y = 0, \; x > \frac{3}{4},$$

соответствующего данному ЛНДУ. Исходя из структуры уравнения, попробуем найти частное решение в виде линейной функции: $y_1 = Ax + B$. Ее производные будут равны: $y_1' = A$, $y_1'' = 0$. Подставляя y_1 и её производные y_1', y_1'' в однородное уравнение, получим:

$$(3x - 4x^2) \cdot 0 + (6 - 4x) \cdot A + 4 \cdot (Ax + B) = 0,$$

$$6A + 4B = 0,$$

$$A = -\frac{2}{3}B.$$

При $B = 3$, $A = -2$ получим частное решение однородного уравнения:

$$y_1 = -2x + 3.$$

2. Далее, используя формулу Лиувилля – Остроградского (4), определим общее решение ЛОДУ:

$$(3x - 4x^2)y'' + (6 - 4x)y' + 4y = 0, \; x > \frac{3}{4}$$

или

$$y'' + \frac{6 - 4x}{3x - 4x^2}y' + \frac{4}{3x - 4x^2}y = 0, \; x > \frac{3}{4}.$$

Вычислим интеграл

$$-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{4t - 6}{3t - 4t^2}dt.$$

Используем метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{4t - 6}{t(3 - 4t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{3 - 4t},$$

$$A(3 - 4t) + Bt = 4t - 6,$$

$$(B - 4A)t + 3A = 4t - 6.$$

Откуда $B - 4A = 4$ и $3A = -6$. Следовательно, $A = -2$, $B = -4$. Тогда

$$\int_{x_0}^{x} \frac{4t - 6}{3t - 4t^2}dt = \int_{x_0}^{x} \frac{-2}{t}dt + \int_{x_0}^{x} \frac{-4}{3 - 4t}dt = -\ln x^2 + \ln x_0^2 + \ln(4x - 3) - \ln(4x_0 - 3) = \ln\frac{x_0^2(4x - 3)}{x^2(4x_0 - 3)}.$$

Далее находим

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'=W_0(x_0)\cdot e^{\ln\frac{x_0^2(4x-3)}{x^2(4x_0-3)}}=W_0(x_0)\cdot\frac{x_0^2(4x-3)}{x^2(4x_0-3)}=C_1\cdot\frac{4x-3}{x^2},$$

где $C_1=W_0(x_0)\cdot\dfrac{x_0^2}{4x_0-3}$ – произвольная постоянная.

Поскольку частное решение y_1 известно, то мы получили дифференциальное уравнение первого порядка для определения другого частного решения – y_2:

$$y_1y_2'-y_2y_1'=C_1\cdot\frac{4x-3}{x^2},$$

Поделим обе части данного дифференциального уравнения на $y_1^2=(-2x+3)^2$:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=C_1\cdot\frac{4x-3}{x^2(-2x+3)^2}.$$

Далее интегрируем:

$$\frac{y_2}{y_1}=C_1\cdot\int\frac{4x-3}{x^2(-2x+3)^2}dx=C_1\cdot\left(\frac{1}{3x}-\frac{2}{3(2x-3)}\right)+C_2.$$

Следовательно,

$$y_{\text{о.о}}=(-2x+3)\left(C_1\cdot\left(\frac{1}{3x}-\frac{2}{3(2x-3)}\right)+C_2\right)=\frac{C_1}{x}+C_2(-2x+3)$$

– общее решение ЛОДУ.

3. Применяя метод вариаций произвольных постоянных определим $y(x)$ – общее решение ЛНДУ. Полагаем, что $C_1=C_1(x)$, $C_2=C_2(x)$ – функции от x. Тогда их производные C_1' и C_2' будут удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{C_1'}{x}+C_2'(-2x+3)=0, \\ -\dfrac{C_1'}{x^2}-2C_2'=\dfrac{30}{3x-4x^2}. \end{cases}$$

Из системы получаем:

$$C_1' = \frac{-30x(3-2x)}{(4x-3)^2}, \; C_2' = \frac{30}{(4x-3)^2}.$$

Интегрируя, находим:

$$C_1(x) = \frac{15x}{4} + \frac{135}{16(4x-3)} + D_1,$$

$$C_2(x) = \frac{-15}{2(4x-3)} + D_2.$$

Подставляя полученные выражения для $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в общее решение ЛОДУ, получаем:

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2(-2x+3) + \frac{15(8x-3)}{16x}.$$

– общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Пример 2. Пусть $f(x)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} (3x-4x^2)y'' + (6-4x)y' + 4y = 30, \; x > \dfrac{3}{4}, \\ y(1) = 4, \\ y'(1) = 6. \end{cases}$$

Найти $f(2)$.

Решение. В примере 1 было найдено общее решение данного ЛНДУ:

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2(-2x+3) + \frac{15(8x-3)}{16x}.$$

Далее, как обычно, из начальных условий определяем значения произвольных констант C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -\dfrac{11}{16}, \\ C_1 + 2C_2 = -\dfrac{51}{16}. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = -\dfrac{5}{2}$ и $C_2 = \dfrac{29}{16}$. Следовательно, решением задачи Коши является функция

$$f(x) = \frac{15x^2 - 1}{x},$$

поэтому $f(2)=9,5$.

В случае, когда известны частные решения Y_1, Y_2 неоднородного уравнения (1), то вводят новую искомую функцию $z=z(x)$, связанную с y уравнением:

$$y=Y_1+z \text{ или } z=y-Y_1,$$

Функция z удовлетворяет однородному уравнению (2), которое соответствует неоднородному уравнению (1). Подставляя вместо y функции Y_1, Y_2, кроме тривиального решения $z=0$ решением однородного уравнения также будет функция [5]:

$$z=Y_2-Y_1.$$

Рассмотрим пример нахождения общего решения ЛНДУ второго порядка с переменными коэффициентами, когда известны два его частных решения.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $(3x-4x^2)y''+(6-4x)y'+4y=30$, $x>\dfrac{3}{4}$, если известны его частные решения $Y_1=5x$, $Y_2=3x+3$.

Решение. Так как $Y_1=5x$, $Y_2=3x+3$ – частные решения данного неоднородного уравнения, то соответствующее однородное уравнение:

$$(3x-4x^2)y''+(6-4x)y'+4y=0$$

имеет решение $y_1=Y_2-Y_1=-2x+3$. Введем новую искомую функцию z при помощи уравнения $y=Y_1+y_1z$, то есть

$$y=5x+(-2x+3)z,$$

откуда

$$y'=5-2z+(-2x+3)z', \quad y''=-2z'-2z'+(-2x+3)z''=-4z'+(-2x+3)z''.$$

Подставляя полученные выражения в данное уравнение, находим:

$$(3x-4x^2)(-4z'+(-2x+3)z'')+(6-4x)(5-2z+(-2x+3)z')+4(5x+(-2x+3)z)=30,$$

$$(3x-4x^2)(-2x+3)z''+((6-4x)(-2x+3)-4(3x-4x^2))z'=0,$$

$$(3x-4x^2)(-2x+3)z''+(24x^2-36x+18)z'=0,$$

откуда $\frac{z''}{z'} = \frac{24x^2 - 36x + 18}{(3x - 4x^2)(2x - 3)}$, то есть

$$z' = \int \frac{24x^2 - 36x + 18}{(3x - 4x^2)(2x - 3)} dx .$$

После интегрирования получаем:

$$z' = \frac{4x - 3}{x^2 \cdot (2x - 3)^2} \cdot C_1 .$$

Далее находим

$$z = C_1 \int \frac{4x - 3}{x^2 \cdot (2x - 3)^2} dx = C_1 \cdot \left(\frac{1}{3x} - \frac{2}{3(2x - 3)} \right) + C_2 .$$

Подставляя z в выражение для y, имеем:

$$y = 5x + C_1 \left(\frac{1}{3x} - \frac{2}{3(2x - 3)} \right)(-2x + 3) + C_2(-2x + 3) = \frac{C_1}{x} + C_2(-2x + 3) + 5x$$

– общее решение данного линейного неоднородного уравнения.

Таким образом, в работе рассмотрены подходы к интегрированию линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Построены примеры, иллюстрирующие применение данных подходов к решению задачи о нахождении общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

Список литературы.

1. Демидович Б.П., Моденов В.П. Дифференциальные уравнения: учебное пособие. 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 288 с.
2. Медведева Н.В. О педагогической проблеме формирования мотивов учения у студентов// Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2017. – №10-1. – С. 134–138.
3. Медведева Н.В. Педагогические условия формирования мотивов учения у студентов педвуза// Технологии развивающего обучения математике в вузе и школе: Материалы Региональной научно-практической конференции. – Курган, 2002. – С. 27–28.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебное пособие для высших технических учебных заведений. Т. 2. – М.: Наука, 1978. – 576 с.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИМФЛ, 1959. – 468 с.