

# МЕЖДУНАРОДНЫЙ СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

№ 3 2018

Часть 1

ISSN 2409-529X

Журнал издаётся с 2014 года

Импакт фактор  
РИНЦ – 0,336

Электронная версия журнала: [www.eduherald.ru](http://www.eduherald.ru)

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

к.и.н., профессор РАЕ **Бизенкова Мария Николаевна**

## Заместители главного редактора:

к.и.н., профессор РАЕ **Старчикова Наталия Евгеньевна**

**Бизенков Евгений Александрович**

## Ответственный секретарь

**Нефедова Наталья Игоревна**

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Акбасова А.Д. (г. Туркестан), Алтайулы С.А. (г. Астана), Андреева А.В. (г. Уфа), Андреева Н.В. (г. Белгород), Бадюков В.Ф. (г. Хабаровск), Белецкая Е.А. (г. Белгород), Берестнева О.Г. (г. Томск), Березина А.В. (г. Екатеринбург), Валиев М.М. (г. Уфа), Виштак Н.М. (г. Балаково), Бубновская О.В. (г. Артем), Выхрыстюк М.С. (г. Тобольск), Голубева Г.Н. (г. Набережные Челны), Гормаков А.Н. (г. Томск), Горностаева Ж.В. (г. Шахты), Горишунова Н.К. (г. Курск), Горюнова В.В. (г. Пенза), Губина Н.В. (г. Нижнекамск), Долгополова А.Ф. (г. Ставрополь), Доница А.Д. (г. Волгоград), Евстигнеева Н.А. (г. Москва), Егорова Ю.А. (г. Чистополь), Егорычева Е.В. (г. Волжский), Ершова Л.В. (г. Шуя), Зайцева О.С. (г. Тобольск), Заярная И.А. (г. Находка), Киреева Т.В. (г. Нижний Новгород), Кисляков П.А. (г. Москва), Карпов С.М. (г. Ставрополь), Кобзева О.В. (г. Мурманск), Кобозева И.С. (г. Саранск), Коваленко Е.В. (г. Омск), Кондратьева О.Г. (г. Уфа), Конкиева Н.А. (г. Санкт-Петербург), Косенко С.Т. (г. Санкт-Петербург), Корельская И.Е. (г. Архангельск), Кочева М.А. (г. Нижний Новгород), Кочеткова О.В. (г. Волгоград), Кубалова Л.М. (г. Владикавказ), Лапп Е.А. (г. Волгоград), Кунусова М.С. (г. Астрахань), Кучинская Т.Н. (г. Чита), Лебедева Е.Н. (г. Оренбург), Кубалова Л. М. (г. Владикавказ), Лапп Е.А. (г. Волгоград), Медведев В.П. (г. Таганрог), Минахметова А.З. (г. Елабуга), Михайлова Т.Л. (г. Нижний Новгород), Николаева Л.В. (г. Якутск), Новикова Л.В. (г. Владимир), Омарова П.О. (г. Махачкала), Орлова И.В. (г. Москва), Осин А.К. (г. Шуя), Панов Ю.Т. (г. Владимир), Пелькова С.В. (г. Тюмень), Постникова Л.В. (г. Москва), Преображенский А.П., Ребро И.В. (г. Волжский), Решетников О.М. (г. Москва), Рыбинцева Г. В., Ткалич С.К. (г. Москва), Павлова Е.А. (г. Санкт-Петербург), Парушина Н.В. (г. Орел), Растеряев Н.В. (г. Новочеркасск), Рева Г.В. (г. Владивосток), Рогачев А.Ф. (г. Волгоград), Рыбанов А.А. (г. Волжский), Салаватова С.С. (г. Стерлитамак), Семёнова Г.И. (г. Тобольск), Сенкевич Л.Б. (г. Тюмень), Тарануха Н.А., Тесленко И.В. (г. Екатеринбург), Ткалич С.К. (г. Москва), Федуленкова Т.Н. (г. Владимир), Френкель Е.Э. (г. Вольск), Шалагинова К.С. (г. Тула), Шестак О.И. (г. Владивосток)

## МОЛОДЫЕ УЧЕНЫЕ И СТУДЕНТЫ:

Лошадикина А.А. (г. Казань), Горохова Е.Х. (г. Якутск), Негорожина А.В. (г. Ставрополь), Нуржан А.Н. (г. Астана), Гареева Э.И. (г. Уфа), Саврей Д.Ю. (г. Ухта)

## МЕЖДУНАРОДНЫЙ СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

Журнал «МЕЖДУНАРОДНЫЙ СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.

Свидетельство – ЭЛ № ФС-77-55504

Ответственный секретарь редакции – Нефедова Наталья Игоревна

тел. +7 (499) 705-72-30

e-mail: studforum@rae.ru

Почтовый адрес: г. Москва, 105037, а/я 47, Академия Естествознания,  
редакция журнала «Международный студенческий научный вестник»

Издательство и редакция: Информационно-технический отдел  
Академии Естествознания

Техническая редакция и верстка С.Г. Нестерова

Подписано в печать 5.04.2018

Формат 60х90 1/8

Типография ИД «Академия Естествознания»,

Саратов, ул. Мамантовой, 5

Способ печати – оперативный

Усл. печ. л. 21,25

Тираж 500 экз.

Заказ МСНВ/3-2018

## СОДЕРЖАНИЕ

### **Физико-математические науки**

|                                                                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| РАЗРАБОТКА ИНТЕРАКТИВНОЙ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ ПО ИЗУЧЕНИЮ ЗАВИСИМОСТИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МЕТАЛЛОВ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ<br><i>Наумов М.А., Морозова Е.В.</i>                        | 9  |
| <b>Секция «Актуальные вопросы физики и техники информационных систем», научный руководитель – Глущенко А.Г.</b>                                                        |    |
| О ВОЗМОЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОКТАНОВОГО ЧИСЛА ПО СПЕКТРУ ПРОПУСКАНИЯ БЕНЗИНОВ<br><i>Петропавловская А.В., Петропавловский В.М.</i>                                        | 13 |
| <b>Секция «Интеллектуальные системы в управлении и автоматизации», научный руководитель – Воронова Л.И.</b>                                                            |    |
| ПРИМЕНЕНИЕ ШИРОКОМАСШТАБНОГО АЛГОРИТМА SLAM ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА<br><i>Айрапетов Д.П.</i>                                                                | 17 |
| <b>Секция «Математика и ее практические приложения», научный руководитель – Долгополова А.Ф.</b>                                                                       |    |
| ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ<br><i>Агаджанян И.Д., Коростылёва А.Е., Лопатина Д.В.</i> | 22 |
| ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ<br><i>Анастасов И.Г., Мазницин В.В.</i>                                                                | 25 |
| ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ В ПРОГРАММИРОВАНИИ<br><i>Андреев И.В.</i>                                                                                             | 29 |
| ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ СХОДИМОСТЬ<br><i>Арзуманян А.Г., Рамазанов Х.М.</i>                                                                                   | 32 |
| ЗАДАЧА ДИСКОНТИРОВАНИЯ<br><i>Асфендиярова О.З., Исмаилова Д.М.</i>                                                                                                     | 35 |
| ГИДРОСТАТИКА МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНЫ. ЭКСПЕРИМЕНТ И ТЕОРИЯ<br><i>Бабинов М.А., Милостивая В.В., Гришанина О.А., Симоновский А.Я.</i>            | 38 |
| ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ<br><i>Богданова Д.С., Жукова В.А., Нестеренко Н.И.</i>                                                      | 43 |
| ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ<br><i>Богомолов А.А., Жуков Д.А.</i>                                                                   | 47 |
| ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ В СИСТЕМАХ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ<br><i>Бородин С.В., Каитов М.Р.</i>                                                                | 50 |
| ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В МЕДИЦИНЕ<br><i>Гаджиева Д.Э., Жукова В.А., Наконечная Д.И.</i>                                                                     | 53 |
| ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ<br><i>Газарян А.Ш., Мокриков С.С.</i>                                                                                         | 56 |
| ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛЕКАРСТВЕННЫХ СРЕДСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ<br><i>Гайворон А.Н., Писарева А.М.</i>                                   | 59 |
| ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ИГР ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ<br><i>Долгополова А.Ф., Ковчина Ю.С.</i>                                                               | 62 |
| МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ<br><i>Жукова В.А., Миронян О.Г., Федоренко А.А.</i>                                                                  | 66 |
| ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ВОЕННОМ ДЕЛЕ<br><i>Жукова В.А., Рыбалко Р.С., Шульга Ю.В.</i>                                                                      | 70 |

|                                                                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СФЕРЕ КРЕДИТОВАНИЯ<br><i>Заргарян Н.Р., Лубянская М.В.</i>                                                    | 73  |
| ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ЭКОНОМИКЕ<br><i>Захарова В.С., Неснова Е.В.</i>                                                         | 76  |
| ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ РАСЧЕТА ИЗМЕНЕНИЯ ВАЛОВОЙ ПРОДУКЦИИ<br><i>Иванникова И.А.</i>                                        | 79  |
| РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦЫ И ЕЕ ДЕТЕРМИНАНТА<br><i>Искандарова К.Р., Чубанов А.А.</i>                                 | 83  |
| ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ<br><i>Каланчук И.В., Попов Н.И.</i>                                                           | 87  |
| ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАГНИТОКАЛОРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА В ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ<br><i>Короткин Р.А., Чернявский Н.А., Яновский А.А.</i>              | 90  |
| ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТАБЛИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА<br>ДЛЯ РАСЧЕТА РС-ЦЕПЕЙ<br><i>Лабынцев А.С., Петрищев Д.Е.</i>                                    | 93  |
| ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА<br><i>Лалаян Л.Р., Шамашова А.В.</i>              | 97  |
| КАК ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА СВЯЗАНА С КРИПТОГРАФИЕЙ?<br><i>Ложкин П.А.</i>                                                                       | 101 |
| ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ<br><i>Мазинова Л.Э., Попова С.В.</i>                                                             | 104 |
| ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ К РАСЧЕТУ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ<br><i>Мазницын А.Ш., Тарасова К.А.</i>                                                | 107 |
| НЕЙРОННЫЕ СЕТИ<br><i>Маслов А.С., Пальцев В.Ю.</i>                                                                                             | 110 |
| ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫПАДЕНИЯ «СЧАСТЛИВОГО» БИЛЕТА<br>НА ЭКЗАМЕНЕ<br><i>Ревезук Ю.А., Рудикова Е.С.</i>                                                | 114 |
| ПРОВЕРКА ЗНАЧИМОСТИ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ<br><i>Савельева А.С., Черненко Н.А.</i>                                                        | 117 |
| ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТОВ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АЭРОДИНАМИКЕ<br><i>Тураев Р.М., Урядов Н.В.</i> | 121 |
| ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ<br><i>Ширяева М.С.</i>                                                                   | 125 |
| ГИДРОМЕХАНИКА МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ<br><i>Шуляк М.Д., Яновский А.А.</i>                                                                           | 128 |
| <b>Секция «Математика и ее приложения»,<br/>научный руководитель – Ермолаева В.И.</b>                                                          |     |
| АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ<br>НА ПРИМЕРЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ 3D МОДЕЛИ<br><i>Руденко Е.А., Семушева А.Ю.</i>              | 132 |
| <b>Секция «Математические методы решения инженерных задач»,<br/>научный руководитель – Светличная В.Б.</b>                                     |     |
| УЧИМСЯ МИНИМИЗИРОВАТЬ РАСХОДЫ НА ПЕРЕВОЗКУ<br><i>Пушка В.С., Матвеева Т.А., Светличная В.Б., Соколова А.В.</i>                                 | 135 |



---

**Секция «Математическое моделирование  
социально-экономических процессов»,  
научный руководитель – Полежаев В.Д.**

ИССЛЕДОВАНИЕ НАЛИЧИЯ КОНКУРЕНЦИИ МЕЖДУ РОССИЙСКИМИ ТЕЛЕВИЗИОННЫМИ  
КАНАЛАМИ И ИНТЕРНЕТ-САЙТАМИ НА ОСНОВЕ КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА  
ИХ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ АУДИТОРИИ

*Юсупова К.О.*

140

**Секция «Моделирование и исследование реальных процессов с помощью  
дифференциальных уравнений и их систем»,  
научный руководитель – Елецких И.А.**

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ  
ПРОИЗВОЛЬНО МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ

*Кузнецов В.В.*

145

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В МОДЕЛИРОВАНИИ  
ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Редькина Л.А.*

151

**Секция «Прикладная физика»,  
научный руководитель – Давлетишина М.Р.**

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ВЛИЯНИЕ  
НА ЗДОРОВЬЕ ЧЕЛОВЕКА

*Гайзетдинова А.М., Гайсина Г.А.*

155

**Секция «Современные проблемы комплексного анализа»,  
научный руководитель – Беднаж В.А.**

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

*Беднаж В.А., Моргунова Е.Ю.*

158

---

## CONTENTS

### *Physical and mathematical sciences*

|                                                                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| DEVELOPMENT OF THE INTERACTIVE LABORATORY WORK ON STUDYING THE DEPENDENCE OF METAL RESISTANCE FROM TEMPERATURE<br><i>Naumov M.A., Morozova E.V.</i>                    | 9  |
| <br><b>Section «Actual problems of physics and engineering of information systems»,<br/>scientific supervisor – Glushchenko A.G.</b>                                   |    |
| DETERMINATION OF THE OCTANE NUMBER OF THE GASOLINE SPECTRUM BANDWIDTH<br><i>Petropavlovskaya A.V., Petropavlovskiy V.M.</i>                                            | 13 |
| <br><b>Section «Intelligent systems in management and automation»,<br/>scientific supervisor – Voronova L.I.</b>                                                       |    |
| THE LARGE-SCALE SLAM ALGORITHM APPLICATION FOR MEASUREMENT OF THE OBJECT LOCATION<br><i>Ayrapetov D.P.</i>                                                             | 17 |
| <br><b>Section «Mathematics and its practical applications»,<br/>scientific supervisor-Dolgopola A.F.</b>                                                              |    |
| DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE PROBLEM OF MATHEMATICAL MODELING OF TRANSPORT OF POLLUTANTS IN THE ATMOSPHERE<br><i>Aghajanian I.D., Korostyleva A.E., Lopatina D.V.</i> | 22 |
| APPLICATION OF STATISTICAL METHODS IN THE SOLUTION OF ECONOMIC TASKS<br><i>Anastasov I.G., Maznitsin V.V.</i>                                                          | 25 |
| APPLICATION OF DISCRETE MATHEMATICS IN PROGRAMMING<br><i>Andreev I.V.</i>                                                                                              | 29 |
| NUMERICAL SEQUENCES AND THEIR CONVERGENCE<br><i>Arzumanyan A.G., Ramazanov K.M.</i>                                                                                    | 32 |
| THE PROBLEM OF DISCOUNTING<br><i>Asfendyarova O.Z., Ismailova D.M.</i>                                                                                                 | 35 |
| HYDROSTATICS OF THE MAGNETIC LIQUID NEAR THE SURFACE OF THE PLATE. EXPERIMENT AND THEORY<br><i>Bavinov M.A., Milostyva V.V., Grishanina O.A., Simonovsky A.Y.</i>      | 38 |
| APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS IN ECONOMIC CALCULATIONS<br><i>Bogdanova D.S., Zhukova V.A., Nesterenko N.I.</i>                                                   | 43 |
| APPLICATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS TO SOLUTIONS OF PHYSICS PROBLEMS<br><i>Bogomolov A.A., Zhukov D.A.</i>                                                           | 47 |
| THE USE OF ELEMENTS OF PROBABILITY THEORY IN POWER SYSTEMS<br><i>Borodin S.V., Kaitov R.M.</i>                                                                         | 50 |
| APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS IN MEDICINE<br><i>Gadzhieva D.E., Zhukova V.A., Nakonechnaya D.I.</i>                                                              | 53 |
| POINT ESTIMATES PARAMETERS<br><i>Gazaryan A.S., Mokrikov S.S.</i>                                                                                                      | 56 |
| ASSESSMENT OF EFFICIENCY OF MEDICINAL PRODUCTS WITH USE OF METHODS OF MATHEMATICAL STATISTICS<br><i>Gajvoron A.N., Pisareva A.M.</i>                                   | 59 |
| APPLICATION OF THE GAME THEORY FOR OPTIMIZATION OF PRODUCTION<br><i>Kovchina Y.S.</i>                                                                                  | 62 |
| MATHEMATICAL ANALYSIS IN LINEAR PROGRAMMING<br><i>Zhukova V.A., Mironyan O.G., Fedorenko A.A.</i>                                                                      | 66 |
| APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS IN THE MILITARY MATTER<br><i>Zhukova V.A., Rybalko R.S., Shulga Y.V.</i>                                                           | 70 |

|                                                                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| APPLICATION OF THE PROBABILITY THEORY IN THE LENDING SPHERE<br><i>Zargaryan N.R., Lubyanskaya M.V.</i>                                                     | 73  |
| THE APPLICATION OF MATHEMATICAL STATISTICS IN THE ECONOMY<br><i>Zakharova V.S., Nesnova E.V.</i>                                                           | 76  |
| APPLICATION OF METHODS OF ABSOLUTE AND RELATIVE DIFFERENCES<br>FOR CALCULATION CHANGE IN GROSS OUTPUT.<br><i>Ivannikova I.A.</i>                           | 79  |
| CALCULATION OF ELECTRICAL CIRCUITS WITH THE USE OF A MATRIX<br>AND ITS DETERMINANT<br><i>Iskandarova K.R., Chubanov A.A.</i>                               | 83  |
| DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS<br><i>Kalanchuk I.V., Popov N.I.</i>                                                                        | 87  |
| USE OF THE MAGNETOCALORIC EFFECT IN HEAT ENGINEERING DEVICES<br><i>Korotkin R.A., Chernyavsky N.A., Yanovskii A.A.</i>                                     | 90  |
| USING A TABLE OF LAPLACE TRANSFORM FOR THE CALCULATION<br>OF THE RC-CIRCUITS<br><i>Labyntsev A.C., Petrishchev D.E.</i>                                    | 93  |
| USING LINEAR PROGRAMMING METHODS FOR SOLVING THE OPTIMIZATION PROBLEM OF<br>PRODUCTION<br><i>Lalayan L.R., Shamashova A.V.</i>                             | 97  |
| HOW IS DISCRETE MATHEMATICS CONNECTED WITH CRYPTOGRAPHY?<br><i>Lozhkin P.A.</i>                                                                            | 101 |
| APPLICATION OF COMPLEX NUMBERS IN ELECTRICAL ENGINEERING<br><i>Mazinowa L.I., Popova S.V.</i>                                                              | 104 |
| APPLICATION OF MATRIX TO CALCULATION OF LINEAR<br>ELECTRICAL CIRCUITS<br><i>Maznitsyn A.S., Tarasova K.A.</i>                                              | 107 |
| NEURAL NETWORKS<br><i>Maslov A.S., Paltsev V.Y.</i>                                                                                                        | 110 |
| PROBABILITY OF LOSS OF A HAPPY TICKET ON THE EXAM<br><i>Reveguk Y.A., Rudikova E.S.</i>                                                                    | 114 |
| TEST OF SIGNIFICANCE FOR CORRELATION COEFFICIENT<br><i>Saveleva A.S., Chernenko N.A.</i>                                                                   | 117 |
| APPLICATION OF DEVICES OF INTEGRAL CALCULUS FOR SOLVING APPLIED<br>PROBLEMS IN ELECTRICAL ENGINEERING AND AERODYNAMICS<br><i>Turaev R.M., Uryadov N.V.</i> | 121 |
| DECISION MAKING IN LINEAR OPTIMIZATION PROBLEMS<br><i>Shiryaeva M.S.</i>                                                                                   | 125 |
| HYDROMECHANICS OF MAGNETIC LIQUID<br><i>Shulyak M.D., Yanovsky A.A.</i>                                                                                    | 128 |
| <b>Section «Mathematics and Its applications»,<br/>scientific supervisor – Ermolaeva V.I.</b>                                                              |     |
| AFFINE TRANSFORMATIONS OF OBJECTS IN COMPUTER GRAPHICS BY THE EXAMPLE<br>OF ROTATING 3D MODELS<br><i>Rudenko E.A., Semusheva A.Y.</i>                      | 132 |
| <b>Section «Mathematical methods for solving engineering problems»,<br/>scientific supervisor – Svetlichnaya V.B.</b>                                      |     |
| LEARNING TO MINIMIZE TRANSPORTATION COSTS<br><i>Pushka V.S., Matveeva T.A., Svetlichnaya V.B., Sokolova A.V.</i>                                           | 135 |

---

***Section «Mathematical modeling of socio-economic processes»,  
scientific supervisor – Polezhaev V.D.***

INVESTIGATION OF COMPETITION BETWEEN RUSSIAN TELEVISION CHANNELS  
AND INTERNET SITES BASED ON QUANTITATIVE ANALYSIS OF THEIR USER AUDIENCE  
*Yusupova K.O.* 140

***Section «Modeling and research of real processes with the help  
of differential equations and their systems»,  
scientific supervisor – Eletsy I.A.***

STABILITY ANALYSIS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS WITH PROVISION FOR  
ARBITRARY SMALL PERTURBATIONS OF PARAMETERS  
*Kuznetsov V.V.* 145

APPLICATION OF MATHEMATICAL ANALYSIS METHODS IN MODELING  
OF ECONOMIC PROCESSES  
*Redkina L.A.* 151

***Section «Applied physics»,  
scientific supervisor – Davletshina M.R.***

ELECTROMAGNETIC FIELD AND ITS IMPACT ON HUMAN HEALTH  
*Gaizetdinova A.M., Gaisina G.A.* 155

***Section «Modern problems of complex analysis»,  
scientific supervisor – Bednazh V.A.***

INTEGRAL INTRODUCTION OF WEIGHT FUNCTIONS  
*Bednazh V.A., Morgunova E.Y.* 158

УДК 53.096:378.147.88

## РАЗРАБОТКА ИНТЕРАКТИВНОЙ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ ПО ИЗУЧЕНИЮ ЗАВИСИМОСТИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МЕТАЛЛОВ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Наумов М.А., Морозова Е.В.

*Камышинский технологический институт, филиал ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет», Камышин, e-mail: maxim-naumov@mail.ru*

В статье рассматривается возможность применения информационных технологий при организации учебного процесса на примере физико-математических и технических дисциплин. Проведено исследование важности интегрированных в учебный процесс информационных технологий для повышения качества усвоения материала. Изучено использование программных пакетов физико-математического моделирования в создании интерактивных лабораторных работ. Суть интерактивной лабораторной работы заключается в замене работы с реальным оборудованием на математическое моделирование изучаемых физических процессов с помощью виртуального лабораторного оборудования. Рассматривается интерактивная лабораторная работа по изучению зависимости сопротивления материалов от температуры, которая создана, как аналог действующей установки лаборатории КТИ. Приведен сравнительный анализ по итогам организации лабораторной работы с реальным оборудованием и с использованием виртуальной модели. Выявлены преимущества и недостатки построения лабораторных занятий в форме интерактивной лабораторной работы.

**Ключевые слова:** интерактивная лабораторная работа, информационные технологии, физика, математика

## DEVELOPMENT OF THE INTERACTIVE LABORATORY WORK ON STUDYING THE DEPENDENCE OF METAL RESISTANCE FROM TEMPERATURE

Naumov M.A., Morozova E.V.

*Kamyshin Technological Institute, branch of the Volgograd State Technical University, Kamyshin, e-mail: maxim-naumov@mail.ru*

In the article explores the possibility of using information technologies in the organization of the educational process on the example of physical, mathematical and technical disciplines. The study of the importance of information technologies integrated into the educational process to improve the quality of mastering the material was conducted. The use of software packages of physical and mathematical modeling in the creation of interactive laboratory works was studied. The essence of interactive laboratory work consists in replacing work with real equipment with mathematical simulation of the studied physical processes with the help of virtual laboratory equipment. We consider the interactive laboratory work on the study of the dependence of the resistance of materials on temperature, which is created as an analog of the existing installation of the laboratory of the KTI. A comparative analysis was carried out based on the results of the organization of laboratory work with real equipment and using a virtual model. The advantages and disadvantages of constructing laboratory exercises in the form of interactive laboratory work are revealed.

**Keywords:** interactive laboratory work, information technology, physics, mathematics

В настоящее время информационные технологии приобретают все большее значение в жизни человека. Теперь, когда практически каждый человек имеет персональную ЭВМ, компьютер стал одним из самых доступных способов получения новых знаний и их обработки. Поэтому особенно актуальным становится использование информационных технологий в процессе школьного, среднего профессионального и высшего образования. Безграничные возможности программного моделирования способны удовлетворить множество учебных потребностей.

Применение информационных технологий в образовании становится особенно важным в тех случаях, когда в учебном заведении отсутствует то или иное лабораторное оборудование, или же тогда, когда студент по тем или иным причинам не имеет

возможности присутствовать на занятиях. Таким образом, использование широчайших возможностей информационных технологий не только заменяет собой широкий спектр дорогостоящего узкоспециализированного лабораторного оборудования, но и отвечает требованиям и спецификам инклюзивного образования.

Особую важность приобретает использование информационных технологий в сфере изучения физико-математических и технических дисциплин. На данный момент существует множество специализированных программных пакетов, способных выполнять сложные математические операции и моделировать такие физические условия, создание которых посредством лабораторного оборудования было бы практически невозможно. Использование программных пакетов физико-математического модели-

рования в процессе обучения позволяет решать большой спектр учебных задач в сфере естественнонаучных и математических дисциплин.

Конкретной реализацией концепции обучения с применением пакетов математического моделирования являются интерактивные лабораторные работы.

Интерактивная лабораторная работа – прогрессивная форма построения практических занятий, суть которой заключается в замене работы с реальным оборудованием на математическое моделирование изучаемых физических процессов с помощью виртуального лабораторного оборудования [2]. Применение такого подхода позволяет не только избежать вышеописанных проблем с дефицитом оборудования, но и делает материал более доступным, гибким, разнообразным и понятным.

Современные технологии позволяют организовать лабораторную работу с помощью интерактивных опытов, для ре-

лизации которых используются инструментальные средства, ориентированные на интернет-технологии, открывающие широкие возможности для визуализации учебных материалов и построению интерактивных виртуальных лабораторных практикумов, органично встроенных в учебный процесс [1].

В целях изучения преимуществ и недостатков построения учебного процесса в форме интерактивных лабораторных работ, на базе нашего Камышинского технологического института (филиал) ВолгГТУ было проведено исследование. Нами были проведены лабораторные работы по изучению зависимости сопротивления металлов от температуры, организованные в классической форме (рис. 1) и в форме интерактивной лабораторной работы (рис. 2). Виртуальная модель, задействованная в работе, повторяла физические процессы, задействованные в реальной действующей установке нашей лаборатории.

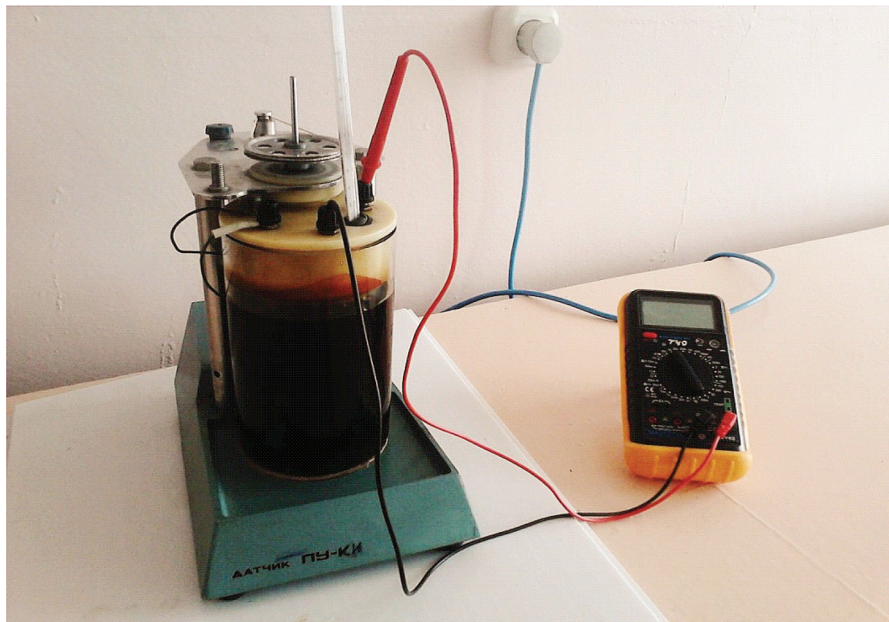


Рис. 1. Опытная установка для исследования зависимости сопротивления металлов от температуры, имеющаяся в учебной лаборатории КТИ (филиал) ВолгГТУ



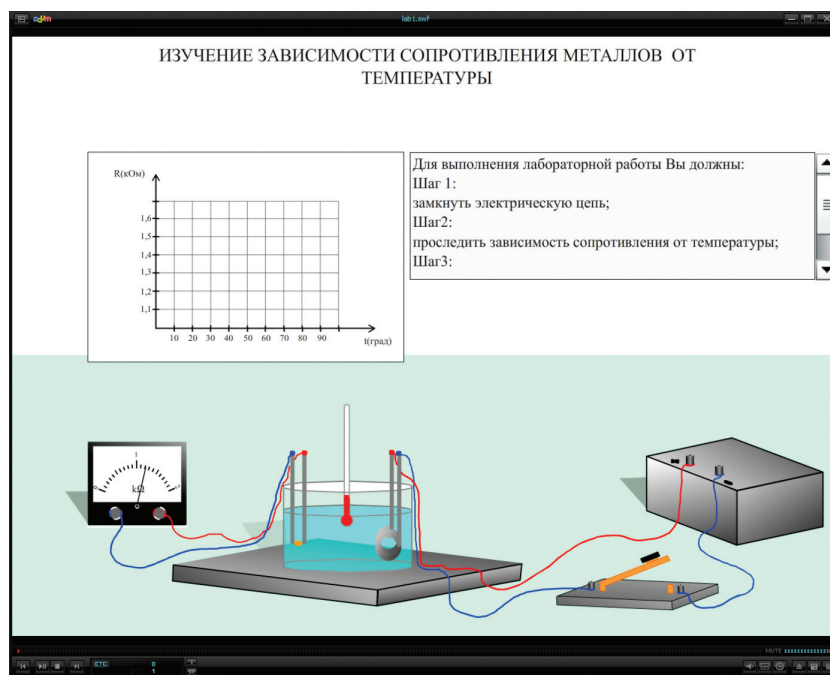


Рис. 2. Интерфейс интерактивной лабораторной работы по изучению сопротивления металлов

Интерактивная лабораторная работа устроена следующим образом. Перед студентом находится интерфейс, включающий в себя изображение установки, график и инструкцию. По щелчку мыши на изображение замка, замок замыкается и запускается анимация. Студент может

видеть, как растет температура, меняются показания приборов и выводится график зависимости. По итогу работы симуляции, студент получает графический вывод необходимых данных. Итог работы интерактивной лабораторной работы представлен на рис. 3.

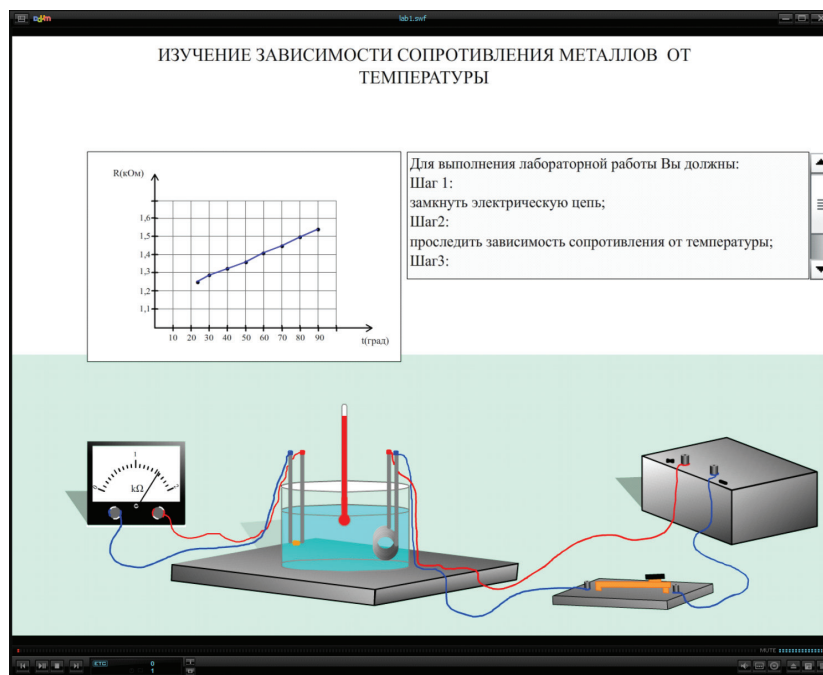


Рис. 3. Результат работы интерактивной лабораторной работы «изучение зависимости сопротивления металлов от температуры»



По итогам подготовки и проведения опыта в различных формах и сравнительного анализа результатов было выявлено следующее:

– По сравнению с реальным исследованием, работа с математической моделью установки занимает гораздо меньше времени;

– Виртуальная модель установки портативна, то есть не привязана к помещению лаборатории и может быть использована на любом персональном компьютере;

– Математическая модель не зависит от состояния приборов, практически не подвержена погрешностям и обладает высокой точностью.

Выявленные исследованием результаты позволяют сделать вывод, что виртуальное моделирование физико-математических процессов обладает рядом значительных преимуществ по сравнению с классическим построением лабораторного занятия. Однако стоит заметить, что невозможность прямого физического контакта с лабораторным оборудованием можно расценивать как недостаток интерактивного подхода. Впрочем, большая гибкость и широкий спектр областей применения программных пакетов моделирования во многом компенсируют этот недостаток за счет расширения границ познания и возможности воспроизвести практически любой физико-математический опыт средствами электронно-вычислительной техники.

Можно заключить, что программное обеспечение, предоставляющее возможность математического моделирования реальных физических процессов, обладает огромным потенциалом и широчайшими возможностями, позволяет решать множество прикладных и экспериментальных задач, способствует более наглядному представлению

учебного материала, повышает его доступность. Внедрение информационных технологий в форме интерактивных лабораторных работ в процесс обучения полностью решает проблемы недостатка реального лабораторного оборудования и установок, невозможности проведения тех или иных сложных или узкоспециализированных опытов в лабораторных условиях, а также проблемы ограниченного доступа к учебному оборудованию ввиду тех или иных причин. Применение информационных технологий позволяет не только избавиться от привязки к лабораторному оборудованию там, где это необходимо, но и всецело отвечает концепции инклюзивного образования.

Тем не менее, традиционные методы проведения экспериментов на лабораторных занятиях по физике остаются актуальными и, несомненно, имеют свои плюсы, так как вырабатывают навыки работы с реальными приборами.

Таким образом, исследовав возможности интерактивных лабораторных работ, конструируемых с помощью программных пакетов математического моделирования, можно сказать, что применение информационных технологий в изучении физико-математических дисциплин обладает поистине большим потенциалом и широчайшими возможностями. Сочетание традиционного и интерактивного экспериментов позволяют добиться максимально полного усвоения знаний.

#### Список литературы

1. Дьяконов В.П., Круглов В.В. MATLAB 6.5 SP1/7/7 SP1/7 SP2 + Simulink 5/6. Инструменты искусственного интеллекта и биоинформатики // Солон-пресс. – 2010. – С. 234–243.
2. Кларин М.В. Интерактивное обучение – инструмент освоения нового опыта // Педагогика. – 2000. – №7. – С. 80–81.

*Секция «Актуальные вопросы физики и техники информационных систем»,  
научный руководитель – Глуценко А.Г., д-р физ.-мат. наук, профессор*

УДК 535.37

## **О ВОЗМОЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОКТАНОВОГО ЧИСЛА ПО СПЕКТРУ ПРОПУСКАНИЯ БЕНЗИНОВ**

**<sup>1</sup>Петропавловская А.В., <sup>2</sup>Петропавловский В.М.**

*<sup>1</sup>Лицей № 131, Самара;*

*<sup>2</sup>ПГУТИ, Самара, e-mail: Petropavlovsky-Vlad@yandex.ru*

Разработана и создана установка, позволяющая автоматизировать снятие и сравнение спектров. Были сняты спектры пропускания бензинов. ОЧ данных бензинов: 53, 68, 70, 73, 75, 80. Исследовались образцы с толщиной слоя 4–100 мм. Исследована зависимость спектра пропускания бензина в ближней ИК области от октанового числа. Изучено влияние ОЧ на спектры пропускания бензинов в области 1–1,8 мкм. Определены длины волн и толщины образцов для которых коэффициент пропускания наиболее сильно зависит от октанового числа. Для исследованных образцов обнаружена монотонная зависимость показателя пропускания от величины ОЧ в полосах поглощения 1,2 и 1,4 мкм. С увеличением октанового числа наблюдается увеличение пропускания бензинов. Наибольшее изменение пропускания при изменении октанового числа на коэффициент пропускания соответствует толщине образца 10–20 мм.

**Ключевые слова:** спектр пропускания бензина, ИК спектр, октановое число, автоматизация снятия спектров.

## **DETERMINATION OF THE OCTANE NUMBER OF THE GASOLINE SPECTRUM BANDWIDTH**

**<sup>1</sup>Petropavlovskaya A.V., <sup>2</sup>Petropavlovskiy V.M.**

*<sup>1</sup>Lyceum № 131, Samara;*

*<sup>2</sup>PSUTI, Samara, e-mail: Petropavlovsky-Vlad@yandex.ru*

Designed and developed the installation, allowing to automate the removal and comparison of spectra. The spectra of transmittance of gasoline. PTS data gasoline: 53, 68, 70, 73, 75, 80. Studies were investigated the samples with a layer thickness of 4–100 mm. the dependence of transmittance spectrum of gasoline in the near infrared region from octane. The influence of PTS on the spectra of the pass-ing of gasoline in the region of 1–1.8  $\mu\text{m}$ . Defined wavelength and specimen thickness for which the transmission coefficient is most strongly dependent on the octane. For the studied samples revealed a monotonic dependence of the rate of transmission of the value of the PTS in the absorption bands at 1.2 and 1.4 microns. The higher the octane number, an increase in the bandwidth of gasoline. The greatest change of the transmittance when changing the octane number of the transmittance corresponds to the specimen thickness 10–20 mm.

**Keywords:** transmittance spectrum of benzene, IR spectrum and the octane number, the automation of the recording of the spectra

Октановое число (ОЧ) является мерой детонационной стойкости (ДС) бензина и численно равно процентному содержанию изооктана в эталонной смеси с гептаном, которая по ДС в условиях стандартного одноцилиндрового двигателя эквивалентна испытываемому бензину [1]. Полученные таким образом значения имеют относительный характер и не всегда совпадают с фактической ДС бензинов в полноразмерных двигателях. Определение ОЧ на стенде или непосредственно на реальных двигателях занимает значительное время. Вместе с этим при производстве бензинов существует потребность контроля ОЧ «в реальном времени».

ОЧ может изменяться в зависимости от внешних факторов (давления и температуры окружающей среды, условий работы

двигателя) [2], и при этом бензины с одинаковым ОЧ могут иметь несколько разный процентный состав углеводородов в зависимости от типа нефти, используемой для их получения. Но в общем случае большее значение ОЧ соответствует большему процентному содержанию высших углеводородов. В спектрах углеводородов имеются полосы поглощения в ближней ИК области (1,0–2,5 мкм). Увеличение содержания высших углеводородов приводит к эффективному уменьшению количества С-Н связей (ответственных за поглощение на колебательных переходах) в единице объема, т.е. к увеличению пропускания в ближней ИК области. Целью данной работы было исследование зависимости пропускания бензинов в ближней ИК области от ОЧ.

### Схема установки

Для решения данной задачи была разработана установка, схема которой приведена на рис.1. Свет от лампы накаливания 1 проходит через широкополосный фильтр 2, необходимый для выделения одного порядка монохроматора, линзу 3, изготовленную из фтористого бария, имеющего равномерное пропускание в рабочей области, механический модулятор 4, и плоским зеркалом 5 проецируется на щель малогабаритного монохроматора МУМ-3 6 (разрешение 3нм/мм, такое разрешение достаточно для снятия широкополосных спектров жидких бензинов). Сканирование по частотному спектру осуществлялось при помощи шагового электродвигателя, который управлялся программно от компьютера. После монохроматора свет проходит через кювету с образцом 7. Интенсивность прошедшего света регистрируется фотоприемным устройством 8. Фотоприемное устройство состоит из фотоприемника 8а (в качестве фотоприемника использовалось фотосопротивление ФСА-3 или фотоприемное охлаждаемое устройство ФУО 612-8, имеющее более высокую (в 2-4 раза) чувствительность в длинноволновой области (1,8-3,2 мкм) и менее чувствительно к внешним электрическим наводкам и помехам) и предусилителя 8б, который включал в себя цепь стабилизации для питания фотосопротивления или ФУО и усиливающий каскад, осуществляющий усиление сигнала в полосе частот модуляции механического модулятора. Сигнал с фотоприемного устройства подавался на селективный вольтметр 9, который измерял амплитуду сигнала на частоте модуляции. Показания вольтметра через АЦП записывались на компьютер 10 и записывались в файл.

Разработанная программа позволяла осуществлять сканирование по спектральному диапазону, наблюдать на экране спектр исследуемого вещества, сохранять его в файл, выводить его на печать, получать числовые значения сигнала интенсивности прошедшего света на данной длине волны.

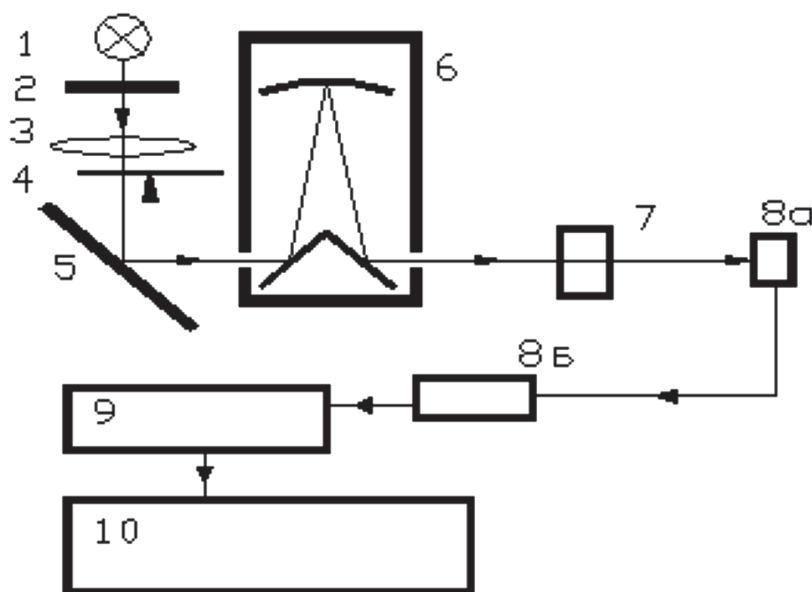


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

### Результаты

Были сняты спектры пропускания бензинов. ОЧ данных бензинов: 53, 68, 70, 73, 75, 80. Исследовались образцы с толщиной слоя 4–100 мм. Наибольшее изменение пропускания бензинов наблюдалось на длинах волн 1205 и 1400 нм (рис. 2). Наибольшее

абсолютное изменение пропускания (что соответствует максимальному соотношению сигнал/шум) наблюдалось при толщине образцов 10–20 мм. Характерный спектр пропускания бензина (толщина слоя 20 мм) приведен на рис. 2 (1 – ОЧ=53; 2 – ОЧ=80), зависимости пропускания бензинов от ОЧ – на рис. 3.

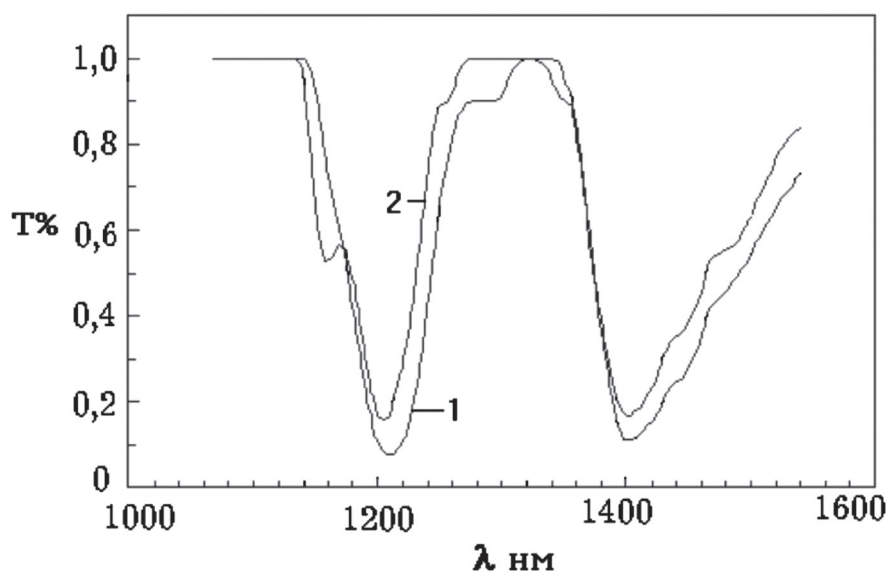


Рис. 2. Спектры пропускания бензинов в ближней ИК-области:  
1 – толщина образца 20 мм, октановое число – 53;  
2 – толщина образца 20 мм, октановое число – 80

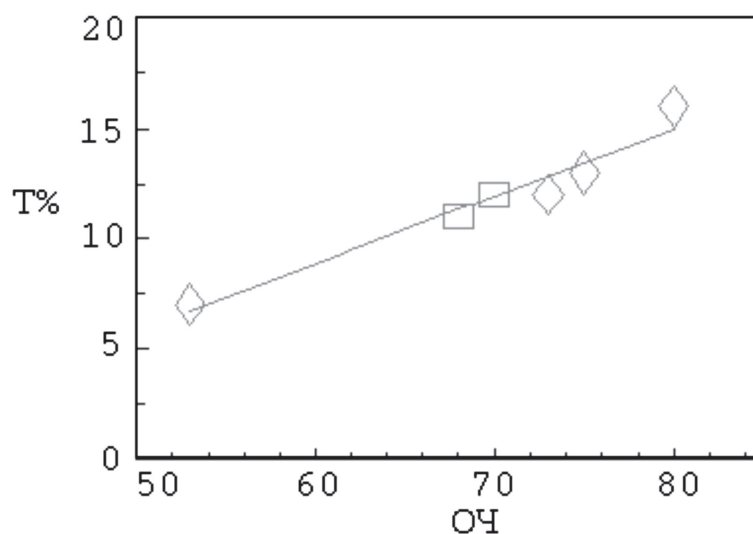


Рис. 3. Зависимость коэффициента пропускания бензинов от октанового числа на длине волны 1205 нм

### Выводы

Изучено влияние ОЧ на спектры пропускания бензинов в области 1–1,8 мкм. Для исследованных образцов обнаружена монотонная зависимость показателя пропускания от величины ОЧ в полосах поглощения 1,2 и 1,4 мкм. С увеличением октанового числа наблюдается увеличение пропускания бензинов. Наибольшее изменение пропускания при изменении октанового числа на коэффициент пропорциональности соответствует толщине образца 10–20 мм.

*Авторы приносят свои благодарности СФ ФИАН за возможность использования спектрофотометра и Новокуйбышевскому нефтеперерабатывающему заводу за предоставленные тарированные образцы.*

### Список литературы

1. Hansen K.R. et al. Thermo-optical effects in high-power ytterbium-doped fiber amplifiers // Opt. Express. – 19 (24). – pp. 23965–23980 (2011).
2. Wyss E. et al. Thermo-optical compensation methods for high-power lasers // IEEE J. Quantum Electron. – 38 (12). – p. 1620 (2002).
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М. Наука, 1970. – 720 с.

*Секция «Интеллектуальные системы в управлении и автоматизации»,  
научный руководитель – Воронова Л.И., д-р физ.-мат. наук, профессор*

УДК 004.032.26

## **ПРИМЕНЕНИЕ ШИРОКОМАСШТАБНОГО АЛГОРИТМА SLAM ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА**

**Айрапетов Д.П.**

*ФГБОУ ВО «Московский технический университет связи и информатики», Москва,  
e-mail: dmitry\_a95@live.ru*

В статье проведён анализ метода использования алгоритма SLAM. Рассмотрены ключевые этапы построения данной технической системы. Работа ориентирована на дальнейшее продолжение, основанное на проведённом анализе и базовой реализации. Рассмотрены технические средства реализации проекта. Перечислены основные принципы реализации метода. Произведена работа над изучением простой модели движения объекта. Рассматриваемые этапы представляют собой разработку алгоритмов и программного обеспечения. Показан пример использования нейронных сетей при выполнении поставленных задач. Рассмотрены рекомендации по использованию оборудования, разработке и эксплуатации системы. Сделаны выводы по результатам проведённой работы, на основе которых будут приняты последующие решения. Конечный продукт должен быть запущен с помощью аппаратуры Raspberry Pi3. Научный руководитель – к.т.н., с.н.с. кафедры ИСУиА Буянов Б.Я.

**Ключевые слова:** SLAM, движение, объект, нейронная сеть, локализация

## **THE LARGE-SCALE SLAM ALGORITHM APPLICATION FOR MEASUREMENT OF THE OBJECT LOCATION**

**Ayrapetov D.P.**

*Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow,  
e-mail: dmitry\_a95@live.ru*

The article analyzes the method of using the SLAM algorithm. The key stages of construction of this technical system are considered. The work is focused on further continuation based on the conducted analysis and basic implementation. Technical means of implementation of the project are considered. The basic principles of the method are listed. A study of a simple model of the object motion is made. The considered stages are the development of algorithms and software. An example of using neural networks when performing tasks is shown. Recommendations on the use of equipment, development and operation of the system are considered. Conclusions are drawn from the results of the work, on the basis of which subsequent decisions will be made. The end product should be run using the hardware of the Raspberry Pi 3. Supervisor-Ph. D., SNA. chairs of ISU and a Buyanov B.Y.

**Keywords:** SLAM, motion, object, neural network, localization

Технология LSD-SLAM – подход к локализации и сопоставлению на основе ключевого кадра, который основывается на следующих этапах [1]:

- движение камеры отслеживается в направлении опорного ключевого кадра на карте. Новые ключевые кадры генерируются, если камера слишком далеко отошла от существующих ключевых кадров;
- глубина (расстояние) в текущем эталонном ключевом кадре оценивается из стерео соответствий на основе отслеживаемого движения (временное стерео) [2];
- позиции ключевых кадров выполнены глобально согласованными с помощью взаимного прямого выравнивания изображений и оптимизации алгоритма графического позиционирования.

Для реализации требуется персональный компьютер на базе операционной системы Ubuntu, веб-камера, дополнительные программные пакеты.

В Stereo LSD-SLAM глубина в ключевых кадрах дополнительно оценивается непосредственно из статического стерео. Существует целый ряд преимуществ этого подхода: полагаться исключительно на временные или исключительно на статическую стереосистему. Статическая стереосистема позволяет оценивать абсолютный масштаб мира и не зависит от движения камеры. Тем не менее, статическое стерео ограничено постоянной базой (с во многих случаях фиксированным направлением), что эффективно ограничивает производительность до определенного диапазона [3].



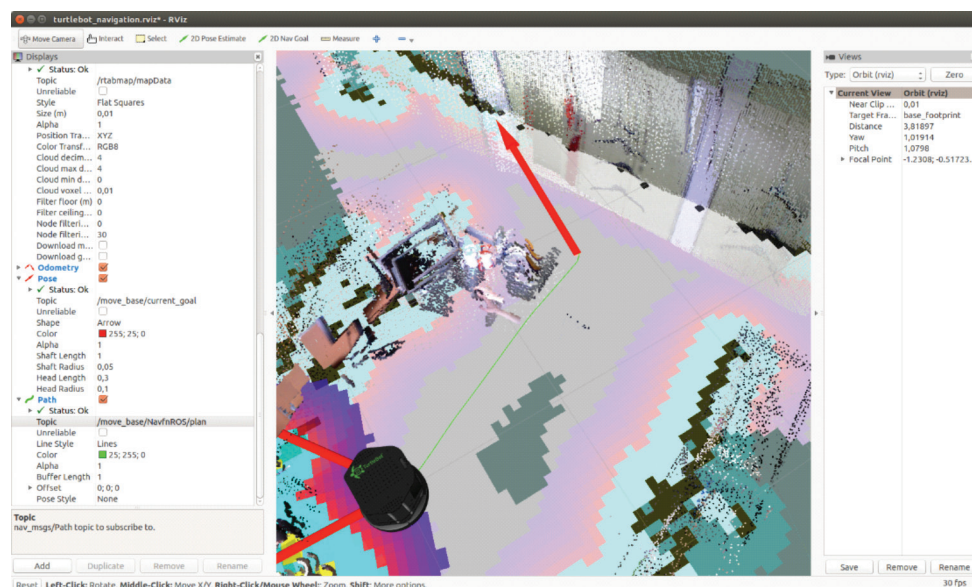


Рис. 1. Работа SLAM

Временная стереосистема не ограничивает производительность до определенного диапазона. Один и тот же датчик может использоваться в очень малых и очень больших средах и легко перемещаться между ними. С другой стороны, он не обеспечивает масштабирование и требует передвижения камеры [4]. Дополнительным преимуществом сочетания временной и статической стереосистемы является то, что доступно несколько базовых направлений: в то время как статическое стерео обычно имеет горизонтальную базовую линию, что не позволяет оценить глубину вдоль горизонталь-

ных кромок, временное стерео позволяет завершить карту глубины, обеспечивая другое движение направления [5].

Основные принципы реализации метода (алгоритма):

- обобщение LSD-SLAM на стереокамере, комбинируя временное и статическое стерео в прямом, режиме SLAM в режиме реального времени;
- моделирование изменения освещения при прямом выравнивании изображений, что повышает надёжность метода;
- систематическая оценка двух базовых наборов данных из полученных изображений.



Рис. 2. Графическая реализация алгоритма SLAM на собственном примере

### Простая модель обучения на основе движения

Визуальное моделирование подвижного объекта-наблюдателя производится с помощью свёрточной нейронной сети (CNN) [6]. Объект оптимизирует его визуальные представления, минимизируя ошибку преобразований камеры, полученной при его передвижении на основе предсказания. Выполнение этой задачи эквивалентно обучению нейронной сети с двумя потоками, принимающей два изображения в качестве входных данных и предсказывает перемещение, чему объект подвергался, когда он перемещался между  $X$  и  $Y$ , из которых

два изображения были получены. Чтобы узнать полезные визуальные представления, агент постоянно выполняет эту задачу (в зависимости от окружающей обстановки) [7].

Рассматриваются разные варианты предварительной оценки для оценки полезности изученных функций. Перфекционирование – процесс оптимизации значений случайно инициализированной нейронной сети для вспомогательной задачи, которая не совпадает с целевым преобразованием камеры из пар изображений.

Движение объекта эквивалентно перемещению камеры. Перемещение ставится, как проблема прогнозирования [8].

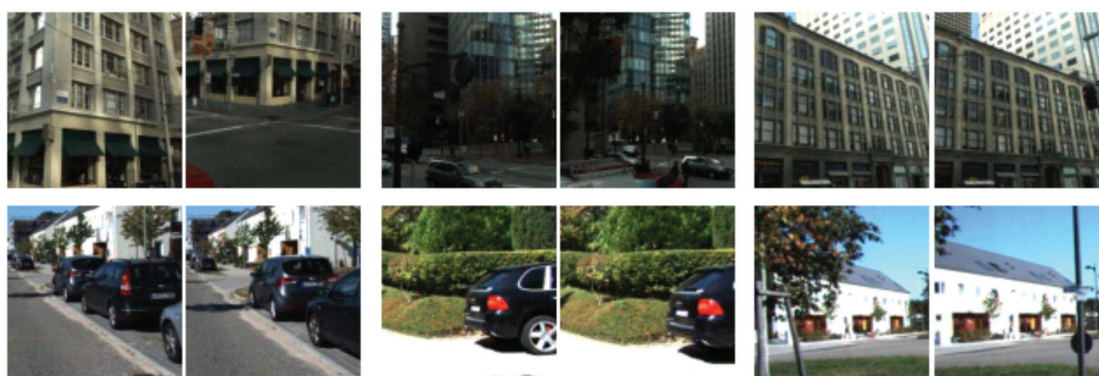


Рис. 3. Изучение перемещения для контроля визуальных функций. Мобильный объект, оборудованный визуальными датчиками, получает последовательность изображений в качестве входных данных во время движения

```
for(int i = 1; i < NUM_PYRS; ++i)
{
    resizeVMap(vmaps_curr[i - 1], vmaps_curr[i]);
    resizeNMap(vmaps_curr[i - 1], vmaps_curr[i]);
    resizeNMap(nmaps_curr[i - 1], nmaps_curr[i]);
}

cudaDeviceSynchronize();

fernThresh = 0.3095f;

timeDelta = 200;
icpCountThresh = 35000;
icpCountThresh = 40000;
start = 1;
so3 = !(Parse::get().arg(argc, argv, "-nso", empty) > -1);
end = std::numeric_limits<unsigned short>::max();

+FIND_PATH(EIGEN3_INCLUDE_DIR Eigen/Core /usr/include /usr/include/eigen3)
+IF ( EIGEN3_INCLUDE_DIR )
+ MESSAGE(STATUS "-- Looking for Eigen3 - found")
+ELSE ( EIGEN3_INCLUDE_DIR )
+ MESSAGE(FATAL_ERROR "-- Looking for Eigen3 - not found")
+ENDIF ( EIGEN3_INCLUDE_DIR )
```

Рис. 4. Программная реализация



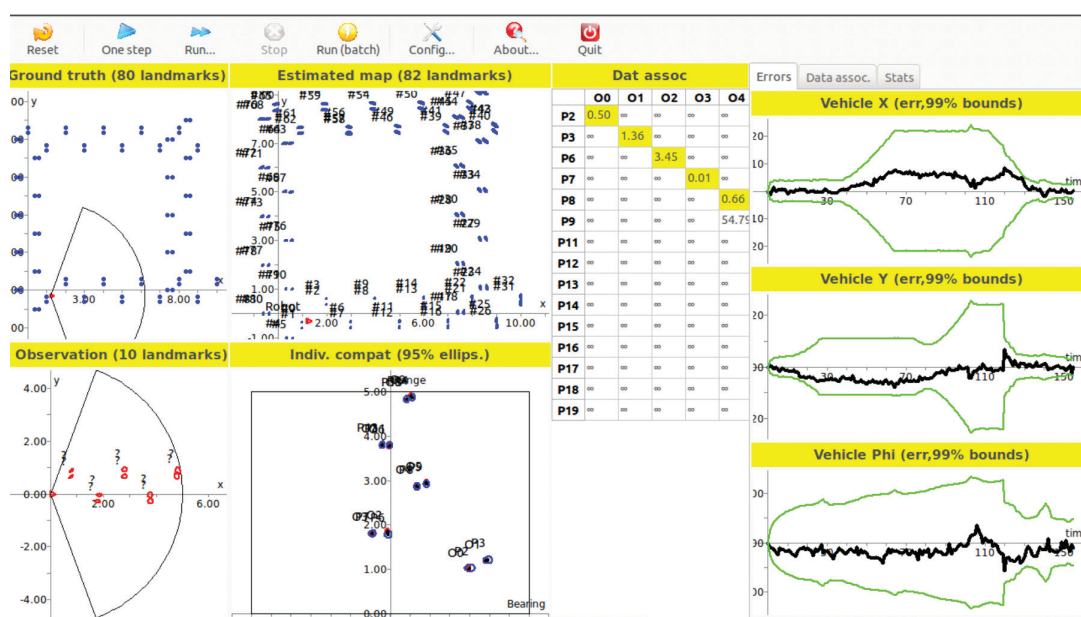


Рис. 5. Графический анализ движения с помощью программы «SLAM Tuning»

## Микрокомпьютер Raspberry Pi3

Микрокомпьютер Raspberry Pi3 считается хорошим аппаратным устройством для реализации конечного продукта ввиду своих небольших размеров и быстродействия [9].

Что представляет из себя Raspberry Pi 3 Model B в техническом плане:

- SoC: Broadcom BCM2837;
- Процессор: ARM Cortex-A53 (4 ядра);
- Графический процессор: Broadcom VideoCore IV;
- Оперативная память: 1Гб DDR2;
- Встроенные адаптеры: 10/100Мбит Ethernet;
- Bluetooth 4.1 LE, Wi-Fi 802.11n

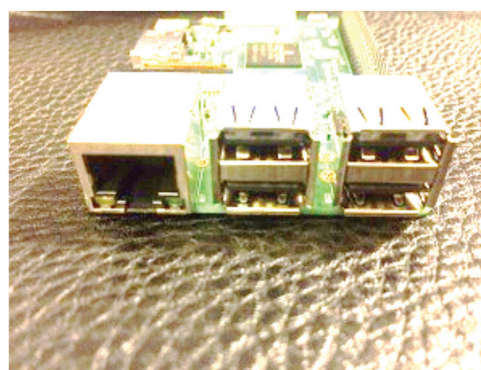


Рис. 6. Микрокомпьютер Raspberry Pi3

Для разработки рекомендуется использовать пакеты Keras, Theano. Взаимодействие с ними пользователя происходит через систему Linux (Ubuntu). Персональный компьютер – база для разработки алгоритма, который в будущем предстоит транспортировать в память микрокомпьютера.

### Заключение

Исследование показало, что базовая реализация алгоритма SLAM возможна при использовании среднестатистического оборудования. В дальнейшем, считается целесообразным использовать аппаратуру с большей вычислительной способностью.

### Список литературы

1. Davison A.J. Real-Time Simultaneous Localisation and Mapping with a Single Camera.

2. Володин Ю.И. Телевизионная система объемного зрения для управления движением мобильного робота: дис. ... канд. техн. наук: 05.02.05: защищена 04.06.11 / Володин Юрий Сергеевич. – М., 2011. – 209 с.

3. LeCun Y., Bottou L., Bengio Y., Haffner P. Gradient-Based Learning Applied to Document Recognition // *Proceedings of the IEEE*, 86(11): 2278–2324.

4. RoboMe [Электронный ресурс] // URL: [http://robome.ru/tehnicheskoe\\_zrenie](http://robome.ru/tehnicheskoe_zrenie) (дата обращения: 11.12.2017).

5. Петрова Т.В. Машинное зрение. Математические машины и системы. – 2009. – №4. – С. 18.

6. Хабрахабр. Vision-based SLAM: монокулярный SLAM. – Режим доступа: <https://habrahabr.ru/company/singularis/blog/277537/> (дата обращения 14.12.2017 г.).

7. Thrun S., Montemerlo M., Koller D., Wegbreit B., Nieto J., Nebot E. FastSLAM: an efficient solution to the simultaneous localization and mapping problem with unknown data association // *Journal of Machine Learning Research*, 2004.

8. Круглов В.В., Борисов В.В. – Искусственные нейронные сети. Теория и практика. – 2-е изд., стереотип. – М.: Горячая линия-Телеком, 2002. – 382 с.

9. Raspberry Pi 3. Обзор и начало работы. – Режим доступа: <http://dmitrysnotes.ru/raspberry-pi-3-obzor-i-nachalo-raboty/> (дата обращения: 19.12.2017).

*Секция «Математика и ее практические приложения»,  
научный руководитель – Долгополова А.Ф., канд. экон. наук, доцент*

УДК [517.972+519.633]:504.3.054

## **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ**

**Агаджанян И.Д., Коростылёва А.Е., Лопатина Д.В.**

*ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: inf@stgau.ru*

Выполнен анализ современных методов экспериментального исследования динамики распространения примесей в атмосфере и изменений ее показателей. Для математической модели оценки концентрации аэрозольных примесей, полученной на основе фундаментальной системы решений однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами выполнено построение вычислительного алгоритма, его программная реализация, а также проведены численные исследования вычислительного алгоритма на сходимость и устойчивость получаемых решений к погрешностям в исходных данных. В связи с ростом антропогенной нагрузки на экологические системы, в том числе и на атмосферу, увеличивается актуальность развития методов и средств исследования ее состояния для решения экологических проблем.

**Ключевые слова:** загрязнение атмосферы, математическое моделирование, уравнение переноса, дифференциальное уравнение, аналитическое решение, вычислительный алгоритм, численные исследования

## **DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE PROBLEM OF MATHEMATICAL MODELING OF TRANSPORT OF POLLUTANTS IN THE ATMOSPHERE**

**Aghajanian I.D., Korostyleva A.E., Lopatina D.V.**

*Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru*

The analysis of modern methods of experimental studies of dynamics of spreading of impurities in the atmosphere and changes its indicators. For the mathematical model evaluation of aerosol impurities, derived from the fundamental system of solutions of the homogeneous differential equation of second order with constant coefficients carried out the construction of the computational algorithm, its software implementation and numerical studies the computational algorithm on the convergence and stability of the solutions to the errors in the source data.

**Keywords:** air pollution, mathematical modeling, transport equation, differential equation, analytical solution, computational algorithm and numerical investigations

В связи с ростом антропогенной нагрузки на экологические системы, в том числе и на атмосферу, увеличивается актуальность развития методов и средств исследования ее состояния для решения экологических проблем. В рамках обозначенной задачи необходимы анализ процессов и прогнозирование последствий распространения загрязняющих веществ в атмосфере [1, 2].

Исследование динамики распространения примесей в атмосфере и изменений ее показателей экспериментально, значительно затруднено в силу сложного характера диффузионного и конвективного массопереноса. Помимо этого определенную сложность вызывает как наблюдение за ходом эксперимента, так и интерпретация полученных данных с целью выявления структуры движения вследствие значительных масштабов объектов исследования и длительности процессов конвекции и диффузии. Известно, что существующие современные методы

экспериментального исследования требуют использования дорогостоящего измерительного оборудования и экспериментальных установок. В тех случаях, когда масштабы возможных техногенных нарушений исключают натурные испытания, а лабораторные исследования в силу ограниченных возможностей обеспечения подобия дают лишь неполную информацию, математическое моделирование и вычислительный эксперимент становятся основными способами изучения процессов переноса вещества в турбулентной атмосфере [1, 2].

Современная вычислительная техника позволяет создавать эффективные вычислительные алгоритмы и комплексы программ для решения указанной задачи [9, 10, 13]. Однако численное моделирование на ЭВМ предъявляет к исследователю серьезные требования, помимо отличной подготовки по вычислительной математике и программированию, он должен хорошо разбираться

в физических особенностях решаемой задачи, а также верно интерпретировать результаты моделирования.

В решении данных задач особое внимание уделяется моделированию с помощью дифференциальных уравнений, так как рассматриваемые процессы протекают как во времени, так и в пространстве. Дифференциальные уравнения описывают динамику процесса переноса примесей в режиме реального времени, однако следует отметить ряд возникающих на пути имитаций с помощью дифференциальных уравнений, трудностей. Во – первых, систематических правил получения самих уравнений не существует, их составление основано на полуэмпирических закономерностях, аналогиях, рассуждениях и навыках моделирующего, о чем уже упомянуто выше. Во – вторых, решаемые задачи имеют большую размерность, что определяет технические трудности. В связи с этим можно утверждать, что реализация описываемых моделей на параллельных компьютерных системах является актуальной научной задачей.

Математическая модель переноса загрязняющих примесей в атмосфере использует уравнения математической физики для установления взаимосвязей между неизвестными функциями, характеризующими исследуемый объект. Уравнения дополняются неравенствами и другими ограничениями, связанными с моделью. Математические вопросы корректности моделей (существование и единственность решения, его устойчивость) являются очень важными, но не всегда решаемыми.

Перенос загрязняющей субстанции  $q$  в пограничном слое атмосферы описывается нестационарным уравнением переноса (с учетом его параметризации) [3, 6, 14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{t}} + \hat{\alpha}(\hat{t}) \cdot \hat{q}(\hat{x}, \hat{t}) + \beta \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{V}(\hat{x}, \hat{t}) \cdot \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})) - \\ - \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \hat{K}(\hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}} \right) = \xi \cdot \hat{S}(\hat{x}, \hat{t}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$q(x, t = 0) = q_0(x), \quad q(x = 0, t) = q_1(t), \quad q(x = X, t) = q_2(t), \quad (2)$$

где  $q(x, t)$  – поле концентрации примесей (загрязняющей субстанции),  $V(x, t)$  – скорость ветра,  $K(x, t)$  – атмосферная турбулентность,  $S(x, t)$  – источник примесей.

В данной работе помимо известных двух итерационных схем решения уравнения

переноса субстанции в турбулентной среде [4, 5] рассматриваются другие формы интегральных уравнений и соответствующие им преобразования интегральной модели [11, 12]. Настоящий метод носит исключительно качественный характер, его основное назначение состоит в разработке методик качественной оценки значений параметров в задачах математического моделирования явления переноса загрязняющей примеси в турбулентной атмосфере.

Уравнение (1) запишем следующим образом:

$$\dot{q} + \alpha q + \beta V'q + \beta Vq' - \theta K'q' - \theta Kq'' = \xi S, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{t}}; \\ q' &= \frac{\partial \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}}; \\ q'' &= \frac{\partial^2 \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}^2}; \\ \hat{\alpha}(\hat{t}) &= \alpha = \text{const}; \\ V' &= \frac{\partial \hat{V}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}}; \\ K' &= \frac{\partial \hat{K}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}}; \\ V &= \hat{V}(\hat{x}, \hat{t}); \\ K &= \hat{K}(\hat{x}, \hat{t}); \\ S &= \hat{S}(\hat{x}, \hat{t}). \end{aligned}$$

В результате последующих преобразований уравнения (3) приходим к параметризованной модели:

$$q'' + \frac{\theta K' - \beta V}{\theta K} q' - \frac{\alpha + \beta V'}{\theta K} q = \frac{\dot{q} - \xi S}{\theta K}, \quad (4)$$



где далее примем следующие обозначения:

$$p_1(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{\theta K' - \beta V}{\theta K},$$

$$p_2(\hat{x}, \hat{t}) = -\frac{\alpha + \beta V'}{\theta K},$$

$$f(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{\dot{q} - \xi S}{\theta K},$$

в соответствии с чем уравнение (4) получим в виде:

$$\ddot{q} + p_1 \dot{q} + p_2 q = f(\hat{x}|\hat{t}). \quad (5)$$

Уравнение (5), как известно [2, 7], представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и имеет аналитическое решение.

Далее в работе выполняется построение вычислительного алгоритма решения уравнения переноса (5) с использованием рекурсивной вычислительной схемы:

$$\tilde{q}_{i,j} = \mu \sum_{k=0}^i \omega_k \tilde{K}_{i,k} q_{k,j} - \mu \sum_{k=0}^i \omega_k \tilde{K}_{i,k} q_{k,j-1} + \varphi_{i,j},$$

$$\varphi_{i,j} = q_{0,j} - \eta \sum_{k=0}^i \omega_k \tilde{K}_{i,k} S_{k,j},$$

$$\mu = \lambda \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

$$\eta = \lambda \xi \Delta x,$$

$$\lambda = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{r_2 - r_1},$$

$$\tilde{K}_{i,k} = e^{r_2(x_i - x_k)} - e^{r_1(x_i - x_k)},$$

$$x_k \leq x_i,$$

$$r_{1,2} = \frac{\beta}{2\theta} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\theta^2} + \frac{\alpha}{\theta}},$$

$$i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}; k = \overline{0, m-1}. \quad (6)$$

Алгоритм вычислительной модели (6) достаточно прост, в то же время, погрешность получаемых с его помощью решений зависит от погрешностей аппроксимации искомого решения и полей исходных данных, а также их производных [8, 15]. В силу указанных обстоятельств далее проводятся численные исследования рекурсивного алгоритма (6) на сходимость и устойчивость получаемых решений. Для проведения вы-

числительного эксперимента, кроме алгоритма, разработано программное обеспечение (в системе Maple) и тестовые задачи [11, 12, 14]. Установлено, что увеличение размерности расчетной сетки приводит к росту погрешности, что хорошо объясняется ростом вычислительных погрешностей, которые несут в себе исходные данные. Так, в случае размерности  $(m \times n) = (15 \times 20)$  погрешность решения составила  $\sigma = 0,0818$ . Анализ результатов вычислительного эксперимента показывает, что, если погрешность в данных экологического мониторинга до 8%, то вычислительный алгоритм (6) сохраняет свойство устойчивости при соответствующем выборе исходных данных.

### Список литературы

1. Наац В.И. Качественная модель оценки концентрации аэрозольных примесей в атмосфере, основанная на интегральном представлении решения уравнения турбулентной диффузии / В.И. Наац, Е.П. Ярцева // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2012. – № 1. – С. 38 – 43.
2. Наац В.И. Математические модели и вычислительный эксперимент в проблеме контроля и прогноза экологического состояния атмосферы / В.И. Наац, И.Э. Наац, Р.А. Рыскаленко, Е.П. Ярцева. – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2016. – 376 с.
3. Наац В.И. Обратные задачи и качественные модели в проблеме мониторинга атмосферы / В.И. Наац, Р.А. Рыскаленко, Е.П. Ярцева. – LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2015. – 405 с.
4. Наац В.И. Построение рекурсивно-итерационного алгоритма для трехмерного нестационарного уравнения переноса примесей в атмосфере / В.И. Наац, Е.П. Ярцева // Вестник Северо – Кавказского федерального университета. – 2014. – № 2 (41). – С. 9 – 14.
5. Наац В.И. Разработка качественной модели и итерационного алгоритма для оценки концентрации загрязняющих примесей в атмосфере / В.И. Наац, Е.П. Ярцева // Вестник Северо – Кавказского федерального университета. – 2013. – № 1 (34). – С. 15 – 21.
6. Наац В.И. Численное исследование рекурсивных и итерационных алгоритмов в задаче моделирования переноса аэрозолей в атмосфере / В.И. Наац, Е.П. Ярцева // Вестник Ставропольского государственного университета. – 2011. – Выпуск 75 [4]. – С. 44 – 50.
7. Наац И.Э. Операторы потенциального типа в задачах прикладного анализа / И.Э. Наац, В.И. Наац, Р.А. Рыскаленко, Е.П. Ярцева // Наука. Инновации. Технологии: Научный журнал Северо-Кавказского федерального университета. – Ставрополь, 2017. – № 3. – С. 43 – 60.
8. Ярцева Е.П. Программа для реализации рекурсивных и итерационных вычислительных алгоритмов для пространственной задачи переноса загрязняющих примесей в турбулентной атмосфере. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014661580. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 31 октября 2014.
9. Ярцева Е.П. Качественная модель оценки концентрации аэрозольных примесей в атмосфере на основе итерационного метода / Е.П. Ярцева // Наука и устойчивое развитие: материалы VII Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых. – Нальчик. – 2013. – С. 176 – 178.
10. Ярцева, Е.П. Построение модульной системы «Математические модели и вычислительные алгоритмы оценки концентрации загрязняющих примесей в турбулентной атмосфере» / Е.П. Ярцева // Наука и образование XXI века: сборник статей Международной научно – практической конференции. – Уфа. – 2014. – Часть 2. – С. 5 – 7.

УДК 519.86:51-77

## ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

**Анастасов И.Г., Мазницин В.В.**

*ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: inf@stgau.ru*

Статистические методы анализа данных достаточно подробно изложены в отечественной литературе. Однако в практике российских предприятий, между тем, используются не все. В статье рассматриваются те методы статистической обработки, которые чаще всего применяются при решении экономических задач поставленных перед предприятием. Одним из экономико-статистических методов, используемым для упорядочения множества показателей, является группировка сведений. Однако на основе такой системы сложно делать выводы о свойствах изделия либо процессах его создания. Использование в таких случаях линейных графиков наглядно показывают изменения наблюдаемых параметров в течение определенного периода: гистограмма, диаграммы разброса. Также в статье указывается тот факт, что наиболее эффективным статистическим методом оценки стабильности и точности оборудования и технологических процессов выступает составление контрольных карт, которые позволяют исследовать факторы, которые обнаруживаются в ходе качественной оценки, в пространстве и динамике. При этом автор в статье указывает на то, что к статистическим методам экономического анализа не относят способы оценки причинно-следственных связей хозяйственных процессов и событий, выявления перспективных и неиспользованных резервов повышения результативности деятельности. Иначе говоря, в число рассмотренных подходов не включаются факторные приемы.

**Ключевые слова:** статистические методы, экономические задачи, группировка сведений, гистограмма, диаграммы разброса, способы оценки причинно-следственных связей хозяйственных процессов и событий

## APPLICATION OF STATISTICAL METHODS IN THE SOLUTION OF ECONOMIC TASKS

**Anastasov I.G., Maznitsin V.V.**

*Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru*

Statistical methods of data analysis are described in sufficient detail in the domestic literature. However, in the practice of Russian enterprises, meanwhile, not all are used. The article deals with those methods of statistical processing, which are most often used in solving economic problems posed to the enterprise. One of the economic and statistical methods used to order a set of indicators is the grouping of information. However, based on such a system it is difficult to draw conclusions about the properties of the product or the processes of its creation. The use of linear graphs in such cases visually shows changes in observed parameters during a certain period: a histogram, scatter diagrams. The article also points out the fact that the most effective statistical method for assessing the stability and accuracy of equipment and technological processes is the development of control charts that allow us to investigate the factors that are revealed in the course of qualitative assessment, in space and dynamics. At the same time, the author points out that statistical methods of economic analysis do not include methods for assessing the cause-effect relationships of economic processes and events, identifying promising and unused reserves to increase the effectiveness of activities. In other words, factorial methods are not included in the number of approaches considered.

**Keywords:** statistical methods, economic problems, information grouping, histogram, scatter diagrams, ways of assessing the cause-effect relationships of economic processes and events

В практике отечественных предприятий распространены в основном статистические методы контроля. Если говорить о регулировании технологического процесса, то оно отмечается очень редко. Применение статистических методов предусматривает тот факт, что на предприятии формируется группа из специалистов, которые имеют соответствующую квалификацию [3, 4].

Выделим основные области, в которых наиболее распространены статистические методы:

– регулирование технологического процесса;

– приемка продукции, в ходе которой используются статистические методы качества;

– исследование стабильности и точности технологических операций;

– расчет надежности и ее испытание [1, 2].

Статистические методы являются базой, обеспечивающей создание продукции с высокими потребительскими характеристиками. Эти приемы широко используются в промышленно развитых государствах. Статистические методы, по сути, гаранты получения потребителями продукции, соответствующей установленным требованиям.

Эффект их использования доказан практикой промышленных предприятий Японии. Именно они способствовали достижению высочайшего производственного уровня в этой стране. Многолетний опыт зарубежных стран показывает насколько эффективны эти приемы. В частности, известно, что компания Hewlett Packard, применяя статистические методы, смогла снизить в одном из случаев количество брака за месяц с 9000 до 45 ед. [7].

В отечественной практике существует ряд препятствий, не позволяющих использовать статистические методы изучения показателей. Сложности возникают из-за:

- отсутствия у большей части специалистов и руководителей предприятий адекватного понимания сущности и значение приемов, важности осмысления, преобразования и использования информации;
- незнания, как самих статистических методов, так и порядка их применения;
- отсутствия у большей части специалистов опыта обработки эмпирической информации;
- недоверия к достоверности полученных результатов;
- отсутствия ясных, удобных для восприятия без привлечения математического аппарата пособий.

Необходимо отметить, что определение потребности в тех или иных статистических методах в сфере качества, выбор, освоение конкретных приемов является довольно сложной и длительной работой для любого отечественного предприятия. Для эффективного ее осуществления целесообразно разработать специальную долговременную программу. В ней следует предусмотреть формирование службы, в задачи которой будет входить организация и методическое руководство применения статистических методов. В рамках программы нужно предусмотреть оснащение соответствующими техническими средствами, обучение специалистов, определить состав производственных задач, которые должны решаться с помощью выбранных приемов. Освоение рекомендуется начать с использования самых простых подходов. Например, можно использовать известные элементарные статистические методы управления производством. Впоследствии целесообразно перейти к другим приемам. Например, это может быть анализ дисперсии, выборочная обработка информации, регулирование процессов, планирование факторного исследования и экспериментов и пр. [5].

К статистическим методам экономического анализа относятся разные приемы. Стоит сказать, их насчитывается довольно много. Однако ведущий специалист в области менеджмента качества в Японии К. Исикава рекомендует использовать семь основных методов:

- диаграммы Парето;
- группировка сведений по общим признакам;
- контрольные карты;
- причинно-следственные диаграммы;
- гистограммы;
- контрольные листки;
- диаграммы разброса.

Руководствуясь собственным опытом в сфере менеджмента, Исикава утверждает, что 95 % всех вопросов и проблем на предприятии можно решить, используя эти семь подходов.

Диаграмма Парето – метод статистических данных, который базируется на определенном соотношении. Оно было названо «принципом Парето». В соответствии с ним, из 20 % причин появляется 80 % следствий. Диаграмма Парето в наглядной и понятной форме показывает относительное влияние каждого обстоятельства на общую проблему в убывающем порядке. Это воздействие можно исследовать на количестве потерь, дефектов, спровоцированных каждой причиной. Относительное влияние иллюстрируется с помощью столбиков, накопленное воздействие факторов посредством кумулятивной прямой. [6]

На причинно-следственной диаграмме исследуемую проблему условно изображают в форме горизонтальной прямой стрелки, а условия и факторы, косвенно либо прямо влияющие на нее, – в виде наклонных. При построении следует учитывать даже незначительные на первый взгляд обстоятельства. Это обуславливается тем, что на практике достаточно часто бывают случаи, в которых решение задачи обеспечивается исключением нескольких, кажущихся незначительными, факторов. Причины, которые влияют на основные обстоятельства (первого и следующих порядков) изображают на диаграмме горизонтальными короткими стрелками. Детализированная схема будет иметь форму скелета рыбы.

Группировка сведений – экономико-статистический метод, используемый для упорядочения множества показателей, которые были получены при оценке и измерении одного или нескольких параметров объекта. Как правило, такая информация пред-

ставлена в форме неупорядоченной последовательности значений. Это могут быть линейные размеры заготовки, температура плавления, твердость материала, количество дефектов и так далее. На основе такой системы сложно делать выводы о свойствах изделия либо процессах его создания. Упорядочивание осуществляется с помощью линейных графиков. Они наглядно показывают изменения наблюдаемых параметров в течение определенного периода.

Контрольный листок, как правило, представлен в виде таблицы распределения частот вхождения измеряемых величин параметров объекта в соответствующие промежутки. Контрольные листки составляются в зависимости от поставленной цели исследования. Диапазон значений показателей разделяется на одинаковые интервалы. Их число выбирают обычно равное квадратному корню из количества выполненных измерений. Бланк должен быть простым, чтобы исключить проблемы при заполнении, прочтении, проверке.

Гистограмма представлена в форме ступенчатого многоугольника. Она наглядно иллюстрирует распределение показателей измерений. Диапазон установленных величин разбивается на равные промежутки, которые откладывают по оси абсцисс. К каждому интервалу строится прямоугольник. Его высота равна частоте вхождения величины в данный промежуток [9].

Диаграммы разброса используются при проверке гипотезы о взаимосвязи двух переменных величин. Модель строится следующим образом: на оси абсцисс откладывают величину одного параметра, ординат – другого показателя. В результате на графике появляется точка. Данные действия повторяются для всех значений переменных. При наличии взаимосвязи поле корреляции вытянуто, а направление не будет совпадать с направлением оси ординат. Если зависимость отсутствует, оно параллельно одной из осей или будет иметь форму круга [4, 10].

Контрольные карты используются при оценке процесса в течение конкретного периода. Формирование контрольных карт базируется на следующих положениях:

- все процессы отклоняются от заданных параметров с течением времени;
- нестабильный ход явления не изменяется случайно. Неслучайными выступают отклонения, выходящие за границы предполагаемых пределов;
- отдельные изменения могут быть спрогнозированы;

– стабильный процесс может случайно отклоняться и в предполагаемых границах.

Необходимо отметить, что отечественный и зарубежный опыт показывает, что наиболее эффективным статистическим методом оценки стабильности и точности оборудования и технологических процессов выступает составление контрольных карт. Этот способ используется также при регулировании производственных операций, исследовании потенциальных возможностей производственных мощностей. При построении карт необходимо правильно выбрать исследуемый параметр. Рекомендуется отдавать предпочтение тем показателям, которые непосредственно относятся к назначению изделия, могут быть легко измерены и на которые можно оказать воздействие посредством регулирования процесса. Если такой выбор затруднителен или не оправдан, можно выполнить оценку величин, коррелированных (взаимосвязанных) с контролируемым параметром.

У каждого типа карт есть своя специфика. Ее необходимо принимать во внимание при их выборе для конкретного случая. Карты по количественному критерию считаются более чувствительными к изменениям процесса, чем те, в которых используется альтернативный признак. Однако при этом первые более трудоемки.

Количественные методы анализа в экономике позволяют исследовать факторы, которые обнаруживаются в ходе качественной оценки, в пространстве и динамике. С их помощью можно выполнять прогнозные расчеты. К статистическим методам экономического анализа не относят способы оценки причинно-следственных связей хозяйственных процессов и событий, выявления перспективных и неиспользованных резервов повышения результативности деятельности. Иначе говоря, в число рассмотренных подходов не включаются факторные приемы.

### Список литературы

1. Бондаренко В.А. Задачи с экономическим содержанием на занятиях по дифференциальному исчислению / В.А. Бондаренко, О.Н. Цыплакова // Актуальные вопросы теории и практики бухгалтерского учета, анализа и аудита: ежегодная 75-я научно-практическая конференция. – 2011. – С. 124–127.
2. Гулай Т.А. Математические методы исследования экономических процессов / Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Мелешко С.В. // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 12–1. – С. 116–117.
3. Гулай Т.А. Прогнозирование в регрессионном анализе при построении статистических моделей экономических задач с помощью программы MICROSOFT EXCEL / Т.А. Гулай, Д.Б. Литвин, С.В. Попова, С.В. Мелешко // Эко-

номика и предпринимательство. – 2017. – № 8–2 (85–2). – С. 688–692.

4. Жукова В.А. Математические методы как средство анализа экономической ситуации предприятий АПК / Жукова В.А., Невидомская И.А. // Экономические и социальные проблемы регионов в условиях развития информационного общества: сборник материалов Международной научно-практической конференции. – 2017. – С. 91–95.

5. Литвин Д.Б. Коррекция динамического диапазона статистических данных / Д.Б. Литвин, Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова // Статистика вчера, сегодня, завтра: Международная научно-практическая конференция, посвященная 155-летию образования Ставропольского губернского комитета статистики, 150-летию образования в России Центрального статистического комитета и Международному году статистики. – 2013. – С. 148–152.

6. Литвин Д.Б. Модель экономического роста с распределенным запаздыванием в инвестиционной сфере / Д.Б. Литвин, Т.А. Гулай, В.А. Жукова, И.И. Мамаев // Вестник АПК Ставрополя. – 2017. – № 2 (26). – С. 225–228.

7. Манько А.И. Математические методы в экономических исследованиях: рабочая тетрадь / А.И. Манько, А.Ф. Долгополова, Т.А. Гулай, С.В. Мелешко. – Ставрополь, 2015.

8. Мамаев И.И. Теория вероятностей и математическая статистика в аграрном вузе / И.И. Мамаев, В.А. Бондаренко, В.П. Шибяев // Финансово-экономические проблемы развития региона и учетно-аналитические аспекты функционирования предпринимательских структур. – 2013. – С. 478–482.

9. Харченко М.А. Направления развития автоматизированных учетно-аналитических систем // Аграрная наука, творчество, рост: Сборник научных трудов по материалам V Международной научно-практической конференции / Отв. за выпуск: Т.А. Башкатова, 2015. – С. 140–144.

10. Харченко М.А. Механизм прогнозирования финансовых результатов // Аграрная наука, творчество, рост: Сборник научных трудов по материалам VII Международной научно-практической конференции, 2017. – С. 264–269.



УДК 519.1:004

## ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ В ПРОГРАММИРОВАНИИ

**Андреев И.В.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: inf@stgau.ru*

С использованием основных методов и понятий дискретной математики и математической логики проведены несколько типовых расчётов по корректности алгоритмов и процессов, написанных на языке программирования Pascal (структурированный и компилируемый язык программирования, является базой для многих других известных языков программирования), разобраны принцип и работа экспертной системы с использованием множеств и предикатов. С помощью логики высказываний описаны базовые алгоритмы решения и проверки задач, которые представлены перед программистом при проверке корректности программы и отдельных её частей, с использованием предикатов (функция с областью значений  $\{0;1\}$ , определённая  $n$ -й декартовой степени множества  $M$ ) и составлении экспертной системы создана простая база данных (знаний) для получения информации из базы данных о британских королях и королевах и объяснены основные понятия математической логики и дискретной математики, которые применяются в ней.

**Ключевые слова:** программирование, дискретная математика, теория множеств, экспертная система

## APPLICATION OF DISCRETE MATHEMATICS IN PROGRAMMING

**Andreev I.V.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru*

Using the basic methods and concepts of discrete mathematics and mathematical logic, several typical calculations on the correctness of algorithms and processes written in the programming language Pascal (structured and compiled programming language, is the basis for many other known programming languages), the principle and work of the expert system with the use of sets and predicates. With the help of sentence logic, the basic algorithms for solving and testing tasks are described, which are presented to the programmer when checking the correctness of the program and its individual parts, using predicates (a function with the range  $\{0;1\}$  defined by the  $n$ -th Cartesian power of the set  $M$ ) and compiling expert system created a simple database (knowledge) to obtain information from the database of British kings and queens and explained the basic concepts of mathematical logic and discrete mathematics that are applied in it.

**Keywords:** programming, discrete mathematics, set theory, expert system

Дискретная математика и математическая логика — основа любого изучения информационных систем. В настоящий момент основы фундаментальной математической подготовки специалистов в области информатики, программирования и компьютерных наук описаны достаточно понятно: фундаментальные разделы математики, имеющие прикладную направленность на информатику, программирование и компьютеры, сосредоточены в курсах «Математическая логика», «Дискретная математика» и «Теория алгоритмов», являющиеся результатом алгоритмизации знаний, накопленных математикой [1, 3].

Бурное развитие дискретной математики обусловлено прогрессом компьютерной техники, необходимостью создания средств обработки и передачи информации, а также представления различных моделей на компьютерах, являющихся по своей природе конечными структурами. Большинство задач исследования операций (распределение ресурсов, сетевое планирование и управление, календарное планирование) описываются математическими моделями дискретного программирования [2, 9].

Умение логически понимать и решать задачу, которая будет поставлена перед любым программистом (независимо от языка программирования) является основополагающей, без логики невозможно полноценно и правильно решить задачу. Корректной можно считать только ту программу, которая исполняет функции, указанные в её технической спецификации, однако результат на уровне тестирования может кардинально отличаться в условиях реальной работы, поэтому необходимо проверить корректность алгоритма: нужно проверить изменения переменных программы, которые оно используется на всех этапах работы алгоритма (до, во время работы и после). Данные изменения будут рассматриваться как предикаты.

Пусть  $P$  — предикат, верный для входных значений алгоритма  $A$ , а  $Q$  — предикат, содержащий условия, которые удовлетворяют выходные значения. Высказывание  $\{P\} A \{Q\}$  означает следующее: «если алгоритм  $A$  начинается с корректного значения  $P$ , то она закончится при истинном значении  $Q$ ». Предикат  $P$  называется предусловием,  $Q$  — постусловием. Высказывание  $\{P\} A \{Q\}$  тоже

предикат, поэтому доказательство алгоритма  $A$  равносильно доказательству верности  $\{P\} A \{Q\}$ . Основываясь на этом, можно доказать правильность алгоритма «Квадратный многочлен» на языке Pascal:

Текст программы:

$\{x$  – вещественное число}

Begin

$y := ax;$

$y := (y + b) \cdot x;$

$y := y + c;$  End

Поделим алгоритм на части и зафиксируем обозначения пред- и постусловий.

$P \rightarrow \{x = x_1\}$

begin

$y := ax;$

$Q_1 \rightarrow \{y = ax_1 \text{ и } x = x_1\}$

$y := (y + b) \cdot x;$

$Q_2 \rightarrow \{y = ax_1^2 + bx_1\}$

$y := y + c;$

$Q \rightarrow \{y = ax_1^2 + bx_1 + c\}$

Подстановки показывают, что высказывания:

$\{P\} y := ax \{Q_1\},$

$\{Q_1\} y := (y + b) \cdot x \{Q_2\}$

$\{Q_2\} y := y + c \{Q\}$

верны.

Таким образом, предикат

$\{Q\}$  Квадратный многочлен  $\{P\}$

верен. Таким образом, алгоритм «Квадратный многочлен» корректен.

Алгоритм условных высказываний тоже поддается такому доказательству, необходимо только отразить альтернативные пути в алгоритме [6].

Предположим, что высказывание

if условие then

высказывание 1;

else

высказывание 2;

вводит предусловие  $P$  и в конце даёт условие  $Q$ . Поэтому необходимо доказать истинность двух предикатов:

$\{P \text{ и условие}\} \text{высказывание 1} \{Q\}$

и  $\{P \text{ и не (условие)}\} \text{высказывание 2} \{Q\}$ .

Теория множеств используется для наиболее удобного описания массы концепций в информатике. Одним из примеров применения теории множества в программировании является база данных. Возьмём за пример экспертную систему [10].

Экспертная система создаётся с целью подмены собой специалистов в данной области. Реализуется это благодаря накоплению базы знаний известных событий с определением набора правил вывода, из-за чего ответы на запросы могут быть выведены логическим путём из базы знаний.

Создадим экспертную систему под названием «Королевская династия Англии». Для начала подготовим список фактов, используя предикаты «родитель» и «жена».

Родитель (Георг I, Георг II) жена (София, Георг I)

Родитель (Георг III, Георг IV) жена (Вильгельмина, Георг II)

Родитель (Георг III, Вильгельм IV) жена (Шарлотта, Георг III)

Родитель (Георг III, Эдвард) жена (Каролина, Георг IV)

Родитель (Эдвард, Виктория) жена (Аделаида, Вильгельм IV)

Родитель (Виктория, Эдвард VII) жена (Виктория, Альберт)

Родитель (Эдвард VII, Георг V) жена (Александра, Эдвард VII)

Родитель (Георг V, Эдвард VIII) жена (Виктория Мари, Георг V)

Родитель (Георг V, Георг VI) жена (Елизавета, Георг VI)

Родитель (Георг V, Елизавета II) жена (Елизавета II, Филипп)

Родитель (Виктория, Элис)

Родитель (Элис, Виктория Альберта)

Родитель (Виктория Альберта, Филипп)

Родитель  $(x, y)$  означает, что  $x$  является родителем  $y$ , а жена  $(x, y)$  означает, что  $x$  – жена  $y$ . Это стандартное чтение предикатов, используемых языками программирования, как, например, PROLOG [4].

Для извлечения информации необходимо отправлять запросы в базу данных. Пример: «является ли Георг I отцом Георга III?», то ответ будет отрицательным, поскольку предикат родитель (Георг I, Георг III) не существует в списке. Формат запроса зависит от языка программирования, который поддерживает та или иная база данных. Таким образом, использование баз данных в работе помогает упорядочить информацию и наиболее эффективно работать с ней. Запросы формируются по принципу: «? – предикат». При этом подразумевается наличие переменной в предикате, которое будет равносильно вопросу о существовании того или иного элемента [7].

Сформулируем правило вывода для получения информации о матерях из системы. Необходимо обозначить правило мать( $x$ ) так, чтобы положительный ответ на этот запрос формировался только в том случае, если  $x$  – жена чьего-то родителя или  $x$  – женщина и родитель. Правило такого вывода определяется таким образом:

$$\text{мать}(x) \text{ from (или } \left[ \begin{array}{l} \text{жена}(x, y) \text{ и} \\ \text{родитель}(z, y) \end{array} \right] \text{ и } \left[ \begin{array}{l} \text{женщина}(x) \text{ и} \\ \text{родитель}(x, y) \end{array} \right])$$

Но данное правило вывода не найдёт всех матерей из-за того, что база данных не полная – в ней не записаны, например, дети Елизаветы Второй. Полученный результат показывает трудности, возникающие при попытках ограничения реального мира рамками математической модели [5, 8].

#### Список литературы

1. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н., Родина Е.В. Использование компьютерных математических систем в обучении математике // Информационные системы и технологии как фактор развития экономики региона: сб. научных статей по материалам Международной НПК. – Ставрополь: АГРУС Ставропольского ГАУ, 2013. – С. 46–50.

2. Долгих Е.В., Тынянко Н.Н. Теоретические экономико-математические модели // Современные проблемы развития экономики и социальной сферы: сборник материалов Международной научно-практической конференции, посвященной 75-летию Ставропольского государственного аграрного университета / Отв. редактор: Н.В. Кулиш, 2005. – С. 553–556.

3. Шелковой А.Н., Ююкин Н. А. Дискретная математика для экономистов, 2014.

4. Зепнова Н.Н., Кузьмин О.В. Применение методов дискретной математики при решении логических задач // Омский научный вестник. – 2014. – № 2 (130). – С. 14–17.

5. Попова С.В. Формирование алгоритмической культуры у студентов на занятиях по математике // Экономика регионов России: анализ современного состояния и перспективы развития: Сборник научных трудов по материалам ежегодной 68-й научно-практической конференции / Ответственный редактор Н.В. Кулиш, 2004. – С. 423–426.

6. Попова С.В., Колодяжная Т.А. Применение алгоритмов при обучении математике в вузе // Моделирование производственных процессов и развитие информационных систем / Даугавпилсский университет, Латвия, Европейский Союз Белорусский государственный университет, Беларусь Днепрпетровский университет экономики и права, Украина Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет Северо-Кавказский государственный технический университет Ставропольский государственный университет Ставропольский государственный аграрный университет. – Ставрополь, 2011. – С. 278–281.

7. Попова С.В., Смирнова Н.Б. Элементы алгоритмизации в процессе обучения математике в высшей школе // Современные проблемы развития экономики и социальной сферы: сборник материалов Международной научно-практической конференции, посвященной 75-летию Ставропольского государственного аграрного университета / Ответственный редактор: Н.В. Кулиш, 2005. – С. 526–531.

8. Смирнова Н.Б., Попова С.В. Основные принципы проектирования компьютерной математической модели // Сборник научных трудов по материалам Ежегодной 69-й научно-практической конференции, посвященной 75-летию СтГАУ / Ответственный редактор: Н.В. Кулиш, 2005. – С. 185–189.

9. Смирнова Н.Б., Попова С.В. Модели, подходы к классификации моделей // Экономика регионов России: анализ современного состояния и перспективы развития: сборник научных трудов по материалам Ежегодной 69-й научно-практической конференции, посвященной 75-летию СтГАУ / Ответственный редактор: Н.В. Кулиш, 2005. – С. 181–185.

10. Смирнова Н.Б., Попова С.В., Хачатурян Р.Е. Использование логической символики при обучении математике в вузе // Совершенствование информационных и коммуникационных технологий с целью активизации учебного процесса в вузе. – Ставрополь, 2006. – С. 191–195.

УДК 512.12

**ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ СХОДИМОСТЬ****Арзуманян А.Г., Рамазанов Х.М.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет»,  
Ставрополь, e-mail: arzumanyan1998@mail.ru*

В данной статье будут описаны некоторые приемы и методы для того, чтобы найти и вычислить пределы числовых последовательностей и функций. В статье дается четкое определение числовой последовательности, после чего наглядно рассматривается на примерах. Также проведен анализ элементов последовательности и выяснен общий вид элементов последовательности. Доказано, что число один является пределом последовательности, что означает указать закон, по которому, выбрав произвольное  $\varepsilon$ , можно найти номер, начиная с которого элементы последовательности будут лежать в  $\varepsilon$ -окрестности этого числа. Выражение которое мы получили в данной статье, является искомым законом, по которому, выбрав произвольное  $\varepsilon$ , можно найти номер начиная с которого элементы последовательности будут лежать в  $\varepsilon$  окрестности этого числа.

**Ключевые слова:** числовая последовательность, комплексные числа, действительные числа, предел числовой последовательности, элементы последовательности

**NUMERICAL SEQUENCES AND THEIR CONVERGENCE****Arzumanyan A.G., Ramazanov K.M.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: iarzumanyan1998@mail.ru*

In this article some techniques and methods will be described in order to find and calculate the limits of numerical sequences and functions. In the article we give a clear definition of the numerical sequence, after which we clearly see by examples. We will also analyze the elements of the sequence and find out the general view of the elements of the sequence. Let us prove that the number one is the limit of a sequence, which means to indicate the law by which, by choosing an arbitrary one  $\varepsilon$ , one can find the number starting from which the elements of the sequence lie in the  $\varepsilon$  neighborhood of this number. The expression that we obtained in this article is the desired law, by which, by choosing an arbitrary one  $\varepsilon$ , one can find the number that is the least from which the elements of the sequence lie in the  $\varepsilon$  neighborhood of this number.

**Keywords:** numerical sequence, complex numbers, real numbers, limit of a numerical sequence, elements of a sequence

Числовой последовательностью называется такое множество чисел действительных и комплексных, для которых задано взаимно однозначное соответствие со множеством натуральных чисел [4,9].

**Примеры и обозначения.** Множество чисел:  $1, 4, -5, 3, 5, \dots$  можно рассматривать как числовую последовательность, если пронумеровать элементы этого множества, например

$$x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = -5, x_4 = 3, x_5 = 5, \dots$$

Все множество обозначается:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

В рассмотренном выше примере множество – просто набор цифр «с потолка». В математическом анализе, как правило, работают с такими последовательностями, в которых можно задать общий член последовательности, т.е. закон, по которому, зная номер элемента, можно вычислить сам элемент [5,10].

**Рассмотрим пример.** Пусть известны первые несколько членов последовательности

$$\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{8}; -\frac{1}{16}, \dots$$

Выяснить вид общего члена этой последовательности.

**Решение.** Проведем анализ имеющихся элементов:

а) элементы представляют собой дробь, т.е. общий вид будет

$$x_n = \frac{a}{b};$$

б) в числителе всех элементов стоит 1, т.е. общий вид будет

$$x_n = \frac{1}{b};$$

в) знаки чередуются начиная с «+», т.е. общий вид будет

$$x_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{b};$$

г) в знаменателях стоят степени двойки, начиная с первой, т.е. общий вид будет

$$x_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}.$$

Для точности результата сделаем проверку. Вычислим третий элемент последовательности

$$x_n = (-1)^{3+1} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

**Вывод.** Общий вид элементов последовательности:

$$x_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n},$$

где  $n \in N$ .

Элементы числовой последовательности действительных чисел удобно изображать на числовой прямой, при этом они могут быть расположены на ней хаотично (не подчинено никакому закону или правилу) или упорядоченно [1, 7].

Они могут стремиться к какому-то числу. Т.е. с возрастанием номера элемент становится все ближе и ближе к какому-то числу.

**Определение.** Число  $A$  называется пределом числовой последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , зависящий от  $\varepsilon$ , что, начиная с этого номера все элементы последовательности удалены от  $A$  не более чем на  $\varepsilon$  (принадлежат  $\varepsilon$ -окрестности числа  $A$ ). И обозначается  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  [2, 6].

Замечание. В математике общепринятыми считаются обозначения:

1)  $\forall$ , заменяет словосочетание «для любого».

2)  $\exists$ , заменяет слово «существует».

**Пример.** Доказать, что пределом последовательности

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

при стремлении  $n$  к бесконечности является

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

**Доказательство.** Доказать, что число является пределом последовательности, что означает указать закон, по которому, выбрав произвольное  $\varepsilon$ , можно найти номер, начиная с которого элементы последовательности в  $\varepsilon$  окрестности этого числа.

Итак, требуется выполнение неравенства

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

Подставим выражение для общего члена последовательности и значение предела из условия этой задачи

$$\left| \frac{n}{n+1} \right| < \varepsilon;$$

$$\left| \frac{n-n-1}{n+1} \right| < \varepsilon;$$

$$\left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon.$$

Т.к.  $n \in N$  (т.е. положительное), то можно раскрыть модуль

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Выразим  $n$  из полученного неравенства:

$$1 < \varepsilon(n+1);$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+1;$$

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon};$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1;$$

Следующее мы правим

$$N = \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Полученное выражение и есть искомым закон, по которому, выбрав произвольное  $\varepsilon$ , можно найти номер, начиная с которого элементы последовательности будут лежать в  $\varepsilon$ -окрестности этого числа [3].

Теперь подробнее:

а) выбираем произвольное  $\varepsilon$ .

б) подставляем его в выражение

$$N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

и находим значение  $N$ .

в) для любого  $n > N$  будет верно неравенство

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

потому, что правая часть неравенства

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

и есть значение, которому присвоено  $N$ .

г) а неравенство  $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$  равносильно неравенству



$$\left| \frac{n - n - 1}{n + 1} \right| < \varepsilon$$

(это оно же, только преобразованное), т.е. для любого числа  $\varepsilon$  можно указать такой номер  $N$ , что, начиная с этого номера, все элементы последовательности удалены от 1 не более чем на  $\varepsilon$ , а значит 1 является пределом последовательности [8].

**Пример.** Известно, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Требуется найти  $N$  для

$$\varepsilon = 0,1; \varepsilon = 0,01; \varepsilon = 0,001.$$

**Решение.** В предыдущем примере была найдена функциональная зависимость между  $N$  и  $\varepsilon$ :

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

$$a) \varepsilon = 0,1,$$

$$N(0,1) = \frac{1}{0,1} - 1 = 10 - 1 = 9,$$

т.е., начиная с 10-го номера все элементы последовательности отстоят от 1 не более, чем на 0,1.

То есть начиная с 100-го номера все элементы последовательности отстоят от 1 не более, чем на 0,01.

$$b) \varepsilon = 0,001$$

$$N(0,001) = \frac{1}{0,001} - 1 = 1000 - 1 = 999,$$

т.е., начиная с 1000-го номера все элементы последовательности отстоят от 1 не более, чем на 0,001.

**Вывод:** при проведении анализа элементов последовательности мы выяснили

общий вид элементов последовательности, и доказали, что для любого числа  $\varepsilon$  можно указать такой номер  $N$ , что, начиная с этого номера, все элементы последовательности удалены от 1 не более чем на  $\varepsilon$ , а значит, 1 является пределом последовательности.

### Список литературы

1. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Некоторые аспекты интегрированного подхода изучения математического анализа / Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона: ежегодная 76-я научно-практическая конференция Ставропольского государственного аграрного университета «Аграрная наука – Северо-Кавказскому региону». – 2012. – С. 280–283.
2. Бондаренко Д.В., Бражнев С.М., Литвин Д.Б., Варнавский А.А. Метод повышения точности измерения векторных величин // Наука Парк. – 2013. № 6 (16). – С. 66–69.
3. Гулай Т.А., Литвин Д.Б., Попова С.В., Мелешко С.В. Прогнозирование в регрессионном анализе при построении статистических моделей экономических задач с помощью программы Microsoft excel. // Экономика и предпринимательство. – 2017. № 8–2 (85–2). – С. 688–692.
4. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Финансовая математика в инвестиционном проектировании (учебное пособие) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 8–2. – С. 178–179.
5. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Совершенствование экономических механизмов для решения проблем экологической безопасности. // Информационные системы и технологии как фактор развития экономики региона. II Международная научно-практическая конференция. – 2013. – С. 68–71.
6. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Жукова В.А., Мамаев И.И. Модель экономического роста с распределенным запаздыванием в инвестиционной сфере // Вестник АПК Ставрополя. – 2017. – № 2 (26). – С. 225–228.
7. Литвин Д.Б., Шепеть И.П. Моделирование роста производства с учетом инвестиций и выбытием фондов // Социально-экономические и информационные проблемы устойчивого развития региона: Международная научно-практическая конференция. – 2015. – С. 114–116.
8. Литвин Д.Б., Шепеть И.П., Бондарев В.Г., Литвина Е.Д. Применение дифференциального исчисления функций нескольких переменных к разработке алгоритма определения координат объекта // Финансово-экономические и учетно-аналитические проблемы развития региона: Материалы Ежегодной 78-й научно-практической конференции, 2014. – С. 242–246.
9. Роговая Н.А., Шайтор А.К., Литвин Д.Б. Качество образования и один из путей его повышения // Инновационные направления развития в образовании, экономике, технике и технологиях. Международная научно-практическая конференция: сборник статей в 2 ч. / под общей редю В.Е. Жидкова, 2014. – С. 169–173.

УДК 51–75

**ЗАДАЧА ДИСКОНТИРОВАНИЯ****Асфендиярова О.З., Исмаилова Д.М.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: inf@stgau.ru*

Данная статья посвящена изучению задач дисконтирования. Дисконтирование – это финансовый расчет, который позволяет нам оценить сегодняшнюю стоимость ожидаемых будущих денежных потоков. Дисконтирование – это процесс определения текущей стоимости денег, когда будущая стоимость их известна. Оно применяется для оценки денежных поступлений с позиции текущего момента. В этой статье раскрывается смысл дисконтирования, а также рассматриваются такие понятия как: дисконтированная стоимость, механизм дисконтирования, коэффициент дисконтирования, формулы дисконтирования, приводятся явные примеры, которые раскрывают всю сущность решения задач дисконтирования. Сама операция дисконтирования и ее ставка на данный момент занимают особое место в процедуре оценки денежных потоков. Во многих своих разделах финансовая математика опирается на задачи дисконтирования, которая позволяет оценить сегодняшнюю стоимость, ожидаемых будущих денежных потоков. Дисконтирование основывается на крылатой формуле «время-деньги».

**Ключевые слова:** дисконтирование, дисконтированная стоимость, коэффициент дисконтирования, механизм дисконтирования

**THE PROBLEM OF DISCOUNTING****Asfendyarova O.Z., Ismailova D.M.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru*

This article is devoted to the study tasks of discounting. Discounting is a financial calculation that allows us to estimate the present value of expected future cash flows. Discounting is the process of determining the present value of money future value of them are known. It is used to evaluate the cash flow from the position of the moment. This article reveals the meaning of discounting and discusses such concepts as present value, the mechanism of discounting, the discount factor formula discounting, are clear examples that reveal the essence of the decision of tasks of discounting. The operation itself and its discount rate at this time occupy a special place in the evaluation of cash flows. In many sections of its financial mathematics relies on the objectives of discounting, which allows to estimate the present value of expected future cash flows. Discounting is based on the pithy formula «time-money».

**Keywords:** discounting, present value, discount factor, the mechanism of discounting

**Дисконтирование** – это финансовый расчёт, позволяющий оценить сегодняшнюю стоимость ожидаемых будущих денежных потоков. Это попытка выразить завтрашние деньги в сегодняшнем эквиваленте [5].

Фактически дисконтирование представляет собой процесс приведение будущих денежных масс к их эквиваленту в настоящем.

Не правда ли, в слове дисконтирование слышится слово «дисконт» или по-русски скидка? И вправду, присмотревшись в этимологию слова discount, то уже в 17 веке оно использовалось в значении deduction for early payment, что означает скидка за раннюю оплату. Уже в то время людьми отмечалась временная стоимость денег. Следовательно, допускается еще один вариант определения дисконтирования, как расчет скидки за быструю оплату счетов. Эта «скидка» и является мерилем временной стоимости денег или time value of money [8].

Дисконтированная стоимость – это текущая стоимость будущего денежного потока. Ее еще называют приведенной стоимостью, от глагола «приводить». Иначе говоря, приведенная стоимость – это сумма будущей

денежной массы, приведенная к настоящему моменту [7].

Для вычисления приведенной к настоящему моменту ценности будущих денежных масс пользуются дисконтированием. При этом берутся будущие количества денег и приводятся назад к значению на настоящий день путем их уменьшения с каждым отчетным периодом проекта [1].

Дисконтирование служит важнейшим механизмом, позволяющим представлять финансовое положение хозяйствующего субъекта актуально достоверным.

Приведем пример, возьмем два условных проекта. Эти два проекта требуют начальных инвестиций в размере 500 рублей, а другие затраты отсутствуют. В течение трех лет инвестор получает в конце года доход в размере 500 рублей при реализации проекта «А». А при реализации проекта «Б» он получает доход в конце первого и в конце второго года по 300 рублей, а в конце третьего года – 1100 руб. Он должен выбрать один из этих проектов.

Допустим, что инвестор определил ставку дисконтирования на уровне 25 % годовых. Текущая стоимость (NPV) проектов

«А» и «Б» рассчитывается следующим образом:

$$NPV(A) = [500: (1 + 0,25)^1 + 500: (1 + 0,25)^2 + 500: (1 + 0,25)^3] - 500 = 476 \text{ рублей};$$

$$NPV(B) = [300: (1 + 0,25)^1 + 300: (1 + 0,25)^2 + 1100: (1 + 0,25)^3] - 500 = 495,2 \text{ рублей}.$$

где  $P_k$  – это денежные потоки за период с первого по последующие годы;  $r = 25\%$  – это ставка дисконтирования;  $I = 500$  – это начальные инвестиции.

Следовательно, он выберет проект «Б». Хотя если инвестор установит ставку дисконтирования, например, которая будет равна 35% годовых, то в этом случае текущие стоимости проектов «А» и «Б» будут равны 347,9 и 333,9 рублей соответственно. В данной ситуации для инвестора проект «А» является наиболее выгодным.

Смысл дисконтирования заключается в том, что текущая цена будущих денежных масс ввиду объективных причин может кардинально отличаться от их номинальной цены. Теория цены средств гласит, что одна и та же сумма, которую мы выплачиваем в разные моменты времени, имеет разную цену по следующим двум причинам [3]:

- 1) риск неполучения;
- 2) возможность других инвестиций.

Приведем пример, если организация получила активы по обычной стоимости, но договорилась о значительной отсрочке платежа, то она фактически получила активы дешевле обычного. Но если организация воплотила актив со значительной отсрочкой оплаты, то дебиторская задолженность отражается не по ее номинальной цене, а по текущей, дисконтированной, а разница влияет на результаты денежных характеристик. Благодаря учету влияния на денежные характеристики временной цены средств увеличивается сравнимость денежной отчетности, и она представляет больше способностей для осуществления финансового анализа.

Для дисконтирования денежных масс существует математическая формула:

$$PV = FV \cdot 1/(1+R)^n.$$

В данной формуле дисконтирования:

Future value (FV) – будущая стоимость, Present value (PV) – текущая (дисконтированная/приведенная) стоимость,  $R$  – ставка процента (норма доходности, требуемая ин-

вестором),  $N$  – число лет от даты в будущем до текущего момента,

Коэффициент, на который умножается будущая стоимость  $1/(1+R)^n$  называется – фактором дисконтирования, т.е. «коэффициент, множитель» [4].

Коэффициент дисконтирования  $1/(1+R)^n$ , как мы видим из самой формулы, зависит от ставки процента и от количества периодов времени. Чтобы не вычислять его каждый раз по формуле дисконтирования, пользуются таблицей, которая показывает значения коэффициента в зависимости от процентной ставки и количества периодов времени. Иногда она называется «таблица дисконтирования», хотя этот термин не совсем корректен [2].

Ставка дисконтирования – это процентная ставка, которая используется для того чтобы переоценить стоимость будущего капитала на текущий момент. Это делается из-за того, что одним из фундаментальных законом экономики является постоянное обесценивание ценности (покупательной способности, стоимости) денег. Ставка дисконтирования используется в инвестиционном анализе, когда инвестор решает о перспективе вложения в тот или иной объект. Для этого он будущую стоимость объекта инвестирования приводит к настоящей. Проводя анализ сопоставления, он может принять решение о привлекательности объекта. Любая ценность объекта всегда относительна, поэтому ставка дисконтирования выступает тем самым базовым критерием, с которым производят сравнение эффективности вложения [6].

Механизм дисконтирования необходим для того, чтобы инвесторы имели возможность сопоставлять различные денежные потоки между собой при выборе альтернативных инвестиционных вариантов. Чтобы вложить деньги в инвестпроект, инвестор должен получать на него процент ( $R$  в формуле) не ниже требуемого им уровня. Уровень требуемого дохода зависит от риска этого проекта, инфляции, потенциальной упущенной выгодой, связанной с ожиданием и т.д. [9].

К примеру, у инвестора есть три одинаковых по риску инвестиционных проектов, для которых требуемая инвестором доходность составляет 10% годовых – проект 1, проект 2 и проект 3.

Проект 1 принесет 100 рублей сегодня, Проект 2 – 110 рублей через год, а проект 3 – 121 рубль через 2 года.

Какой из вариантов наиболее выгодный? Действительно ли большая сумма выгод-

нее? Но ведь она лишь только через 2 года будет получена, а за это время много, что может произойти. Или же, лучше 100 получить сейчас?

В случае, когда мы используем значения из этого примера и подставим в математическую формулу, которая приведена была выше, то мы увидим, что все эти три проекта эквивалентны. Выразаясь по-другому, для инвесторов 100 рублей сегодня равны 110 руб. через 1 год, и равны 121 руб. через 2 года. В этом и есть основная задача дисконтирования – узнать, сколько стоит для инвестора некая сумма в будущем в деньгах настоящих. Дисконтирование основывается на крылатой формуле «время – деньги». Если задуматься, то эта фраза имеет очень глубокий смысл. Посадите яблоню сегодня, и через несколько лет ваша яблоня вырастет, и вы будете собирать яблоки в течение многих лет. А если сегодня вы не посадите яблоню, то в будущем яблок вы так и не попробуете.

#### Список литературы

1. Litvin D.B., Popova S.V., Zhukova V.A., Putrenok E.L., Narozhnaya G.A. Monitoring of the parameters of intra-industrial differentiation of the primary industry of the traditionally industrial region of southern Russia // Journal of Advanced Research in Law and Economics. – 2015. – Т. 6; № 3. – С. 606–615
2. Бондаренко Д.В., Бражнев С.М., Литвин Д.Б., Варнавский А.А. Метод повышения точности измерения векторных величин // Наука Парк. – 2013. – № 6 (16). – С. 66–69.
3. Гулай Т.А., Литвин Д.Б., Попова С.В., Мелешко С.В. Прогнозирование в регрессионном анализе при построении статистических моделей экономических задач с помощью программы Microsoft excel. // Экономика и предпринимательство. – 2017. – № 8–2 (85–2). – С. 688–692.
4. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Финансовая математика в инвестиционном проектировании (учебное пособие). // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 8–2. – С. 178–179.
5. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Совершенствование экономических механизмов для решения проблем экологической безопасности. // Информационные системы и технологии как фактор развития экономики региона. II Международная научно-практическая конференция. – 2013. – С. 68–71.
6. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Жукова В.А., Мамаев И.И. Модель экономического роста с распределенным запаздыванием в инвестиционной сфере. // Вестник АПК Ставрополя. – 2017. – № 2 (26). – С. 225–228.
7. Литвин Д.Б., Шепеть И.П. Моделирование роста производства с учетом инвестиций и выбытием фондов // Социально-экономические и информационные проблемы устойчивого развития региона: Международная научно-практическая конференция, 2015. – С. 114–116.
8. Литвин Д.Б., Шепеть И.П., Бондарев В.Г., Литвина Е.Д. Применение дифференциального исчисления функций нескольких переменных к разработке алгоритма определения координат объекта. // Финансово-экономические и учетно-аналитические проблемы развития региона: Материалы Ежегодной 78-й научно-практической конференции, 2014. – С. 242–246.
9. Роговая Н.А., Шайтор А.К., Литвин Д.Б. Качество образования и один из путей его повышения. // Инновационные направления развития в образовании, экономике, технике и технологиях. Международная научно-практическая конференция: сборник статей в 2 частях / под общ. ред. В.Е. Жидкова. – 2014. – С. 169–173.

УДК 536.242

**ГИДРОСТАТИКА МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНЫ. ЭКСПЕРИМЕНТ И ТЕОРИЯ****Бавинов М.А., Милоstивая В.В., Гришанина О.А.,  
Симоновский А.Я.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: inf@stgau.ru, vika.milostivaya@yandex.ru*

Экспериментально и теоретически изучены равновесные формы свободной поверхности магнитной жидкости вблизи поверхности ферромагнитной пластины, помещенной в однородное внешнее магнитное поле. Показано, что распределение магнитной жидкости вблизи пластины зависит от соотношения размеров поперечного сечения пластины, а также соотношения объема магнитной жидкости, окружающей пластину, к объему самой пластины. Вблизи центральной части «короткой» пластины в объеме магнитной жидкости образуются две конусообразные полости по обе стороны пластины. Вблизи торцов «длинной» пластины образуются по две конусообразные полости по обе стороны каждого торца пластины. Распределение свободной поверхности магнитной жидкости вблизи «длинной» пластины, с выполненным вдоль ее вертикальной оси симметрии отверстием, превращающим пластину в составную из двух «коротких» таково – вблизи поверхности этой пластины в объеме магнитной жидкости формируются уже восемь воздушных полостей. Образование описанных полостей наблюдаемых в экспериментах моделировалось математическими методами теории функций комплексного переменного.

**Ключевые слова:** магнитная жидкость, гидростатика, гидродинамика, математическая модель**HYDROSTATICS OF THE MAGNETIC LIQUID NEAR THE SURFACE OF THE PLATE. EXPERIMENT AND THEORY****Bavinov M.A., Milostivaya V.V., Grishanina O.A.,  
Simonovsky A.Y.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru,  
vika.milostivaya@yandex.ru*

The equilibrium forms of magnetic fluid free surface near ferromagnetic plate surface in uniform external magnetic field are studied experimentally and theoretically. It is shown that the distribution of the magnetic fluid near the plate depends on the cross section ratio dimensions of the plate and also the ratio of the magnetic fluid volume surrounding the plate to the volume of the plate. Two cone-shaped cavities are formed in magnetic fluid near the central part of the «short» plate on both sides of the plate. Two conical cavities are formed on both sides of the plate near the ends of the «long» plate. The distribution of the magnetic fluid surface near the «long» plate with the hole along its vertical axis of symmetry turning the plate into a composite of two «short» ones, is so that eight air cavities are formed in magnetic fluid near the plate surface. The formation of the described cavities observed in experiments was modeled by complex functions method.

**Keywords:** magnetic fluid, hydrostatics, hydrodynamics, mathematical model

Ферромагнитная пластина устанавливалась вертикально в немагнитной цилиндрической кювете в полюса электромагнита. К поверхности пластины при включенном магнитном поле подавались последовательно увеличивающиеся порции магнитной жидкости. Равновесные формы свободной поверхности магнитной жидкости регистрировались фотокамерой. Намагниченность насыщения магнитной жидкости составляла 20,4 кА/м. Равновесные конфигурации свободной поверхности магнитной жидкости изучались в зависимости от соотношения размеров пластины, величины прикладываемого магнитного поля и для различной ориентации пластины по отношению к направлению внешнего магнитного поля.

Для изучения изменений в поведении магнитной жидкости вблизи поверхности

пластины при изменении размеров пластины проводили следующий эксперимент. Были изготовлены образцы пластин с одинаковой толщиной, высотой, но различной длины. Толщина  $t$  пластин составляла 3 мм, высота  $h$  равнялась 15 мм. Длина  $L$  пластины изменялась в следующих пределах: от длины  $L$ , равной толщине пластины, до размеров, когда отношение длины пластины к толщине было гораздо более одного порядка. Показано, что характер распределения магнитной жидкости вблизи поверхности пластины существенно зависит от соотношения размеров пластины. На рис.1 представлена характерная картина распределения свободной поверхности магнитной жидкости вблизи поверхности пластины с соотношением длины  $L$  к толщине  $t$  меньше 10.



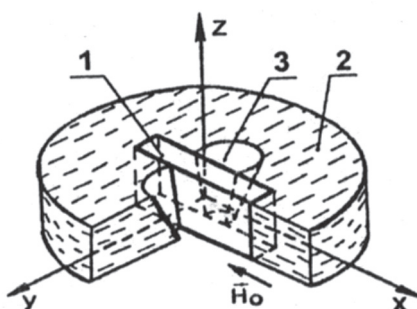


Рис. 1. Распределение свободной поверхности магнитной жидкости вблизи «короткой» пластины

Видно, что в объеме магнитной жидкости, омывающей поверхности стены, образуются две воздушные полости. Полости представляют собой своеобразные вертикальные воздушные воронки, сужающиеся в направлении тяжести. Располагаются воронки по обе стороны пластины вдоль оси симметрии плоскости пластины.

На рис.2 представлена характерная картина распределения магнитной жидкости вблизи поверхности пластины с соотношением длины  $L$  к толщине  $t$ :  $L/t \gg 10$ . Видно, что в объеме магнитной жидкости образуются четыре воздушные полости. Воронки расположены симметрично относительно оси симметрии плоскости пластины. Однако, прилегают они не к центральной части поверхности пластины, а сформированы вблизи торцов пластины.

При соотношении к толщине пластины порядка десяти ( $L/t \sim 10$ ) наблюдалось промежуточное состояние, заключающееся в следующем. Две воздушные полости вблизи поверхности пластины, которые для пластины соотношением  $L/t < 10$  имели строгое эллипсоидальное очертание в поперечном сечении, теряли свою строгую форму. При этом с увеличением длины пластины магнитная жидкость в средней части границы раздела жидкость-воздушная полость свободно подтекала к поверхности пластины. Это подтекание магнитной жидкости к поверхности пластины приводило к разделению изначально одной воздушной полости на две части, которые в свою очередь смещались от центральной области к её торцам. Такой характер распределения свободной поверхности магнитной жидкости наблюдался в приложенном внешнем магнитном поле величиной 83 кА/м.

Изучался вопрос о влиянии величины внешнего магнитного поля на характер фор-

мирования свободной поверхности магнитной жидкости вблизи поверхности пластин с различным соотношением длины к толщине.

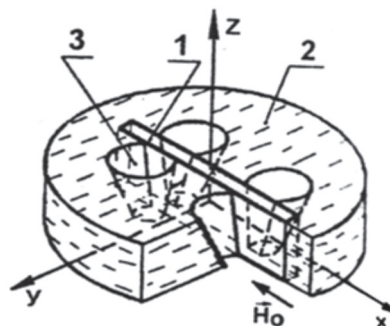


Рис. 2. Распределение свободной поверхности магнитной жидкости вблизи «длинной» пластины

Эксперименты показали, что вблизи поверхности пластин с соотношением  $L/t < 10$  во всем исследуемом интервале величины внешнего приложения магнитного поля образуются только две воздушные полости, схема расположения которых соответствует приведенной на рис. 1. Вблизи поверхности пластины с соотношением  $L/t \gg 10$  во всем исследованном интервале величины внешнего магнитного поля образуются четыре воздушные полости, схема расположения которых соответствует приведенной на рис.2. Вблизи поверхности пластин с соотношением ширины к толщине порядка десяти (исследованная пластина имела размеры  $65 \times 8 \times 15$  мм) с изменением величины внешнего магнитного поля наблюдалась следующая картина распределения свободной поверхности магнитной жидкости. В большом поле ( $H \sim 10^2$  кА/м) вблизи поверхности пластины образовались четыре воздушные полости в соответствии со схемой, приведенной на рис. 2. В магнитном поле величиной  $H \sim 10^2$  кА/м магнитная жидкость, свободно поле омывающая центральную часть поверхности пластины, оттекала от поверхности пластины. При этом четыре полости правильной геометрической формы объединялись в две полости с несформировавшимися границами. Наконец, в полях величиной  $H \sim 10^2$  кА/м вблизи поверхности пластины формировались две воздушные полости, расположенные в соответствии со схемой, приведенной на рис. 1. Полости имели эллипсоидальную форму в поперечном сечении, носящую устойчивый характер.

Изучался вопрос влияния высоты пластины на характер формирования воздушных полостей в магнитной жидкости вблизи поверхности пластины. В пределах исследованных высот пластины (от высоты, равной толщине пластины, до высоты, на порядок превышающей толщину пластины) характер образования воздушных полостей, описанный выше, не изменялся.

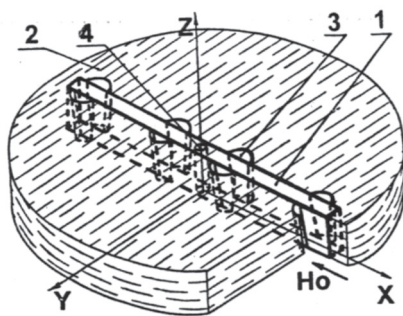


Рис. 3. Распределение свободной поверхности магнитной жидкости с отверстием

Вышеизложенные измерения проводились на сплошной ферромагнитной пластине. Эксперименты показали, что нарушение сплошности пластины может существенно изменить характер формирования воздушных полостей вблизи поверхности пластины. В пластине размерами равными 70х3х35 мм, было проделано отверстие диаметром 1,2 мм. Отверстие было выполнено вдоль оси симметрии пластины. Осевая линия цилиндрического отверстия располагалась параллельно плоскостям пластины. Картина распределения свободной поверхности магнитной жидкости вблизи поверхности такой пластины представлена на рис. 3. Видно, что вблизи поверхности этой пластины в объеме магнитной жидкости формируются уже восемь воздушных полостей.

Для выяснения физической картины наблюдаемых явлений проводились эксперименты по моделированию распределения силовых линий магнитного поля вблизи поверхности пластины. Для визуализации силовых линий магнитного поля применялись магниточувствительные эмульсии, представляющие собой мелкодисперсную взвесь капель магнитной жидкости в прозрачном наполнителе. Эксперименты показали, что для пластины с соотношением  $L/t < 10$  вблизи плоскостей пластины действуют большие

градиенты магнитного поля, направленные к полюсам (торцам) пластины, что вызывает действие пондеромоторных сил на магнитную жидкость. Пондеромоторные силы оттягивают жидкость от центрально и части плоскостей пластины к ее торцам и приводят к возникновению вблизи этих областей пластины двух полостей в объеме магнитной жидкости, омывающей пластину. В случае пластин с соотношением  $L/t \gg 10$  градиенты магнитного поля возникают лишь в непосредственной близости к торцам пластины. Однородное магнитное поле в центральной области плоскостей пластины позволяет магнитной жидкости свободно омывать эту часть поверхности пластины, что и вызывает образование четырех воздушных полостей вблизи торцов пластины и к свободному омыванию жидкостью основной части поверхности плоскостей пластины.

Дается объяснение причине возникновения восьми воздушных полостей вблизи пластины с отверстием. Отверстие диаметром, сравнимым с толщиной пластины, фактически разрезает ее на две равные половины. Каждая половина пластины во внешнем магнитном поле представляет собой плоский диполь с характеристик  $L/t \gg 10$ . Поэтому магнитная жидкость, омывающая поверхности спаренных плоских диполей, отстоящих друг от друга на расстоянии, равном диаметру отверстия вблизи каждого из них ведет себя таким же образом, как и вблизи поверхности одинарной пластины с соотношением  $L/t \gg 10$ . Это обстоятельство и приводит к образованию уже не четырех, а восьми воздушных полостей в объеме магнитной жидкости, омывающей поверхности пластины.

Проводился анализ влияния ориентации пластины по отношению к направлению внешнего приложенного магнитного поля на характер формирования воздушных полостей в объеме магнитной жидкости вблизи поверхности пластины. Эксперименты показали, что при расположении плоскости пластины под углом  $45^\circ$  по отношению к направлению внешнего приложенного магнитного поля в объеме магнитной жидкости, омывающей пластину, возникает только две полости во всем исследованном интервале соотношений длины к толщине пластины. Расположены эти полости у торцов пластины по одной на каждую плоскость (сторону) пластины.

Дается объяснение этому явлению. При повороте плоскости пластины по отношению к направлению внешнего магнит-

ного поля на угол  $45^\circ$  происходит уменьшение длины плоского диполя, отсчитанной вдоль направления приложенного внешнего магнитного поля. Это оказывается равнозначным уменьшению соотношения длины к толщине пластины.

Проводился теоретический анализ формы свободной поверхности магнитной жидкости вблизи поверхности пластины. Магнитное поле  $H$  пластины с бесконечной магнитной проницаемостью во внешнем однородном параллельном пластине магнитном поле  $H_0$ , как обычно, определяется из выражения

$$H = \Delta\phi. \quad (1)$$

Потенциал магнитного поля  $\phi$  может быть представлен в виде вещественной части комплексной функции  $\Phi$ , то есть как  $\phi = \text{Re}\Phi$ . Используя функцию Жуковского для конформного преобразования, функцию  $\Phi$  запишем в виде:

$$\Phi = \frac{H_0 L}{2} \left[ z + \sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \right] \quad (2)$$

Здесь  $z = x + iy$ ;  $L$  – длина пластины.

Условие равновесия свободной поверхности магнитной жидкости задается уравнением

$$-\nabla p + (M\nabla)H = 0. \quad (3)$$

Здесь  $p$  – давление;  $M$  – намагниченность магнитной жидкости. Силой тяжести пренебрегается.

Условия непрерывности нормальной компоненты тензора напряжений свободной поверхности магнитной жидкости приводит к соотношению

$$p - p_a = 2\pi M_n. \quad (4)$$

Здесь  $p$  – давление в магнитной жидкости,  $p_a$  – давление воздуха,  $M_n$  – нормальная компонента намагниченности на свободной поверхности магнитной жидкости. Поверхностное натяжение не учитывается.

Из соотношений (3) и (4) следует, что на свободной поверхности магнитной жидкости выполняется условие

$$\int_0^H M dH + 2\pi M_n^2 = \text{const}. \quad (5)$$

Если намагниченность жидкости  $M_n$  мала по сравнению с внешним полем  $H_0$  вторым слагаемым в формуле (5) можно пренебречь по сравнению с первым. В результате, в этом приближении линии свободной поверхности магнитной жидкости совпадают с линиями постоянства модуля напряженности магнитного поля. В результате дифференцирования по формуле (1) для квадрата модуля магнитного поля пластины получим выражение

$$|H|^2 = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2 y^2}} = \text{const} \quad (6)$$

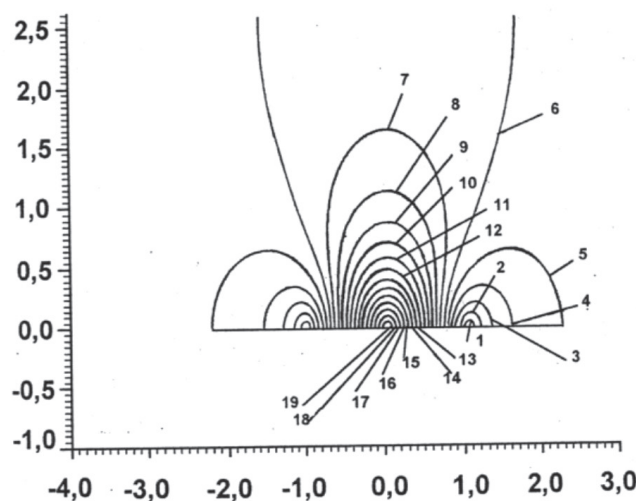


Рис. 4. Графики распределения границ раздела магнитная – немагнитная среда

На рис. 4 изображены линии постоянства модуля поля  $|H|$ , описываемые формулой (6). Расположение кривых 1–5, окружающих симметрично два торца пластины, соответствует расположению свободной поверхности малых объемов магнитной жидкости вблизи поверхности пластины, наблюдаемых в экспериментах с пластинами при соотношении  $L/t \ll 10$ . Последующие кривые на рис. 4 соответствуют экспериментально наблюдаемому распределению свободной поверхности магнитной жидкости при больших объемах магнитной жидкости, заполнявшей кювету и окружающей поверхность пластины. Эти кривые описывают воздушные полости вблизи центральной части поверхности пластины. Воздушные полости, как следует из рис. 4, уменьшаются в объеме с увеличением объема магнитной жидкости, окружающей поверхность пластины. Константу уравнения (6), таким образом, можно интерпретировать как величину, связанную с объемом магнитной жидкости. Расчеты показывают, что уменьшение константы уравнения (6) соответствует увеличению объема магнитной жидкости.

Таким образом, экспериментально и теоретически показано, что распределение намагничивающейся жидкости вблизи поверхности магнитной пластины происходит по следующему закону. У центра «короткой» пластины в объеме магнитной жидко-

сти формируется воздушная полость конусообразно сужающаяся в направлении силы тяжести с обеих сторон пластины. Вблизи поверхности «длинной» пластины образование подобных полостей происходит у торцов по обе стороны пластины. Некоторые из обсуждаемых здесь вопросов рассматривались в статьях [1...8].

*Выражаем благодарность РФФИ за финансовую поддержку (Грант № 17-01-00037).*

#### Список литературы

1. Фертман В.Е. Магнитные жидкости: Справочное пособие. – Минск: Высш. шк., 1988. – 184 с.
2. Такетоми С., Тикадзumi С. Магнитные жидкости / Пер. с японск. – М.: Мир, 1993. – 272 с.
3. Розенцвейг Р.Е. Феррогидродинамика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 356 с., ил.
4. АС №985076 СССР. Закалочная среда. / Ставропольский пединститут: авторы изобретения В.В. Чеканов, А.Я. Симоновский. – Заявл. 26.05.81, №3294878/22-02; опубл. 30.12.82 // Б.И., 1982, №48
5. Магнитные жидкости в машиностроении / Д.В. Орлов, Ю.О. Михалев, Н.К. Мышкин и др.: под общ. ред. Д.В. Орлова, В.В. Подгоркова. – Машиностроение. 1993. – 272 с.
6. Гришанина О.А., Симоновский А.Я. Проблемы тепло- и массопереноса в нанодисперсных магнитных жидкостях. – Ставрополь: СевКавГТУ, 2010. – 296 с. ISBN № 978-5-9296-0524-6.
7. Кобозев М.А., Симоновский А.Я., Яновский А.А. Гидрогазодинамика процесса кипения магнитной жидкости в магнитном поле: монография / LAP. – 105 с. ISBN № 978-620-2-05263-4.
8. Симоновский А.Я., Яновский А.А. Теплообмен в кипящей магнитной жидкости. / LAP. – 148 с. ISBN: 978-3-659-90834-7.



УДК 51-77:330.131

## ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Богданова Д.С., Жукова В.А., Нестеренко Н.И.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: inf@stgau.ru

В статье рассмотрено применение экономико-математических методов в экономических расчетах при решении многовариантных заданий, для расширения возможностей анализа сложных проблем социально-экономического развития. Для облегчения действий в расчетах при решении экономических задач применяют ЭВМ, которая значительно облегчает вычисление. Авторы указывают на то, что для решения задач в конъюнктурно-экономической работе применяются многоцелевые экономические методы. При этом применение способа факторного, взаимосвязанного и регрессивного анализа и автоматизированных расчетов стоимости на машинно-техническую продукцию и при исследовании мониторингов является особо важным моментом при решении экономических задач. Применение современных экономико-математических методов и электронно-вычислительной техники решает задачи производства и потребления, например, нефтепродуктов каждого НПЗ. При разработке проектов и плановых решений вместо применения современных методов, и их обоснований в действующих предприятиях чаще всего применяются традиционные экономико-математические методы. Однако они уже недостаточны для обеспечения эффективного и сбалансированного развития деятельности предприятия. Наряду с традиционными экономико-математическими методами планирования применяются современные методы, такие как, например, методы математической статистики, математического программирования, образуя экономико-математическую модель исследования.

**Ключевые слова:** экономико-математические методы, экономические процессы, математический анализ, методы математической статистики, итерация.

## APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS IN ECONOMIC CALCULATIONS

Bogdanova D.S., Zhukova V.A., Nesterenko N.I.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru

The article deals with the application of economic-mathematical methods in economic calculations in the solution of multivariate tasks, for expanding the possibilities of analyzing complex problems of socio-economic development. To simplify the actions in the calculations when solving economic problems, computers are used, which greatly facilitates the calculation. The authors point out that multi-purpose economic methods are used to solve problems in conjuncture and economic work. At the same time, the use of the method of factorial, interrelated and regressive analysis and automated cost calculations for machine-technical products and monitoring studies is a particularly important moment in solving economic problems. The application of modern economic-mathematical methods and computer technology solves the problems of production and consumption, for example, of oil products of each refinery. In the development of projects and planning solutions, instead of applying modern methods and their justifications, in existing enterprises, traditional economic and mathematical methods are most often used. However, they are already insufficient to ensure an efficient and balanced development of the enterprise. Along with traditional economic and mathematical methods of planning, modern methods are used, such as, for example, methods of mathematical statistics, mathematical programming, forming an economic-mathematical model of research.

**Keywords:** economic-mathematical methods, economic processes, mathematical analysis, methods of mathematical statistics, iteration

Математические методы в последнее время используются с целью управления, планирования, бухгалтерского учёта, статистики, экономического анализа. Для решения множества экономических, инженерных заданий на практике возможно лишь применение математического программирования и моделирования, но невозможно без использования счётной техники. В решении сложных экономических задач на помощь пришло применение сконструированное, быстродействующее ЭВМ.

Экономико-математические методы – это новейшее научное течение, применяемое при решении многовариантных заданий, для расширения возможностей анализа сложных проблем социально-экономиче-

ского развития, которые значительно облегчают разработку планов. ЭВМ существенно меняет технологию планирования, работая только по точно заданным схемам расчетов, алгоритмам. На основе алгоритмов разрабатываются математические модели процессов, которые являются условием внедрения кибернетики в народное хозяйство. Математический анализ экономики в сравнении с применением математики в физике или технике значительно труднее и требует аналогичного решения исследования наиболее подходящих математических методов. Для ЭВМ всегда используется метод эвристического решения. Расчётную формулу или исходные данные разделяют так, чтобы задание было из элементарных операций,



которые машина в установленной последовательности будет воплощать [1].

Для решения задач в конъюнктурно-экономической работе применяются многоцелевые экономические методы. В данном отношении показательно применение способа факторного, взаимосвязанного и регрессивного анализа и автоматизированных расчётов стоимости на машинно-техническую продукцию и при исследовании мониторингов. Структура данной операции показала трудность в раскрытии этапов процесса принятия решений. Процедура умозаключительного обоснования принятия решений предполагает собой общее единство. Трансформация содержания одного этапа согласовывается с другими стадиями и их связями между собой [3].

При использовании математических методов этот факт зачастую отсутствует. Результат математического метода стремятся показать как решение конкретной управленческой задачи, несмотря на то, что он является одним из этапов процесса принятия решения из двенадцати существующих. Это вызвано общим рассмотрением всех этапов решения управленческой задачи. Во избежание недостатков чётко разграничивается место и роль каждого отдельного метода.

В СССР в 1970–1990 гг. существовало достаточное количество моделей, нацеленных на разрешение оптимизационных задач надёжности с целью долгосрочного становления трудоемких электроэнергетических систем. Для решения надёжности электроэнергетических систем была достаточная степень развития вычислительной техники и в их управлении применялись упрощённые инженерные методики. Данная, непосредственным способом отражалась в правдивости, получаемых показателей надёжности и принимаемых на этой базе проектных выводов. В современности широко применяются персональные компьютеры, улучшающие роль математических методов в решении задач по надёжности ЭЭС в их управлении и отменяющие практическое применение инженерных методик.

В сфере бизнеса, в ситуациях неопределённости Г. Маркович сосредоточил внимание и применил математику и компьютерную технику в решении практических задач в экономике. Он вёл сотрудничество с экономистами РЭНД Корпорэйшн, а также разработал приложение методов математики к анализу фондовых рынков. Проведя масштабную работу, которая стала его диссертацией, написанная в 1950 г. Гарри Марко-

вич стал одним из родоначальников теории финансов, которая явилась развитием в системе экономической науки, в дальнейшем ставшей практической основой финансово-го управления фирмой. [5]

Сущность концепции, участвующая в приведённом установлении под именем организационных, и их единые математические модели обретают применение не только при решении производственных и финансовых вопросов, но и в биологии, социологических изучениях и иных практических областях. Главными отличительными свойствами автоматизированной системы управления считается осуществление плано-финансовых расчетов с применением экономико-математических методов, с поддержкой которых формируется единая формальная модель управления объектом.

Производится постоянная математическая подготовка альтернатив возможных решений, но принятие конечного решения остается за человеком. Конкретные функции управления имеют все шансы реализоваться в автоматическом режиме, то есть без участия человека. Это значительно упрощает составление плана материально-технического обеспечения с использованием экономико-математических методов в рамках отдельной организации. При наличии утверждённого плана производства продукции на предприятии, а также составление плана снабжения, существует норма расхода материальных ресурсов, нормативы для видов производственных запасов, сводимых к решению автономных плано-экономических задач, методом умножения, измерения, методом сортировки и т.д.

Для изменения показателей в условиях автоматизированной системы плановых расчетов с помощью экономико-математических методов ЭВМ появляется вероятность отражения разных сторон хозяйственной и социальной деятельности, шире диапазон расчётов степеней и норм применения материальных, трудовых и финансовых ресурсов. Увеличение задач планирования решенных в автоматизированном режиме усложняет методы их решения, а также увеличивает требования к объёму применяемых данных и составу расчётных показателей. А те показатели, которые не используются в решении плано-экономических задач, выявляются и при возможности исключаются из плановой и отчетной документации. [7]

Для того чтобы применить модели к внедрению, которые позволят выполнять

расчёты без участия автора-создателя, необходимо снабжение методическими указаниями и инструкциями, которые позволяют пользователю без помощи других устанавливать ее на решение определенной задачи. При эксплуатации в первой очереди АСПР рассматривалась документация, считавшаяся обязательным условием сдачи материального снабжения. В состав этих групп входили представители отделов Госплана. Из собранного ими навыка уделялся особый интерес формированию второй очереди АСПР к технической технологичности внедряемых задач.

Автоматизируемые планово-экономические задачи относились к задачам прямой обработки данных, не требующих применения специальных математических методов решения. Экономико-математические модели, в которых используются методы матричной алгебры, линейного программирования, математической статистики и др., задача прямой обработки данных происходят на ЭВМ больших объемов информации при помощи простейших алгоритмов, а также преобразований по элементарным формулам [1].

Применение современных экономико-математических методов и электронно-вычислительной техники решает задачи производства и потребления нефтепродуктов каждого НПЗ. Для этого необходимо уточнение математической модели решения и разработки некоторых методологических вопросов, точная методика определения технико-экономических показателей и других задач, без которых невозможна оптимизация. При анализе выявлено, что при разработке проектов и плановых решений вместо применения современных методов, и их обоснований в действующих предприятиях чаще всего применяются традиционные методы. Традиционные методы в новых рыночных условиях уже недостаточны, для того чтобы обеспечить эффективное и сбалансированное развитие деятельности предприятия. Наряду с традиционными методами планирования применяются современные методы, так как необходимо совершенствование технологий планирования и это является важным направлением. Для научных и практических выводов основой являются экономические задачи, решаемые методами математической статистики систематической и обработанной к использованию данных. Очень важным элементом для экономического исследования является анализ и построение взаимосвя-

зелей экономических переменных, которые осложнены тем, что они не являются строгими функциональными зависимостями. В данных обстоятельствах математическая статистика дает возможность конструировать экономические модели и проводить оценку их параметров, исследовать их гипотезы о свойствах экономических показателей, их взаимосвязи, что в итоге служит базой для экономического анализа и моделирования, формируя вероятность с целью принятия аргументируемых экономических решений. На статистические исследования вероятно-случайных явлений влияет теория вероятностей [1].

С целью решения аналогичных задач вероятно употребление специальных компьютерных систем и финансового экономического моделирования. В ходе формирования бизнес-плана широко используются экономико-математические методы. Качество бизнес-планов совершенствуется вследствие правильного подбора и результативного применения компьютерных программ.

Итерация – это повторное применение математической операции при решении вычислительных задач для постепенного приближения к нужному результату. Чем меньше пересчетов, тем быстрее сходится алгоритм. При рассмотрении с точки зрения необходимости и возможности применения математических методов в аналитических целях решена проблема соединения теории принятия управленческих решений с анализом хозяйственной деятельности. На случай, если при решении новейших, мало решенных проблем, математические методы способны сыграть незначительную роль, то при структурируемых проблемах анализа хозяйственной деятельности, раскрывается потенциал исследования значимости и роли абсолютно всех экономико-математических методов. Такой метод изучения в комбинации с классическими методами содержательного анализа обязан реализовать теоретическую и практическую задачу. Для того, чтобы иметь возможность получать непредвзятую картину становления общества и ускорить достоверность и подлинность выводов социально-экономических исследований к точности и правдивости в выводах естественных наук, необходимо обширнее вовлекать инновационные формальные, количественные методы в интересах изучения и моделирования социально-экономических процессов.

Те задачи, при решении которых нет противоречий, успешно решаются методами,

описанными ранее. Если возникают проблемы при решении, то методы, изложенные выше недостаточны. Приходится прибегать к дополнительным подходам, с применением математической дисциплины – теории игр. Французский математик Э.Борель в 20-х годах XX века первым раскрыл круг этих вопросов при исследовании. Но огромный интерес данные работы не привлекли и принято считать появлением на свет теории игр 1944 год, когда была выпущена книга Д. фон Неймана и О. Моргенштерна, базирующаяся на ранней работе Неймана. Её развитие способствовало изучению различных военных, а также экономических задач во время второй Мировой войны и в послевоенный период. На счету теории игр к настоящему времени сделано большое количество решенных трудных и немаловажных задач. Возможно произвести подсчет результативности использования приборов, которые не применяются в качестве средств труда в технологических процессах. С целью извлечения результатов прием в качестве образца счётно-решающие приборы, производящие математические операции. Сфера использования счётно-решающих устройств в технике многообразна. В одном случае современные ЭВМ могут решать задания существенно быстрее, в другом случае они могут оперативно давать числовые решения дифференциальных уравнений, которые невозможно решить иными способами [4].

Приборы стимулируют развитие таких сфер математики, где вероятность использования простых методов анализа ограничена. Присутствие технологических ограничений, ограничений материальных ресурсов предоставят максимальный финансовый ре-

зультат. Данная постановка задач решается на ЭВМ с помощью математического программирования, образуя экономико-математическую модель исследования.

Впервые технология DEA – Data Envelopment Analysis была предложена в 1978 году для анализа деятельности фирм. В этой технологии используются достижения в области математического программирования, теории и методов решения задач оптимизации, а также современные средства программного обеспечения. Чтобы использовать технологию DEA-Data Envelopment Analysis для подземных хранилищ газа, месторождений, насосных станций, компрессорных и других объектов нефтяной и газовой промышленности, необходима оценка и сравнительный финансово-экономический анализ для дальнейшего развития и применения в нашей стране.

#### Список литературы

1. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Мелешко С.В. Математические методы исследования экономических процессов // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 12–1. – С. 116–117.
2. Гулай Т.А., Литвин Д.Б., Попова С.В., Мелешко С.В. Прогнозирование в регрессионном анализе при построении статистических моделей экономических задач с помощью программы MICROSOFT EXCEL // Экономика и предпринимательство. – 2017. – № 8–2 (85–2). – С. 688–692.
3. Жиликов Е.Г., Перлов Ю.М. Основы эконометрического анализа данных: Учебное пособие, 2014.
4. Манько А.И., Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Мелешко С.В. Математические методы в экономических исследованиях: Рабочая тетрадь – Ставрополь, 2015.
5. Орлова, И.В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: Учебное пособие / И.В. Орлова. – М.: Вузский учебник, НИЦ ИНФРА – М, 2013. – 389 с.
6. Попов А.М., Сотников В.Н. Экономико-математические методы и модели.: Юрайт-Издат, 2015. – 479 с.
7. Федосеев В.В. Экономико-математические методы – М.: Финстатинформ, 2015. – 254 с.

УДК 51-72

## ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Богомолов А.А., Жуков Д.А.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: inf@stgau.ru

В данной статье мы рассмотрим на конкретных примерах применения дифференциального уравнения первого и второго порядка в решении задач по физике. Очень часто в дифференциальное уравнение входят производные функции, а иногда и сама функция, а также независимая переменная и параметры. Так же порядок производных в уравнении может быть хаотичен и могут существовать такие уравнения, в которых и вовсе отсутствуют производные функции, параметры и независимые переменные. Но в любом уравнении должна присутствовать хотя бы одна производная функция. Но не любое уравнение, которое содержит в себе производные неизвестной функции, будет являться дифференциальным уравнением. Главным отличием дифференциальных уравнений от алгебраических является, то что мы ищем не число, а функцию.

**Ключевые слова:** математика, физика, дифференциальные уравнения, условие, применение

## APPLICATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS TO SOLUTIONS OF PHYSICS PROBLEMS

Bogomolov A.A., Zhukov D.A.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru

In this article, we will look at specific examples of applications of first-order and second-order differential equations in solving problems in physics. Very often, the differential equation includes derivative functions, and sometimes the function itself, as well as the independent variable and parameters. Similarly, the order of the derivatives in the equation can be chaotic and there can exist equations in which there are no derivative functions, parameters and independent variables. But in any equation there must be at least one derived function. But not every equation that contains the derivatives of an unknown function will be a differential equation. The main difference between differential and algebraic equations is that we are looking for a function rather than a number.

**Keywords:** mathematics, physics, differential equations, the condition of the application

Большинство задач по физике приводят к необходимости решения дифференциальных уравнений. Это можно объяснить тем, что многие физические законы являются дифференциальными уравнениями, относительно некоторых функций, которые характеризуют эти процессы. Физические законы представляют собой теоретическое обобщение многих экспериментов и описывают эволюцию искомых величин, как в пространстве, так и во времени. К примеру второй закон Ньютона является дифференциальным уравнением второго порядка [3, 6]:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F(r, v, t).$$

Учитывая огромную важность дифференциальных уравнений в общей и теоретической физики, рассмотрим основные понятия и приёмы интегрирования некоторых видов, которые часто встречаются в задачах.

Дифференциальное уравнение — это уравнение, которое помимо независимых переменных и неизвестных функции данных переменных, содержит ещё и производные неизвестных функции [1, 4].

Наивысший порядок производных неизвестной функции, входящих в дифферен-

циальное уравнение называется порядком дифференциального уравнения.

Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение, которое связывает независимую переменную, искомую функцию и её производную 1-го порядка [2].

Для составления дифференциальных уравнений часто применяют эти способы:

1) Записать условие на производную искомой величины, используя известные законы физики и физический смысл производной;

2) Определить, какая из величин будет независимой переменной, а какая зависимой;

3) Затем находят линейное приближение для приращения  $D_y$ , когда независимая величина переменная получила приращение  $D_x$ ;

4) Разделив  $D_y$  на  $D_x$  и переходя к пределу при  $D_x \rightarrow 0$ , получают дифференциальное уравнение.

Рассмотрим конкретный пример применения дифференциального уравнения 1-го порядка:

Чаша в форме параболоида вращения в начальный момент заполнена водой. В самой нижней части чаши имеется отверстие радиуса  $r_1$ , через которое вытекает



вода. Найти зависимость  $h(t)$  уровня воды в чаше от времени, если известно, что высота чаши  $H$ , радиус верхнего края  $R$ . За какой промежуток времени  $t$  из чаши вытечет вся вода?

Решение.

Зависимость между уровнем  $h$  воды и в чаше и радиусом  $r$  горизонтальной поверхности воды имеет вид

$$h = \frac{H}{R^2} r^2.$$

Пусть за промежуток времени  $(t; t + D_t)$  уровень воды изменится на  $D_h$ , тогда изменение объёма воды в чаше

$$DV = pr^2 Dh = p \frac{R^2}{H} h Dh. \quad (1)$$

С другой стороны, это изменение равно

$$DV = -vpr_1^2 Dt = -0,6\sqrt{2gh}pr_1^2 Dt, \quad (2)$$

где  $v = 0,6\sqrt{2gh}$  – скорость истечения воды из отверстия.

Приравняв уравнения (1) и (2) и переходя к пределу при  $D_t \rightarrow 0$ , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{R^2}{H} h dh = -0,6\sqrt{2gh}r_1^2 Dt. \quad (3)$$

После разделения переменных в 3 и интегрирования, имеем:

$$\frac{2R^2}{3H} h^{1,5} = -0,6\sqrt{2g}r_1^2 t + C. \quad (4)$$

Найдём константу  $C$  из начальных условий. Так как  $h(0) = H$ , то

$$C = \frac{2R^2}{3H} H^{1,5},$$

поэтому уравнение 4 будет иметь вид

$$\frac{2R^2}{3H} (H^{1,5} - h^{1,5}) = 0,6\sqrt{2g}r_1^2 t. \quad (5)$$

Выражая  $h$  из формулы 5, получим искомую зависимость:

$$h(t) = cH^{1,5} - 0,9\sqrt{2g} \frac{Hr_1^2 t}{R^2}.$$

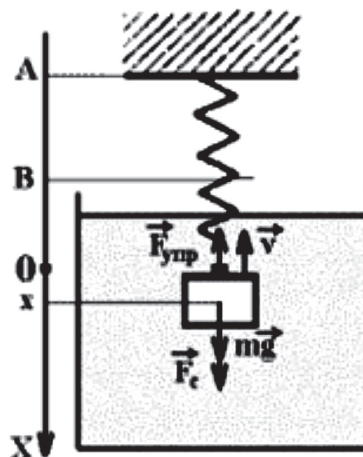
Поскольку  $h(t_1) = 0$ , то из 5 найдём время, за которое вытечет вся вода:

$$t_1 = \frac{R^2 \sqrt{H}}{0,9\sqrt{2g}r_1^2}.$$

Дифференциальное уравнение 2-го порядка – это уравнение, в которое входят независимая переменная, неизвестная функция, первая и вторая производные этой функции.

Рассмотрим пример задачи, который приводит к решению линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Тело массы 5 кг подвешено к концу пружины жёсткости 20 Н/м и помещено в вязкую среду. Период его колебаний в этом случае равен 10 с. Найти постоянную демпфирования, логарифмический декремент колебаний и период свободных колебаний [5].



Решение. Выберем начало координат в положении статического равновесия тела и расставим силы, действующие на тело в процессе колебаний. Если АВ обозначает длину не растянутой пружины, то отрезок ОВ представляет статическое удлинение пружины под действием силы тяжести.

По закону Гука

$$mg = kOB.$$

Записываем второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{всп}} + \vec{F}_c + m\vec{g}.$$

Проектируем это равенство на ось ОХ, учитывая, что

$$F_{xc} = -av_x = -ax, F_{\text{всп}} = -k(x + OB).$$

В результате получим уравнение колебаний

$$m\ddot{x} = -a\dot{x} - k(x + OB) + mg = -a\dot{x} - kx$$

$$\text{или} \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } n = \frac{a}{2m}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$



Уравнение (1) – это дифференциальное уравнение второго порядка.

Составляем характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2nr + \omega_0^2 = 0. \quad (2)$$

Вычисляем дискриминант уравнения (2):

$$D = n^2 - \omega_0^2. \quad (3)$$

Поскольку в данном случае движение тела носит колебательный характер, то его координата должна изменяться по гармоническому закону.

$$x = e^{-\lambda t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) \quad (4)$$

В случае отсутствия затухания,  $\omega = \omega_0$ , и тело совершает свободные колебания с периодом

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}.$$

Выражаем отсюда

$$n = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2},$$

и определяем постоянную деформирования  $a$ :

$$a = 2mn = 2m\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}.$$

Подставляя данный задачи, получим ответ

$$a = 19 \text{ (Н·с)/м}.$$

Логарифмический декремент затухания есть натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд,

$$\Delta = n \frac{T}{2}.$$

Вычисляя  $n$  и подставляя значение  $T$ , получим

$$\Delta = 9,5.$$

### Список литературы

1. Бондаренко В.А., Ханларов С.Т. Применение определенного интеграла в геометрических и физических задачах // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5–2. – С. 143–146.
2. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Некоторые аспекты интегрированного подхода изучения математического анализа // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона: ежегодная 76-я научно-практическая конференция Ставропольского государственного аграрного университета «Аграрная наука – Северо-Кавказскому региону», 2012. – С. 280–283.
3. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б. Государственное регулирование в системе агробизнеса // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона Ежегодная 76-я научно-практическая конференция Ставропольского государственного аграрного университета «Аграрная наука – Северо-Кавказскому региону», 2012. – С. 202–207.
4. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Долгополова А.Ф. Коррекция динамического диапазона статистических данных // Статистика вчера, сегодня, завтра Международная научно-практическая конференция, посвященная 155-летию образования Ставропольского губернского комитета статистики, 150-летию образования в России Центрального статистического комитета и Международному году статистики, 2013. – С. 148–152.
5. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Жукова В.А., Мамаев И.И. Модель экономического роста с распределенным запаздыванием в инвестиционной сфере // Вестник АПК Ставрополя. – 2017. – № 2 (26). – С. 225–228.
6. Мелешко С.В., Невидомская И.А., Гулай Т.А. Самостоятельная работа студентов и ее организация при изучении теории вероятностей // Финансово-экономические и учетно-аналитические проблемы развития региона: Материалы Ежегодной 78-й научно-практической конференции, 2014. – С. 246–251.

УДК 519.21:621.31

## ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ В СИСТЕМАХ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ

Бородин С.В., Каитов М.Р.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: inf@stgau.ru

Рассмотрены методы решения задач в электроэнергетике посредством теории вероятности с помощью модели «случайное событие», классификация случайных событий, законы вероятностей случайных событий. Обзорно рассмотрены противоположные события и полная группа событий на примере вероятности отказа роботы электрической цепи и нахождения его безотказной работы через полную группу событий. Приведено определение теории вероятностей как математической науки изучающей закономерности существующей реальности. Так же на примере отсутствия напряжения на шинах низкого напряжения (НН) при наличии его на шинах источника питания и нормальной работы всех элементов схемы рассмотрено событие, которое не может произойти в результате опыта. Определена вероятность перерыва электроснабжения двумя способами: по теореме сложения для совместных событий и через противоположные события.

**Ключевые слова:** теория вероятности, электроэнергетика, случайное событие.

## THE USE OF ELEMENTS OF PROBABILITY THEORY IN POWER SYSTEMS

Borodin S.V., Kaitov R.M.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru

The methods of solution of tasks in the power industry by probability theory using the model of a «random event», the classification of random events, laws of probability random events. The review considered the opposite of the event and complete group of events-for example, the probability of failure robots electrical circuit and finding its trouble-free operation through the full group of events. Given the definition of the theory of probability as a mathematical science studying the patterns of the existing reality. As the example of the lack of voltage on the busbars of low voltage (LV) if it is available at tyre power source and normal operation of all elements of the scheme is considered an event that may not occur as a result of experience. Determined the probability of interruption of electricity supply in two ways: via the addition theorem for joint events and through the opposite event.

**Keywords:** probability theory, power generation, a random event

Случайность отражает объективно Теория вероятностей – это математическая наука, изучающая закономерности существующей реальности, которая находится под воздействием бесчисленного множества взаимосвязанных факторов, не поддающихся учету [3, 8].

Рассмотрим значение термина «случайный» применительно к явлениям, событиям, величинам и функциям.

Под случайным явлением понимается такое явление, которое при неоднократности воспроизведении одного и того же опыта происходит каждый раз по иному. В системах электроснабжения случайные явления – это, как правило, процессы изменения величин, характеризующих параметры режима: тока  $I(t)$ , напряжения  $U(t)$ , активной мощности  $P(t)$ , реактивной мощности  $Q(t)$ , происходящие во времени. Всякое осуществление определенных условий и действий, при которых наблюдается изучаемое случайное явление, называется опытом [5].

Например: фиксация по счетчикам активной энергии через равные промежутки времени  $t$  дискретных значений мощности  $P$  в наиболее загруженную смену или в период зимних (летних) рабочих суток.

Результаты опытов – это фиксированные последовательности дискретных значений мощности ( $P$ ) группы работающих электроприемников (см. рис. 1). Каждое событие, происходящее в окружающем мире, является результатом воздействия большого числа других событий, влияющих на возможность возникновения данного [1].

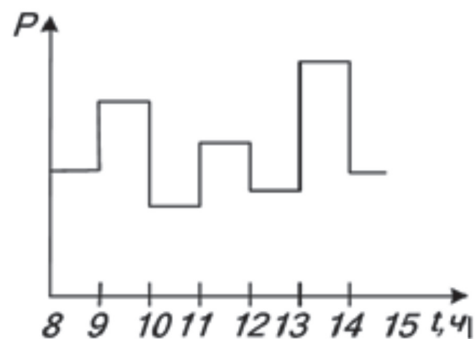


Рис. 1. Последовательность дискретных значений мощности группы ЭП

Случайным называют событие, которое в данных конкретных условиях может произойти или не произойти. Примером таких событий является состояние электроприемника – включенное или отключенное. Достоверное событие – это событие, которое в результате опытов обязательно произойдет [4, 7].

Например: наличие напряжения на шинах силового трансформатора при нормальной работающей системе электроснабжения (см. рис. 2) [9].

Рассмотрим противоположные события. События  $A$  и  $B$  называются противоположными, если они являются несовместимыми и образуют полную группу событий. Если происходит событие  $A$ , то не происходит событие  $B$  в полной группе событий, и наоборот [2].

Что же такое полная группа событий? С этим важным понятием теории вероятностей в электроэнергетике встречаются довольно часто.



ИП – источник питания; В – выключатель; КЛ – кабельная линия;  
Т – силовой трансформатор; АВ – автоматический выключатель.

Рис. 2. Схема электроснабжения

Вероятность появления такого события, назовем его событием  $A$ , равна 1:

$$p(A) = 1.$$

Невозможное событие – это событие, которое не может произойти в результате опыта. Примером является отсутствие напряжения на шинах низкого напряжения (НН), то есть  $U_2=0$ , при наличии его на шинах источника питания и нормальной работы всех элементов схемы (рис. 1); одновременный отказ и работа электроприемника. Вероятность появления невозможного события равна нулю:

$$p(A) = 0.$$

Только на основании большого числа опытов наблюдающий может установить является событие случайным, достоверным или невозможным.

Случайные события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют полную группу событий, если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из них. Сумма вероятностей случайных событий, составляющих полную группу событий, равна 1 [6]:

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \dots + p(A_n) = 1. \quad (1)$$

Отсюда, сумма вероятностей противоположных событий  $A$  и  $B$  равна 1:

$$p(A) + p(B) = 1. \quad (2)$$

Например, зная вероятность отказа элемента электрической цепи  $q(t)$ , можно найти вероятность его безотказной работы  $p(t)$ , т. к. отказ и работа – противоположные случайные события:

$$p(t) = 1 - q(t). \quad (3)$$

Задача. Определить вероятность прерыва электроснабжения в схеме, показанной на рис. 3.

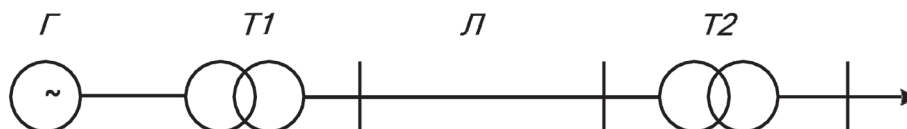


Рис. 3. Схема электропередачи

Известны вероятности отказов элементов схемы:

$$q_{\Gamma} = 2 \cdot 10^{-3}; \quad q_{T1} = 2 \cdot 10^{-5};$$

$$q_{\text{Л}} = 2 \cdot 10^{-3}; \quad q_{T2} = 4 \cdot 10^{-5}$$

Определим вероятности безотказной работы каждого элемента схемы как противоположное событие:

$$p_{\Gamma} = 1 - q_{\Gamma} = 1 - 2 \cdot 10^{-3} = 0,998;$$

$$p_{T1} = 1 - q_{T1} = 1 - 5 \cdot 10^{-5} = 0,99995;$$

$$p_{\text{Л}} = 1 - q_{\text{Л}} = 1 - 2 \cdot 10^{-3} = 0,998;$$

$$p_{T2} = 1 - q_{T2} = 1 - 4 \cdot 10^{-5} = 0,99996.$$

Эту задачу можно решить двумя способами: по теореме сложения для совместных событий (I способ) и через противоположные события (II способ).

#### I Способ

Одновременно могут отказать и один, и любые два, и любые три, и четыре элемента, поэтому вероятность перерыва в электроснабжении будет:

$$q_{cx} = p(0) = \sum q_i - \sum q_i q_j + \sum q_i q_j q_k - \prod_{i=1}^4 q_i =$$

$$= q_{\Gamma} + q_{T1} + q_{\text{Л}} + q_{T2} - q_{\Gamma} q_{T1} - q_{\Gamma} q_{\text{Л}} - q_{\text{Л}} q_{T2} -$$

$$- q_{T1} q_{\text{Л}} - q_{T1} q_{T2} - q_{\Gamma} q_{T2} + q_{\Gamma} q_{T1} q_{\text{Л}} + q_{\Gamma} q_{\text{Л}} q_{T2} +$$

$$+ q_{T1} q_{\text{Л}} q_{T2} + q_{\Gamma} q_{T1} q_{T2} - q_{\Gamma} q_{T1} q_{\text{Л}} q_{T2}.$$

Подставляем вместо вероятностей отказов их значения, получим:

$$q_{cx} = 0,00408546 = 4,08546 \cdot 10^{-3}.$$

Учитывая, что произведение двух и более вероятностей отказов – величины практически равные нулю, можно записать:

$$q_{cx} = q_{\Gamma} + q_{T1} + q_{\text{Л}} + q_{T2} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-5} = 4,09 \cdot 10^{-3}$$

Сравнивая два результата, видно, что погрешность второго решения составляет 0,9%. Следовательно, в электроэнергетике при последовательном соединении небольшого количества элементов вероятность отказа схемы (перерыва в электроснабжении)

определяется как сумма вероятностей отказов ее элементов.

#### II Способ

В предыдущем случае точные расчеты громоздки, а допущения о пренебрежительности произведения вероятностей при увеличении числа элементов схемы будет приводить к увеличению погрешности расчета. Возможен другой путь. Определим вероятность передачи электроэнергии в рассматриваемой схеме. Для того, чтобы потребитель получил электроэнергию все элементы схемы должны работать, тогда по теореме умножения для совместных событий:

$$p_{cx} = p_{\Gamma} p_{T1} p_{\text{Л}} p_{T2};$$

а вероятность отказа схемы определяется как противоположное событие:

$$q_{cx} = 1 - p_{cx} = 1 - p_{\Gamma} p_{T1} p_{\text{Л}} p_{T2} = 4,08546 \cdot 10^{-3}$$

#### Список литературы

1. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Задачи с экономическим содержанием на занятиях по дифференциальному исчислению // Актуальные вопросы теории и практики бухгалтерского учета, анализа и аудита: ежегодная 75-я научно-практическая конференция / Редколлегия: В.З. Мазлоев, А.В. Ткач, И.С. Санду, И.Ю. Скляр, Е.И. Костюкова, ответственный за выпуск А.Н. Бобрышев. – 2011. – С. 124–127.
2. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Некоторые аспекты интегрированного подхода изучения математического анализа // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона: ежегодная 76-я научно-практическая конференция Ставропольского государственного аграрного университета «Аграрная наука – Северо-Кавказскому региону». – 2012. – С. 280–283.
3. Гулай Т.А., Жукова В.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А. Математика (методические указания) // АГРУС.: Ставрополь, 2015. – 130 с.
4. Гулай Т.А., Мелешко С.В., Литвин Д.Б., Долгополова А.Ф., Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. – Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет (АГРУС), 2013. – 257 с.
5. Долгополова А.Ф., Колодяжная Т.А. Руководство к решению задач по математическому анализу // Международный журнал экспериментального образования. – 2011. – №12. – С. 62–63.
6. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 2 // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – №2. – С. 81–82.
7. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Жукова В.А., Мамаев И.И. Модель экономического роста с распределенным запаздыванием в инвестиционной сфере // Вестник АПК Ставрополья. – 2017. – № 2 (26). – С. 225–228.
8. Невидомская И.А., Мелешко С.В., Гулай Т.А. Элементы теории вероятностей случайных событий (учебное пособие) // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – С. 76.
9. Элементы теории вероятностей случайных событий: Рабочая тетрадь / И.А. Невидомская, С.В. Мелешко, Т.А. Гулай. – Ставрополь: Сервисшкола, – 2015.

УДК 51-7:61

**ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В МЕДИЦИНЕ****Гаджиева Д.Э., Жукова В.А., Наконечная Д.И.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: inf@stgau.ru*

В статье рассматриваются вопросы применения математических методов в медицине, описывается взаимосвязь между медициной и арифметикой, проблема о наследственности, проблема математической статистики в медицине. Анализируются сферы применения математики в медицине и биологии. Так, в сфере медицинской диагностики для постановки диагноза необходимо принимать во внимание наиболее разнообразные данные. Поскольку общее число данных стремительно возрастает и существуют такие заболевания, о каких ранее написано немало, то в точности исследовать, дать оценку, пояснить и применить всю существующую информацию при постановке диагноза математическими методами однозначно невозможно. В связи с этим, эксперты в сфере неточных наук зачастую заявляют о том, что общематематическое исследование приводит к неправильным решениям и выводам и по этой причине его лучше избегать. Однако мнение по этому вопросу не окончательное и дебаты в этом направлении продолжаются.

**Ключевые слова:** математика, математические методы, проблема наследственности, арифметические методы, медицина, медицинская диагностика

**APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS IN MEDICINE****Gadzhieva D.E., Zhukova V.A., Nakonechnaya D.I.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru*

The article deals with the application of mathematical methods in medicine, describes the relationship between medicine and arithmetic, the problem of heredity, the problem of mathematical statistics in medicine. The spheres of application of mathematics in medicine and biology are analyzed. So, in the field of medical diagnostics for diagnosis, it is necessary to take into account the most diverse data. Since the total number of data is rapidly increasing and there are such diseases, as previously written a lot, then it is definitely impossible to accurately study, evaluate, explain and apply all existing information when diagnosing by mathematical methods. In this regard, experts in the field of inaccurate sciences often state that a general mathematical study leads to wrong decisions and conclusions and for this reason it should be avoided. However, the opinion on this issue is not final and the debate continues in this direction.

**Keywords:** mathematics, mathematical methods, heredity problem, arithmetic methods, medicine, medical diagnostics

Математика – весьма сильный и эластичный предмет при исследовании находящегося вокруг нас общества. В каждой академической дисциплине имеется собственная методика, базирующаяся на исполнении определенных исследований. Далее, данные сведения обрабатываются и закрепляются в числовом варианте. А так как обработкой числовых данных занимается математика, вот и возникла взаимосвязь между медициной и арифметикой, а теперь более непосредственно.

В том случае, когда необходимо решить проблему о наследственности, применяя познания в сфере комбинаторики, можно просчитать разнообразные виды распределения хромосом, число подобных вариантов и иных необходимых данных. Если, к примеру, нужно сделать план, что в автоматическом порядке, отталкиваясь от признаков заболевания, может помочь подобрать оптимальный метод лечения, в том случае это есть самое прямое использование математики в медицине, так как для этого сначала строится точная модель, то есть «модель человека», изображенная стилем математики [7].

Несколько лет назад, когда исследовалась проблема математической статистики в маленькой врачебной научно-исследовательской команде, разговор о способности проложить арифметическую тропинку посредством густых дебрей экологических условий зачастую кончались достаточно подозрительным покачиванием головой и заявлением о том, что «медицина – есть все-таки искусство». Безусловно это правильно в том смысле, что проницательность и интуиция для доктора действительно важны. В то же время большая часть пациентов и потенциальных больных, безусловно, рассчитывают на постоянное развитие и увеличение академических аспектов медицины, а наука обозначает использование математики [3, 6].

Поскольку статистика как термин возникла в средние века, означавшая политическое состояние государства, то в науку этот термин ввел немецкий ученый Ахенваль. В настоящее время этот термин употребляется в четырех значениях:

– комплекс дисциплин – учебный предмет;



– отрасль практической деятельности по сбору и обработке, анализу и публикации массовых цифровых данных о различных явлениях и процессах общественной жизни;  
– совокупность цифровых сведений;  
– статистические методы, принимаемые для изучения экономических явлений. [9]

Статистика, изучающая вопросы, связанные с медициной и здравоохранением носит в настоящее время название мед. Мед статистика делится на три раздела:

- статистика общественного здоровья;
- статистика здравоохранения;
- клиническая статистика.

Существуют различные задачи, решаемые математическими методами. К таким задачам относятся задачи на проценты, а также задачи с метрическими системами мер. Так, например, спецмерами объема являются:

- 1) объем чайной ложки равен 5 мл;  
объем десертной ложки равен 10 мл;  
объем столовой ложки равен 15 мл.

2) 1 мл водного раствора равен 20 каплям;

1 мл спиртового раствора равен 40 каплям;

1 мл спиртово-эфирного раствора равен 60 каплям.

Существует также метрическая шкала, которой удобно пользоваться при переводе и производить расчеты доз препаратов. Дозы препаратов подразделяют на;

- разовые;
- суточные;
- курсовые.

Точно можно разделить только таблетки только таблетки с риской, капсулы, жидкие лекарственные средства с мерной посудой. При расчете разовой дозы препарата по формуле:

разовая доза препарата = требуемая  
доза / количество препарата лекарствен-  
ного средства

Надо помнить, что назначение врача и содержимое лекарственных единиц должно быть в одинаковых единицах измерения. Таким образом, вышесказанное дает возможность утверждать, что знание математики в медицине как науке играет немаловажное значение [5].

Также очень важна проблема о том, в каких сферах применимы арифметические методы. Следует заметить, что необходимость в математическом описании возникает при каждой попытке осуществлять рассмотрение в конкретных суждениях и что это

относится даже к таким непростым сферам, как этические нормы и искусство. В этой области мы точнее анализируем сферы применения математики в медицине и биологии [10.]

Хорошо известно, что одним из подходов к отображению картины природы является сознание иерархии уровней учреждения, исследуемых разными науками. Согласно уровню абстракции, присущему любой из них, данные науки можно разместить в такой очередности: физика, социология, химия, психология, физиология, биология. Мы начинаем с ключевых веществных компонентов реального общества, то есть с субатомного уровня, и заканчивает многосторонними проявлениями духовной жизни людского общества. В данной очередности уровней формирование и сложность постоянно увеличиваются. На любом уровне функционируют собственные законы и по этой причине их можно исследовать вплоть до определенного уровня независимо друг от друга. Но каждый из них неразрывно связан с закономерностями, действующими в наиболее низких уровнях. Таким образом, законы химии и физики в некоторой степени распространяются и на психологию, несмотря на то, что принципы и законы последней выходят за границы химических и физических законов [2, 8].

Задачи, затрагивающие учреждения и деятельность клиник, необходимо относить к наиболее значительному уровню абстракции, нежели, к примеру, патологию и физиологию лица. Однако, несмотря на то, что логическая сущность этой более высокой степени в независимости от наиболее низкого, задачи патологии и физиологии обязаны предусматриваться при разрешении каждой задачи, относящейся к учреждениям больничных служб. Мы не полагаем уходить с головой в данные общеприкладные размышления либо оценивать отдельные их составляющие, а полагаем только выделить, что избирательная очередность уровней приблизительно соответствует порядку возрастания проблем при применении научных методов и проведении арифметических исследований.

При переходе на более значительные уровни абстракции, мы встречаемся не только с более непростыми задачами, но и с растущей степенью изменчивости, по большей части непрогнозируемой. К примеру, абсолютная ситуация конкурентной борьбы среди некоторых разновидностей, обитающих в конкретной сфере, содержит колос-

сальное число условий. В сфере научных экологических описаний, произведенных главным образом в вербальной форме, достигнуты существенные преимущества, но создание математических модификаций находится тут еще на самом простом уровне. Иным образом может быть сфера медицинской диагностики. С целью постановки диагноза доктор вместе с другими экспертами зачастую должен принимать во внимание наиболее разнообразные данные, делая упор на индивидуальный опыт, и частично на использованные материалы, приводимые в множественных медицинских книгах и журналах [1, 4].

Поскольку общее число данных возрастает с растущей интенсивностью и существуют такие заболевания, о каких ранее написано столько, что один человек не в состоянии в точности исследовать, дать оценку, пояснить и применить всю существующую информацию при постановке диагноза в любом определенном случае. Безусловно, добросовестный диагностик, применяя собственный опыт и проницательность, способен выбрать нужную часть значимых сведений и предоставить довольно четкое решение. Все же, как это ни парадоксально звучит, по мере накопления знаний положение ухудшается.

Непосредственно, в подобного рода моментах, когда сознание одного человека никак не способно осилить трудности важных вопросов и изложить их разрешение в общей вербальной форме, эксперты в сфере неточных наук зачастую заявляют, о том, что общематематическое исследование несовершенно, оно приводит к неправильным решениям, и по этой причине его лучше избегать. Данное отрицание содержит раз-

умное звено, однако пройдет время, и мы заметим, что справедливо будет как раз обратное.

### Список литературы

1. Мелешко С.В., Воропаева Д.С., Пшеничная П.И. Применение математических методов в биологии // *Аграрная наука Северо-Кавказскому Федеральному округу: сборник научных трудов по материалам 81-й Ежегодной научно-практической конференции* / Ответственный за выпуск Т.А. Башкатова. – 2016. – С. 201–205.
2. Мелешко С.В., Беляева Е.Д., Кукова Е.В. Золотое сечение в математике и других областях // *Современные наукоемкие технологии*. – 2013. – № 6. – С. 78–79.
3. Харченко М.А. Взаимодействие учетных и производственных систем автоматизации. Актуальные вопросы теории и практики бухгалтерского учета, анализа и аудита. 74-я научно-практическая конференция / ФГОУ ВПО «Ставропольский государственный аграрный университет», 2010. – С. 34–37.
4. Харченко М.А. Направления развития автоматизированных учетно-аналитических систем // *Аграрная наука Северо-Кавказскому Федеральному округу: сборник научных трудов по материалам 81-й Ежегодной научно-практической конференции* / Ответственный за выпуск Т.А. Башкатова, 2016. – С. 140–144.
5. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Долгополова А.Ф. Применение операционного исчисления в моделировании экономических систем // *Аграрная наука, творчество, рост*. – 2013. – С. 263–265.
6. Попова С.В., Смирнова Н.Б. Элементы алгоритмизации в процессе обучения математике в высшей школе // *Современные проблемы развития экономики и социальной сферы: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., посвященной 75-летию Ставропольского государственного аграрного университета*, 2005. – С. 526–531.
7. Долгополова А.Ф., Колодяжная Т.А. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 1 // *Международный журнал экспериментального образования*. – 2011. – № 12. – С. 62–63.
8. Гулай Т.А., Гатауллина К.Р., Фурсов Д.И., Применение классического метода при математическом расчете переходных процессов // *Международный студенческий научный вестник*. – 2017. – № 4–4. – С. 511–513.
9. Гулай Т.А., Жукова В.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А., Математика: рабочая тетрадь. – Ставрополь, 2015.
10. Элементы теории вероятностей случайных событий: Рабочая тетрадь / И.А. Невидомская, С.В. Мелешко, Т.А. Гулай. – Ставрополь: Сервисшкола, 2015.

УДК 519.22

**ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ****Газарян А.Ш., Мокриков С.С.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: inf@stgau.ru*

При написании статьи был проведен анализ и применены теоретические аспекты методов математической статистики, а также изучены оценки, которые применяются при анализе явлений, которые обладают свойством статистической устойчивости. Применяются следующие оценки: несмещенные, эффективные и состоятельные. Также рассмотрены величины, которые могут помочь при нахождении зависимости. Это: генеральная средняя и генеральная дисперсия. В качестве точечной оценки такого параметра, как генеральная средняя выступает выборочная средняя, а для параметра генеральная дисперсия точечной оценкой является выборочная дисперсия. Для более эффективного закрепления материала в статье приведены примеры с тщательно разобранным решением, которые помогли наглядно ознакомиться с методами точечной оценки.

**Ключевые слова:** математическая статистика, дисперсия, генеральная и выборочная средняя**POINT ESTIMATES PARAMETERS****Gazaryan A.S., Mokrikov S.S.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru*

While writing the article, the analysis and theoretical aspects of the methods of mathematical statistics were applied, and also the estimates that are used in the analysis of phenomena that have the property of statistical stability are studied. The following estimates are applied: unbiased, efficient and well-off. Also values that can help in finding the relationship are considered. These are: the general average and the general variance. As a point estimate of such a parameter as the general mean, the sample mean is the sample, and for the general dispersion parameter, the point estimate is the sample variance. These parameters are indicated accordingly. For more effective consolidation of the material in the article, examples are given with a carefully disassembled solution that helped to visually familiarize with the methods of point estimation.

**Keywords:** mathematical statistics, variance, general and sample mean

Методы математической статистики используются при анализе явлений, которые обладают свойством статистической устойчивости. Сущность данного свойства заключается в том, что результат  $X$  определённого опыта не может быть предсказан с большой точностью, где значение функции  $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от результатов наблюдений при увеличении объёма выборки теряет своё свойство случайности и сходится по вероятности с неслучайной величиной  $\theta$  [9].

В математической статистике применяются следующие оценки [3, 7]:

- несмещённые (значение математического ожидания оценки совпадает со значением оцениваемого параметра, то есть  $M(\theta^*) = \theta$ );
- смещённые (оценка  $M(\theta^*) \neq \theta$ );
- эффективные (оценка, которая имеет при заданном объёме выборки  $n$  наименьшую дисперсию);
- состоятельные (оценка, которая стремится при  $n \rightarrow \infty$  по вероятности к оцениваемому параметру);

Точечной оценкой называют некоторую функцию результатов наблюдения  $\theta_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , значение которой принима-

ется за более приближенное в данных условиях к значению самого параметра  $\theta$ , то есть оценку, определяющую одним числом [5, 2].

Часто, по результатам наблюдений количественного признака  $X$  требуется оценить следующие параметры распределения генеральной совокупности:

- генеральная средняя  $M(X)$ ;
- генеральная дисперсия  $D(X)$ ;

В качестве точечных оценок этих параметров выступают выборочная средняя и выборочная дисперсия  $\bar{x}_b$  и  $D_b$  соответственно [1, 4].

Генеральная средняя – среднее арифметическое значений генеральной совокупности  $\bar{x}_r$ :

$$\bar{x}_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\bar{x}_r = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots}{N} \text{ — с повторениями}$$

Выборочная средняя – среднее арифметическое значение выборки [3, 8].

То есть, имеется выборка объёма  $n$ , тогда выборочная средняя равна:

$$\bar{x}_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Выборочная средняя по данным одной выборки является определённым числом. Также выборочная средняя является несмещённой оценкой математического ожидания.

При увеличении объёма выборки  $n$  вся выборочная система стремится к генеральной средней [6, 9].

Генеральной дисперсией называют среднеарифметическое квадратное отклонение значений генеральной совокупности от их среднего значения.

$$D_{\Gamma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{\Gamma})^2;$$

Кроме дисперсий для характеристики рассеивания значений генеральной совокупности вокруг своего среднего также можно пользоваться средним квадратическим отклонением [10].

Выборочная дисперсия – среднее арифметическое квадратов отклонений, наблюдаемых значений выборки от их среднего значения.

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2$$

Справедлива также формула:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x}_{\text{в}})^2.$$

Для исправления выборочной дисперсии необходимо умножить её на дробь:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}}.$$

Получаем исправленную выборочную дисперсию, которая является несмещённой оценкой генеральной дисперсии.

Также:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n n_i (x_i - x_{\text{в}})^2}{n-1} - \text{с повторениями.}$$

Для оценки рассеивания выборки служит выборочное среднеквадратическое отклонение.

Теперь рассмотрим, как применяются перечисленные данные при решении задач.

Пример 1.

Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма  $n=30$ ;

|       |   |    |    |    |
|-------|---|----|----|----|
| $x_i$ | 1 | 2  | 4  | 21 |
| $n_i$ | 7 | 30 | 20 | 3  |

Необходимо найти несмещённую оценку генеральной средней и исправленную выборочную дисперсию.

Решение: Чтобы найти несмещённую оценку генеральной средней необходимо применить формулу:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots}{n},$$

Подставим значения из условия:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\text{в}} &= \frac{1 \cdot 7 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 20 + 21 \cdot 3}{30} = \\ &= \frac{7 + 60 + 80 + 63}{30} = \frac{210}{30} = 7. \end{aligned}$$

Зная выборочную среднюю, найдём выборочную дисперсию:

$$\begin{aligned} D_{\text{в}} &= \frac{1^2 \cdot 7 + 2^2 \cdot 30 + 4^2 \cdot 20 + 21^2 \cdot 3}{30} - 7^2 = \\ &= \frac{1770}{30} - 7^2 = 59 - 49 = 10. \end{aligned}$$

Теперь можем найти исправленную дисперсию:

$$S^2 = \frac{30}{30-1} \cdot 10 = \frac{30}{29} \cdot 10 \approx 1,03 \cdot 10 \approx 10,3.$$

Ответ:  $x_{\text{в}} = 7$ ,  $S^2 = 10,3$ .

Вывод. Таким образом, по выборочной совокупности значений, наблюдаемого количественного признака, можно вычислить точечные оценки математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.

### Список литературы

1. Бондаренко Д.В., Бражнев С.М., Литвин Д.Б., Варнавский А.А. Метод повышения точности измерения векторных величин // Наука Парк. – 2013. – № 6 (16). – С. 66–69.
2. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Финансовая математика в инвестиционном проектировании (учебное пособие) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 8–2. – С. 178–179.
3. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Совершенствование экономических механизмов для решения проблем экологической безопасности. // Информационные системы и технологии как фактор развития экономики региона: II Международная научно-практическая конференция. – 2013. – С. 68–71.
4. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Жукова В.А., Мамаев И.И. Модель экономического роста с распределенным запаздыванием в инвестиционной сфере // Вестник АПК Ставрополя. – 2017. – № 2 (26). – С. 225–228.
5. Литвин Д.Б., Долгополова А.Ф., Мелешко С.В. Совершенствование механизма управления риском экологического ущерба // Финансово-экономические проблемы развития региона и учетно-аналитические аспекты функционирования предпринимательских структур: Сборник научных трудов по материалам Ежегодной 77-й научно-практической конференции / ФГБОУ ВПО «Ставропольский государственный аграрный университет» «Аграрная наука – Северо-Кавказскому федеральному округу». 2013. С. 471–474.

6. Литвин Д.Б., Шепеть И.П., Бондарев В.Г., Литвина Е.Д. Применение дифференциального исчисления функций нескольких переменных к разработке алгоритма определения координат объекта. // Финансово-экономические и учетно-аналитические проблемы развития региона: Материалы Ежегодной 78-й научно-практической конференции. – 2014. – С. 242–246.

7. Писаренко И.Н., Королькова Л.Н., Литвин Д.Б. Необходимость исследования IDS как элемента инфраструктуры безопасности // Инновационные направления развития в образовании, экономике, технике и технологиях: Сборник статей. В 2 частях. / ФГБОУ ВПО «Донской государственный технический университет», Технологический институт сервиса (филиал). – 2016. – С. 139–142.

8. Litvin D., Ghazwan R.Q. Thinking skills product in mathematics among the students of the university // Экономические, инновационные и информационные проблемы развития региона материалы. Международной научно-практической конференции, 2014. – С. 5–9.

9. Litvin D.B. Mathematical self-concept among university students // Аграрная наука, творчество, рост: Сборник научных трудов по материалам IV Международной научно-практической конференции, 2014. – С. 326–329.

10. Litvin D.B., Popova S.V., Zhukova V.A., Putrenok E.L., Narozhnaya G.A. Monitoring of the parameters of intra-industrial differentiation of the primary industry of the traditionally industrial region of southern Russia // Journal of Advanced Research in Law and Economics. – 2015. – Т. 6; № 3. – С. 606–615.



УДК 519. 22

## ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛЕКАРСТВЕННЫХ СРЕДСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Гайворон А.Н., Писарева А.М.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: nutik.gayvoron@mail.ru

Человек, который выдвигает для рынка новое лекарство, которое может спасти человеческие жизни, считается капиталистом. Ученые бывают очень довольны, когда есть кто-нибудь, кто может применить итоги их работ в жизни. Однако многие коммунисты полагают, что ученым и артистам необходимо трудиться для общества и получать за собственную работу не более чем кто-либо другой. Общепринятой сейчас является точка зрения на математическую статистику как на науку об общих способах обработки результатов эксперимента. Современная математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирования эксперимента), в ходе исследования (последовательный анализ). Её можно определить как науку о принятии решений в условиях неопределённости. Кратко, можно сказать, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных.

**Ключевые слова:** Лекарство, наблюдения, ученые, эффективность, выздоровление, вероятность, статистика, фармацевтическая промышленность

## ASSESSMENT OF EFFICIENCY OF MEDICINAL PRODUCTS WITH USE OF METHODS OF MATHEMATICAL STATISTICS

Gajvoron A.N., Pisareva A.M.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: nutik.gayvoron@mail.ru

A person who puts forward for the market a new medicine that can save human lives is considered a capitalist. Scientists are very happy when there is someone who can apply the results of their work in life. However, many Communists believe that scientists and artists need to work for society and get for their work no more than anyone else. The conventional view now is the view of mathematical statistics as a science about the general ways of processing the results of an experiment. Modern mathematical statistics develops methods for determining the number of necessary tests before the start of the study (experiment planning), during the study (sequential analysis). It can be defined as the science of decision-making in a condition of uncertainty. Briefly, it can be said, the task of mathematical statistics is to create methods for collecting and processing statistical data.

**Keywords:** Medicine, surveillance scientists, efficiency, recovery, probability, statistics, pharmaceutical industry

Если новое лекарство получает распространение, то связано ли это с ускорением выздоровлений. Аналогично, новое лекарство может оказаться эффективным в каждом из десяти различных госпиталей, но объединение результатов укажет на то, что это лекарство либо бесполезно, либо вредно. Подтвердить выдвинутую тему хотелось бы следующим примером.

В результате длительных наблюдений установлено, что вероятность полного выздоровления больного, принимавшего лекарства А, равна 0,8. Новое лекарство В было назначено 800 больным, причём 660 из них полностью выздоровели, то есть относительная частота выздоровлений  $w=660/800=0,825$  стала

выше. Можно ли считать новое лекарство значимо эффективнее лекарства А на пяти-процентном уровне значимости?

По условию задачи примем в качестве нулевой гипотезы  $H_0$  гипотезу о том, что вероятность выздоровления  $H_0 p_0 := 0,8$ . Поскольку по результатам наблюдения  $w = 660/800 = 0,825$ , что больше чем по нулевой гипотезе  $H_0$ , то в качестве альтернативной гипотезы примем следующую:  $H_1 : p > p_0$ , что соответствует правосторонней критической области [5, 9].

Нам необходимо выяснить, является ли новое лекарство эффективнее старого. В качестве критерия возьмём величину

$$Z_{\text{набл}} = \frac{(w - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}} = \frac{(0,825 - 0,8)\sqrt{800}}{\sqrt{0,8 \cdot 0,2}} = 1,75,$$

где  $q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0,8 = 0,2$ , значение которой подчиняется стандартному нормальному распределению.

Критическое значение критерия  $Z_{кр}$  определим в зависимости от альтернативной гипотезы (типа критической области) с использованием функции Лапласа по формуле [3, 7]

$$\Phi(Z_{кр}) = \frac{1}{2} - a = \frac{1}{2} - 0,05 = 0,475,$$

откуда по таблице функции Лапласа  $Z_{кр} = 2,58$ . Поскольку  $Z_{набл} < Z_{кр}$ ,  $1,75 < 2,58$ , то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу  $H_0$ , то есть  $w=0,825$  обусловлена случайностью выборки.

Найдём интервальную оценку для вероятности выздоровления.

Если  $n > 30$  и  $np > 10$ , то распределение случайной величины

$$w = \frac{m}{n}$$

можно аппроксимировать нормальным распределением  $N(p, \sqrt{pq/n})$ . Следовательно, при этих же условиях распределение величины

$$\frac{w-p}{\sqrt{pq/n}}$$

близко к нормальному с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией [1, 8].

По аналогии, найдем такое число  $t$ , для которого справедливо равенство

$$P\left(-t < \frac{w-p}{\sqrt{pq/n}} < t\right) = \gamma.$$

Это число  $t$  является корнем уравнения  $\Phi(t) = \gamma/2$ , где  $\Phi(t)$  – функция Лапласа.

Неравенство, стоящее в скобках, разрешим относительно  $p$ . Для этого неравенство перепишем в виде эквивалентного неравенства

$$\left| \frac{w-p}{\sqrt{pq/n}} \right| < t.$$

Возведем в квадрат, в результате получим

$$(w-p)^2 < \frac{p(1-p)}{n} t^2.$$

Далее, возведя в квадрат  $(w-p)$  и перенеся все члены влево, получим

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)p^2 - \left(2w + \frac{t^2}{n}\right)p + w^2 < 0 \quad [2,6].$$

Корни  $p_1$  и  $p_2$  этого квадратного трехчлена являются границами интервальной оценки вероятности события и определяются выражениями

$$p_1 = p_{лев,\gamma} = \frac{n}{t^2 + n} \left[ w + \frac{t^2}{2n} - t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2} \right],$$

$$p_2 = p_{пр,\gamma} = \frac{n}{t^2 + n} \left[ w + \frac{t^2}{2n} + t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2} \right],$$

где  $n$  – общее число испытаний;  $w$  – относительная частота;  $t$  – значение аргумента функции Лапласа, при

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0,475$$

( $\gamma(0,95)$  – заданная надежность),  $t=1,96$ .

Если  $n \gg 100$ , то в формулах слагаемым  $\frac{t}{2n}$  можно пренебречь, тогда для вычисления  $p_1$  и  $p_2$ , можно использовать приближенные формулы [4,6]:

$$p_1 = w - t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}, \quad p_2 = w + t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}.$$

$$p_1 = 0,825 - 1,960 \sqrt{\frac{0,825(1-0,825)}{800}} = 0,799,$$

$$p_2 = 0,825 + 1,960 \sqrt{\frac{0,825(1-0,825)}{800}} = 0,851.$$

Из этого следует вывод, что лекарство В не эффективнее чем А, поскольку доверительный интервал для  $p$  с надежностью  $\gamma=0.95$  равен:

$$p_1 < p < p_2, 0,799 < p < 0,851.$$

На сегодняшний день можно полагать конкретным, что одной из главных причин, которые подводят к привычному применению лекарств, злоупотреблению ими и, в итоге, развитию токсикомании, служит способность приводить в повышенное настроение, эйфорию. Помимо этого, до сегодняшнего дня создаются все новые лекарства, которые приводят к ощущению прилива сил, бодрости, хорошего настроения, а опасность их игнорируется либо преуменьшается. Сегодня ведется спор о том, прослеживается ли настоящая токсикомания при использовании амфетаминов (фенамина, первитина), однако с каждым годом растет количество описанных в литературе моментов злоупотребления данными средствами и вызываемых ими психозов.

Фармацевтическая промышленность считается наиболее прибыльной среди всех отраслей хозяйства. Если производство медикаментов подчинено в первую очередь коммерческим интересам, если оно выступает частным бизнесом, то о важной осторожности при открытии нового лекарства, зачастую не думают.

Политики и утомленная довольством общественность в небольшом количестве богатых странах могут позволить себе роскошь поговорить о пище Франкенштейна – там кризис перепроизводства еды, однако даже в Европе никто не изъявляет желания умирать от воспаления легких либо же страдать от недостатка ключевых витаминов, по данной причине никто не нападает на новые лекарства и витамины [10].

Новый режим, который предполагает сингулярность конечного времени может заново запустить гонку за рост, даже в более ускоренном режиме, который возрастет благодаря новым открытиям, которые дадут возможность человечеству в полном объеме задействовать большие ресурсы океанов либо даже ресурсы других планет, в основном, которые располагаются вне нашей солнечной системы. Для достижения планет необходимы новые методы более ускоренного передвижения, а также революции в нашем

контроле над плохими биологическими результатами космоса на людей с его нулевой гравитацией и высокой радиацией. Новые лекарства и генная инженерия могут дать возможность людям быть готовыми к трудностям космоса, подталкивая к новой эре улучшенного быстрого роста после времени консолидации, которая находится на самой высокой точке в новой сингулярности конечного времени, через столетия в будущем.

### Список литературы

1. Бондаренко В.А., Мамаев И.И. Профессиональная направленность в обучении математике студентов биологических факультетов // Вестник АПК Ставрополя. – 2014. – № 1 (13). – С. 6–9.
2. Бондаренко Д.В., Бражнев С.М., Литвин Д.Б., Варнавский А.А. Метод повышения точности измерения векторных величин // Наука Парк. – 2013. – № 6 (16). – С. 66–69.
3. Гулай Т.А., Жукова В.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А. Математика: рабочая тетрадь. – Ставрополь, 2015.
4. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Совершенствование экономических механизмов для решения проблем экологической безопасности. // Информационные системы и технологии как фактор развития экономики региона: II Международная научно-практическая конференция. – 2013. – С. 68–71.
5. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Финансовая математика в инвестиционном проектировании (учебное пособие) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 8–2. – С. 178–179.
6. Литвин Д.Б., Шепеть И.П. Моделирование роста производства с учетом инвестиций и выбытием фондов. // Социально-экономические и информационные проблемы устойчивого развития региона: Международная научно-практическая конференция. – 2015. – С. 114–116.
7. Литвин Д.Б., Шепеть И.П., Бондарев В.Г., Литвина Е.Д. Применение дифференциального исчисления функций нескольких переменных к разработке алгоритма определения координат объекта // Финансово-экономические и учетно-аналитические проблемы развития региона: Материалы Ежегодной 78-й научно-практической конференции. – 2014. – С. 242–246.
8. Роговая Н.А., Шайтор А.К., Литвин Д.Б. Качество образования и один из путей его повышения. // Инновационные направления развития в образовании, экономике, технике и технологиях. Международная научно-практическая конференция: сборник статей в 2-х частях. под общей редакцией В.Е. Жидкова. – 2014. – С. 169–173.
9. Litvin D., Ghazwan R.Q. Thinking skills product in mathematics among the students of the university // Экономические, инновационные и информационные проблемы развития региона: материалы Международной научно-практической конференции. – 2014. – С. 5–9.
10. Litvin D.B. Mathematical self-concept among university students // Аграрная наука, творчество, рост: Сборник научных трудов по материалам IV Международной научно-практической конференции. – 2014. – С. 326–329.

УДК 519.83:338.3

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ИГР ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ

Долгополова А.Ф., Ковчина Ю.С.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: juliakovchina1998@mail.ru

Статья посвящена моделированию и анализу игровой схемы в теории игр для оптимизации выпуска продукции предприятием. Анализируемая схема разработана для организации, которая занимается выпуском сезонных товаров. Для повышения экономической целесообразности производства выпускаемых трех видов продукции предлагаются для использования чистые стратегии. Учитывая стремление организации к максимизации прибыли в условиях того, что потребитель нацелен на минимизацию своих затрат, моделируется реалистичная рыночная ситуация. Практический обзор выбранного для анализа метода показал, что именно теория игр может дать наиболее точное и полное объяснение поведения игроков с противоположными экономическими интересами. Известно, что каждый подход к рассмотрению конкретной ситуации имеет свои достоинства и недостатки, но чистые стратегии включают в себя самый оптимальный набор необходимых для анализа факторов.

**Ключевые слова:** теория игр, стратегия, седловая точка, платежная матрица

## APPLICATION OF THE GAME THEORY FOR OPTIMIZATION OF PRODUCTION

Kovchina Y.S.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: juliakovchina1998@mail.ru

The article is devoted to simulation and analysis of the game scheme in game theory for optimization of output by the enterprise. The scheme is designed for an organization that produces seasonal products. To increase the economic feasibility of producing three types of products, pure strategies are proposed for use. Given the desire of the organization to maximize profits in the context of the fact that the consumer is aimed at minimizing its costs, a realistic market situation is modeled. A theoretical review of the method chosen for the analysis showed that it is the game theory that can give the most accurate and valid explanation of the behavior of players with opposite economic interests. It is known that every approach to the consideration of a particular situation has its advantages and disadvantages, but pure strategies include the most optimal set of factors necessary for analysis.

**Keywords:** game theory, strategy, saddle point, payment matrix

Существует тесная взаимосвязь между различными разделами современной науки. Так прикладная математика обосновывает и позволяет просчитывать многие экономические явления и процессы с точки зрения закономерности и объективности. Благодаря надежности математических выводов строятся экономические теории, опирающиеся на факты и доказательную базу прикладной научной концепции [5].

Что касается экономики, то значимость теории игр можно объяснить следующим образом. По своей сущности люди всегда стремятся извлечь лично для себя максимальную выгоду из любой сделки. Логично, что их внимание сосредоточено на постижении способов достижения желаемого. По такому же принципу действует не только конкретно взятый отдельный человек, но и группы людей, а так же целые фирмы и даже огромные финансовые корпорации. Вследствие этого теории игр занимают в экономике достаточно значимое место и получили широкое практическое применение [1].

Раздел математики – теория игр, позволяет помочь в выборе наиболее рациональных стратегий с учетом представлений

о возможных поступках и ресурсах других участников. В теории игр целью является разработка и реализация рекомендаций для рационального поведения игроков в конфликтных ситуациях [4].

Это значит, что каждый из них должен определить «оптимальную стратегию» для себя. Оптимальная стратегия игрока – это стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный выигрыш или минимально возможный проигрыш. Для выбора данной стратегии необходимо руководствоваться тем, что противник является, по меньшей мере, таким же разумным, как и мы, и его действия сводятся к тому, чтобы помешать нам добиться своей цели [6].

Каждый из участников может применять одну и ту же стратегию, в таком случае про саму игру говорят, что она происходит в чистых стратегиях, а используемые игроком А и игроком В пара стратегий называются чистыми стратегиями. Элемент матрицы, соответствующий паре оптимальных стратегий, называется седловой точкой матрицы. Этот элемент является ценой игры.

Смысл седловой точки заключается в том, что игрок, односторонне отступивший от нее, проигрывает. К примеру, одностороннее отступление игрока 1 от седловой точки означает, что он выбрал стратегию не  $x_0$ , а  $x$ , в то время как второй участник по-прежнему придерживается стратегии  $y_0$  [2].

Что касается конкретного применения методов теории игр для улучшения эффективности экономической деятельности предприятия, то это может наглядно продемонстрировать следующий пример:

Фирма ООО «Времена года» занимается производством кондиционеров, сплит-систем и комнатных воздухоочистителей. Поскольку компания самостоятельно решает вопросы об изменениях в основных показателях своей деятельности, эта организация намерена оптимизировать выпуск этих трех типов. Поскольку спрос на этот продукт варьируется в зависимости от сезона, продукты, которые не продаются в течение сезона, впоследствии реализуются по более низкой цене. Данные о себестоимости продукции, отпускных ценах и объемах реализации в зависимости от уровня спроса приведены в таблице.

Для того чтобы уменьшить размер платежной матрицы, мы предполагаем, что одновременно все три типа продуктов имеют один и тот же уровень спроса: повышенный, средний или пониженный.

Игровая схема может быть представлена в следующем виде. В игре участвуют 2 игрока:

А – производитель, В – потребитель.

Игрок А – фирма ООО «Времена года», которая стремится реализовать свою продукцию таким образом, чтобы получить максимальную прибыль. Стратегии игрока А:

А1 – продавать продукцию при повышенном состоянии спроса;

А2 – продавать продукцию при среднем состоянии спроса;

А3 – продавать продукцию при пониженном состоянии спроса.

Игрок В – потребитель стремится приобрести продукцию с минимальными затратами.

Стратегии игрока В:

В1 – приобретать продукцию при повышенном состоянии спроса;

В2 – приобретать продукцию при среднем состоянии спроса;

**Таблица 1**

Себестоимость продукции, отпускные цены и объемы реализации в зависимости от уровня спроса

| Вид продукции                | Себестоимость, руб. | Цена единицы продукции, руб |              | Объем реализации при уровне спроса, шт |         |            |
|------------------------------|---------------------|-----------------------------|--------------|----------------------------------------|---------|------------|
|                              |                     | В течение сезона            | После уценки | Повышенном                             | Среднем | Пониженном |
| Кондиционеры                 | 5300                | 6590                        | 6000         | 52                                     | 34.     | 27.        |
| Сплит-системы                | 12325               | 14100.                      | 13740.       | 157                                    | 102.    | 88         |
| Комнатные очистители воздуха | 3125                | 4450                        | 3989.        | 149                                    | 121     | 105        |

Необходимо:

1) Составить игровую схему описанной ситуации, указать возможные стратегии игроков, составить платежную матрицу;

2) Сформулировать рекомендации об объемах выпуска продукции по видам, которые обеспечивают предприятию максимальную прибыль.

В3 – приобретать продукцию при пониженном состоянии спроса.

Интересы игроков А и В являются противоположными.

Определим прибыль от реализации продукции в течение сезона и после уценки (табл. 2).



Таблица 2

Прибыль от реализации продукции в течении сезона и после уценки

| Вид продукции                | Себестоимость, руб. | Прибыль в течение сезона, руб. | Прибыль после уценки, руб. |
|------------------------------|---------------------|--------------------------------|----------------------------|
| Кондиционеры                 | 5300                | 1290                           | 700                        |
| Сплит-системы                | 12325               | 1775                           | 1415                       |
| Комнатные очистители воздуха | 3125                | 1325                           | 864                        |

Данная таблица показывает, что организации во время сезона продажи продукции получает гораздо более высокую прибыль, чем после ее уценки. Так прибыль от реализации кондиционеров сокращается на 590 руб., от реализации сплит-систем – на 360 руб., а от комнатных очистителей воздуха – на 461 руб. соответственно, что является достаточно значительным уменьшением экономической выгоды фирмы.

Рассчитаем элементы платежной матрицы (матрицы прибыли).

ное решение получается при выборе стратегий А3; В3

Производитель (игрок А) получит гарантированную прибыль в размере 330155 руб., если будет реализовывать свою продукцию при пониженном уровне спроса в объеме 27, 88 и 105 ед. соответственно кондиционеров, сплит-систем и комнатных очистителей воздуха.

Таким образом, мы видим, что стабильный экономический эффект при меняющемся уровнем спроса на выпускаемую

Таблица 3

Расчет элементов платежной матрицы

| Предложение | Спрос                           |                                 |                              |                                |
|-------------|---------------------------------|---------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
|             | Стратегии                       | Повышенный спрос:<br>52+157+149 | Средний спрос:<br>34+102+121 | Пониженный спрос:<br>27+88+105 |
|             | Повышенный спрос:<br>52+157+149 | 543180 руб.                     | 499852 руб.                  | 483306 руб.                    |
|             | Средний спрос:<br>34+102+121    | 385235 руб.                     | 385235 руб.                  | 368689 руб.                    |
|             | Пониженный спрос:<br>27+88+105  | 330155 руб.                     | 330155 руб.                  | 330155 руб.                    |

Составляем платежную матрицу игры. Платежная матрица примет вид табл. 4.

продукцию в ООО «Времена года» будет достигнут при реализации трех рассматри-

Таблица 4

Платежная матрица

| Стратегии               | В1     | В2     | В3     | $\alpha_i = \min a_{ij} j$ |
|-------------------------|--------|--------|--------|----------------------------|
| А1                      | 543180 | 499852 | 483306 | 483306                     |
| А2                      | 385235 | 385235 | 368689 | 368689                     |
| А3                      | 330155 | 330155 | 330155 | 330155                     |
| $\beta_j = \max a_{ij}$ | 543180 | 499852 | 483306 |                            |

Рассчитываем нижнюю и верхнюю цену игры. Оптимальное решение матричной игры

$$\alpha = \max \alpha_i = 330155 \text{ руб.};$$

$$\beta = \min \beta_j = 330155 \text{ руб.}$$

Так как  $\alpha = \beta = v = 330155$  руб., то найдена седловая точка (А3В3). Значит, оптималь-

ваемых продуктов в условиях снижения спроса в ранее рассчитанных объемах.

Применение методов теории игр для решения проблемы оптимизации выпуска продукции на предприятии является наиболее приемлемым и целесообразным. Данный раздел и его методы позволяют корректно математически обосновать полученные

результаты моделирования игровой схемы и обосновывать вероятностные оценки полученных расчетов [3]. Все это достаточно наглядно иллюстрирует реальную рыночную ситуацию, которую, в свою очередь, теория игр помогает экономически эффективно обосновать.

#### Список литературы

1. Бондаренко В.А., Поликарпова А.А. Применение предельных величин в экономике // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5–2. – С. 142–143.
2. Долгополова А.Ф. Моделирование стратегии управления в социально-экономических системах с использованием Марковских процессов / А.Ф. Долгополова // Вестник АПК Ставрополя. – 2011. – № 1. – С. 67–69.

3. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Жукова В.А., Мамаев И.И. Модель экономического роста с распределенным запаздыванием в инвестиционной сфере // Вестник АПК Ставрополя. – 2017. – № 2 (26). – С. 225–228.

4. Манжосова И. Инновационный путь обновления средств аграрного сектора / И. Манжосова, В. Жукова, О. Цыплакова // Экономика сельского хозяйства России. – 2015. – № 4.

5. Наголова, А.Д. Практическое применение теории игр при решении задач экономического характера / А.Д. Наголова, А.Ф. Долгополова // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5–2. – С. 166–168.

6. Шабалина Т.В., Долгополова А.Ф. Применение методов теории игр при решении задач управления // Современные проблемы развития национальной экономики: X Международная научно-практическая конференция, 2017. – С. 113–116.

УДК 519.677:519.852

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ****Жукова В.А., Миронян О.Г., Федоренко А.А.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: o.mironyan@mail.ru*

В статье авторами рассматривается линейное программирование как один из способов оптимального составления планов, распределения ресурсов, оптимизации производственных мощностей в сравнение с другими плановыми производствами при помощи математического анализа. Анализируется модификация нефтепереработки и скоростного автотранспорта, в которых прогнозирование дает возможность приобрести значительных доход, либо, напротив, подсчитать недополучаемую выгоду в миллионы долларов. Раскрывается проблема о воздействии лимитированных характеристик, описывается модель поведения целевой функции в максимальном значении целевой функции в зависимости от характеристик системы. Авторами в статье дается объяснение финансовой сущности проблемы, когда система линейного программирования при скачкообразном изменении максимума целевой функции приводит к банальным изменениям параметров, описываемое на двух простых моделях. Показан главный смысл характеристик, в коих случаях происходит скачкообразная перемена функции. При этом изучение поведения мотивированной функции в окружении главных значений оказывается главным моментом максимизации маржинальной выгоды в вопросах рационального планирования.

**Ключевые слова:** линейное программирование, проблема о воздействии лимитированных характеристик, модель поведения целевой функции, маржинальная выгода в вопросах рационального планирования

**MATHEMATICAL ANALYSIS IN LINEAR PROGRAMMING****Zhukova V.A., Mironyan O.G., Fedorenko A.A.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: o.mironyan@mail.ru*

In the article, authors consider linear programming as one of the ways to optimally compose plans, allocate resources, optimize production capacities in comparison with other planned industries using mathematical analysis. The modification of oil refining and high-speed vehicles is analyzed, in which forecasting makes it possible to acquire significant income, or, on the contrary, to calculate the lost profit in millions of dollars. The problem of the impact of limited characteristics is disclosed, the model of the behavior of the objective function at the maximum value of the objective function is described depending on the characteristics of the system. The authors explain the financial nature of the problem in the article, when the linear programming system with a sudden change in the maximum of the objective function leads to banal parameter changes described in two simple models. The main sense of the characteristics is shown, in which cases a discontinuous change of function occurs. In this case, the study of the behavior of the motivated function in the constituent parts of the main values is the main point of maximizing marginal benefits in the issues of rational planning.

**Keywords:** linear programming, the problem of the effects of limited characteristics, the model of the behavior of the objective function, marginal benefits in rational planning

Главным вопросом линейного программирования является оптимальное составление планов, распределение ресурсов, оптимизация производственных мощностей в сравнение с другими плановыми производствами при помощи математического анализа. Значимым компонентом в фактическом применении математических моделей составляет многозадачность, позволяющая данным методам применяться уже как в целевой функции, так еще и не для существующей.

В математическом прогнозировании ни в коем случае невозможно участие всех условий, оказывающих большое влияние на компетенцию системы. Более того, в реальных процессах способы модификации не могут оставаться неизменными. В редких случаях постоянными могут считаться коэффициенты переменных и лишь только в линейном и нелинейном программирова-

нии. В случае если прототип воспроизводит реальность в мельчайших подробностях, то при малейших изменениях модификациях характеристик, в лучшем случае у него должны быть неизменны те черты, которые характерны для поведения данного прототипа. Подобные концепции в дифференциальных уравнениях приобрели наименования «Грубых». Как известно в задачах линейного программирования не имеется постоянной связи с характеристиками системы, параметры меняются скачкообразно при изменении значений. Тем не менее, изменение решения может быть до такой степени огромно, что оно не будет содержать никакого физического смысла. [3]

В труде изучаются разрывы целевой функции, образующиеся при изменении характеристик. В качестве дополнения проанализируем модификации нефтепереработки и скоростного автотранспорта, в которых

прогнозирование дает возможность приобрести значительных доход, либо, напротив, подсчитать недополучаемую выгоду в миллионы долларов.

Формирование скоростного автотранспорта в наш период времени является очень значимым вопросом, хотя разговоры идут только об использовании в кратчайшие сроки отдельных планов и финансовых расчетах о перспективе формирования скоростных путей. Железнодорожные пути по всей России требуют крупных муниципальных инвестиций, по этой причине актуальной остается цель построения верной математической модели расчета и способа их анализа для определения конкурентоспособности в сравнении с имеющими первенство самолетов и автомобилей.

В нефтяной сфере задачи линейного программирования обширно применяются для рационального планирования, распределения, производства и сбыта. Характерной чертой нынешней модели считается значительная размерность (применяется приблизительно 103 неустойчивых), что требует использования специализированных программ и разработки специальных критериев с целью установления корректности модели [2].

Для постановки задачи линейного программирования проанализируем проблему линейного программирования при помощи переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые приносили максимум целевой функции  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и удовлетворяли системе ограничений:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1,$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b,$$

$$j = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m,$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ ,  $b_i$  – константы  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – линейные функции

Функция меняется непрерывно при изменениях ее целевых характеристик, и лишь в угловых точках области допустимых значений ее производная может прерываться. Проанализируем проблему о воздействии лимитированных характеристик. Имеются определенные основные значения характеристик, присутствие которых существенно меняет конструкцию рационального реше-

ния, однако еще и совершает скачкообразные модификации максимума целевой функции. Подобные значения служат не только индикатором линейного программирования, но и отображают физическое и финансовое ограничения, которые требуют более тщательного математического анализа. В подобных ситуациях система перестает быть «Грубой».

С целью определения ключевых значений параметров в задачах линейного программирования, установим целевую функцию соответствующим способом:

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

где  $c_1, c_2$  – маржинальная прибыль с учетом издержек на изготовление и перевозку единиц продукции  $x_1, x_2$  соответственно [5].

Систему уравнений и ограничений запишем в виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 - x_6 = 0 \\ x_3 + x_4 = \frac{b}{2} \\ x_5 + x_6 = \frac{b}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 x_1 - R_1 x_3 - R_2 x_5 \leq 0 \\ P_2 x_2 - R_1 x_4 - R_2 x_6 \leq 0, \end{cases}$$

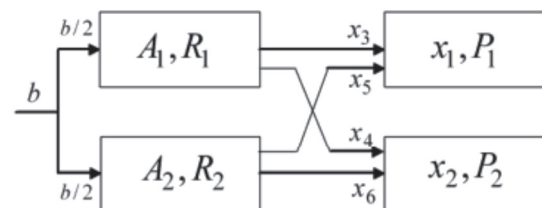
$$x_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0.$$

Здесь  $P_1, P_2, R_1, R_2, b$  – параметры задачи, которые упорядочены следующим образом  $b_1 < b_2, P_1 < P_2, R_1 < R_2$ .

Изучим модель поведения целевой функции в максимальном значении

$$\bar{L} = \max(L)$$

в зависимости от характеристик системы:



Установлено, что роль оптимальных значений  $\bar{L} = \bar{L}(c_1, c_2)$  постоянна, вогнута или кусочно-постоянна. Проведем математический анализ решения в связи с характером ограничений. Проанализируем взаимосвязь  $\bar{L} = \bar{L}(R_2)$  от параметров при фиксированном значении  $R_1 = P_1$ . При значениях  $R_2 = P_1$  и  $R_2 = P_2$  функция  $\bar{L} = \bar{L}(R_2)$   $R_2 = P_2$  переносит прерывание 1-го рода. Аналогичным образом, имеются подобные значения характеристик в системе, небольшая трансформация которых может привести к разрыву первого рода целевой функции. Именно ключевые значения параметров системы линейного программирования при скачкообразном изменении максимума целевой функции приводят к банальным изменениям параметров. Система обретает концепцию не грубости и требует вспомогательных исследований корректности прогнозирования [4].

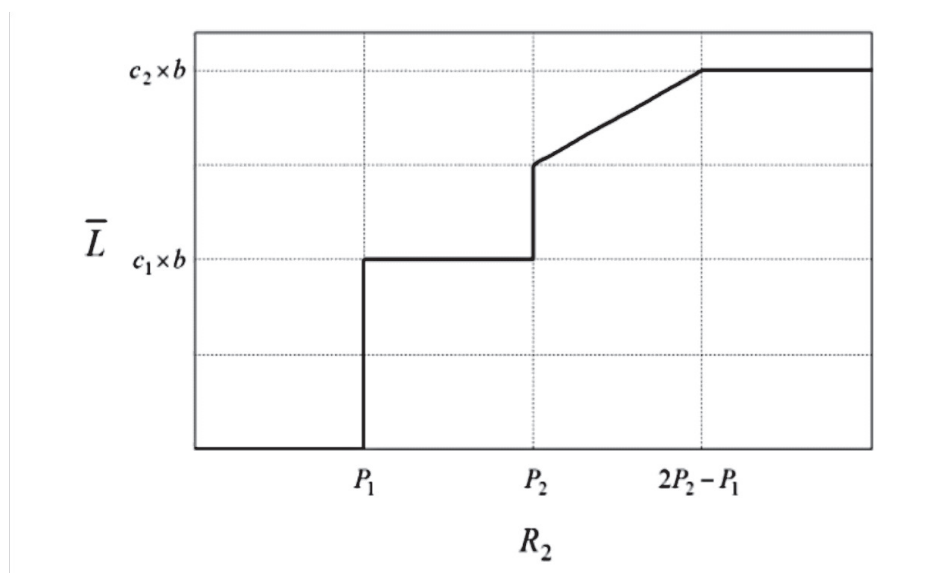
Объясним финансовую сущность проблемы на двух простых моделях.

Необходимо максимизировать доход с авиа- и железнодорожных транспортировок пассажиров, установить число пассажи-

ров в любом из типов транспорта и принять решение об эффективности одного из них в определенном регионе нашей страны. Пусть стоимость билетов на самолет составит  $P_1$ , а билетов в скоростной состав –  $P_2$ . Допустим, то что имеется 2 категории пассажиров  $A_1$  и  $A_2$ , готовых заплатить за поездку стоимость  $R_1$  и  $R_2$ . Число пассажиров в команде  $b/2$ . Доход с авиаперевозки одного пассажира –  $C_1$ , скоростного поезда –  $C_2$ . Количество пассажиров в самолете –  $X_1$ , в том числе из группы  $A_1 - x_3$ , из группы  $A_2 - x_5$ , в поезде пассажиров  $X_2$ , в том числе из группы  $A_1 - X_4$ , из  $A_2 - x_6$ .

В случае если в группах низкий платежеспособный спрос и является меньше  $R_2 < P_1$ , отсутствуют пассажиры на любой вид транспорта; при  $R_2 > P_1$  предпочтителен воздушный транспорт, при  $R_2 > P_2$  используются оба вида;  $R_2 > (2P_2 - P_1)$  – только высокоскоростные поезда.

Таким образом, когда имеется платежеспособный спрос  $A_2$  такой, что  $R_2 > (2P_2 - P_1)$  оказывается действенным на практике – скоростной автотранспорт, так как пассажиры эконом-класса имеют все шансы совместно с пассажирами бизнес-класса испытывать минимальные ограничения.





Таким образом, из пересмотренной модификации возможно совершить следующие заключения:

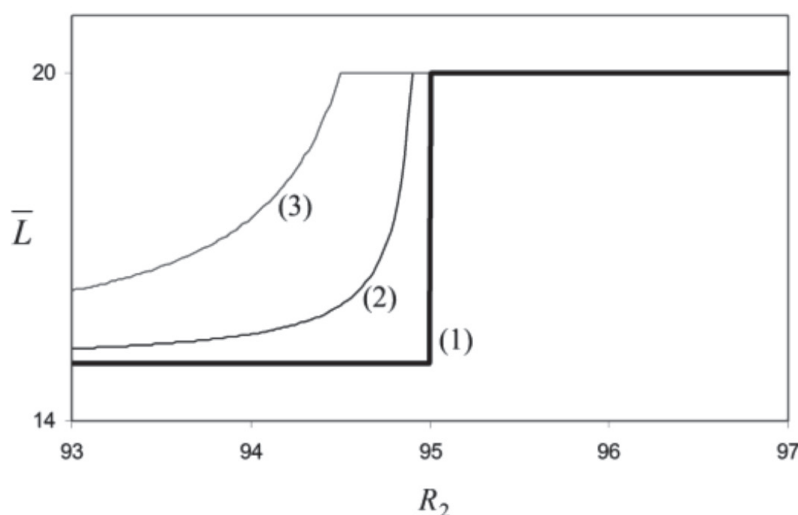
– улучшать скоростной автотранспорт имеет толк только лишь в том случае, когда имеется реальный спрос;

– при моделировании особое внимание надлежит отдать правильному определению основных характеристик с целью оценки финансовой эффективности.

При ключевых значениях параметров  $R_1 = P_1$  и  $R_2 = P_2$  целевая функция  $\bar{L} = \bar{L}(R_2)$  терпит разрыв. Данная организация утрачивает свойство грубости при малейшем изменении свойства материалов и обозначается изменением перечня материалов. Математическая модель, стремительно изменяет собственные действия при небольшом изменении характеристик, которые на физическом уровне никогда не могут измеряться конкретно, порождает при этом дополнительные научно-технические сведения.

В данном случае, который описывается системой линейного программирования, изучены главные закономерности поведения рационального заключения задачи в зависимости от его характеристик. Показан главный смысл характеристик, в коих случаях происходит скачкообразная перемена функции и потребуется выполнить тест адекватности самой модели, направив свое внимание на правильность моделирования главных характеристик.

Как раз изучение поведения мотивированной функции в окружи главных значений считается главным моментом максимизации маржинальной выгоды в вопросах рационального планирования. При данном тесте чувствительности рационального заключения к характеристикам мотивированной функции, оказывается наименьшее воздействие на итог и обязан проводиться во вторую очередь.



Пример численного поиска ключевых значений: отбор специальных значений характеристик в системе реальных моделей линейного программирования, обрисовываемых некоторыми тысячами уравнений, является затруднительным. К сожалению, задача осложняется еще и тем, что принятие решений в системах линейного программирования происходит лишь при конкретных параметрах. Однако в негрубых моделях можно провести диагностику численно, проводя вычисления около ограничений, за счет того, что она меняет свою манеру не только в определенной точке, но и около нее.

### Список литературы

1. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 2 // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – №2. – С. 81–82.
2. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б., Донец З.Г. Экономико-математическое моделирование факторов экономического анализа посредством метода линейного программирования // Аграрная наука, творчество, рост: сборник научных трудов по материалам IV Международной научно-практической конференции / Ответственный за выпуск Т.А. Башкатова, 2014. – С. 329–332.
3. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Мелешко С.В. Математические методы исследования экономических процессов // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 12–1. – С. 116–117.
4. Долгополова А.Ф., Колодяжная Т.А. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 1. // Международный журнал экспериментального образования. – 2011. – №12. – С. 62–63.
5. Попова С.В., Курбанов М.Р.М. Использование интегралов в экономике // Современные социально-экономические аспекты развития региональной экономики: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции молодых ученых, 2016. – С. 230–233.

УДК 51-7:355

**ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ВОЕННОМ ДЕЛЕ****Жукова В.А., Рыбалко Р.С., Шульга Ю.В.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: super.rina311997@yandex.ru*

В статье описывается применение математических методов в военном деле. Раскрываются исторические предпосылки формирования и развития самой математики как фундаментальной науки. Поскольку математика применяется во всех областях науки и жизни общества, то нельзя исключать взаимосвязь ее с военным делом. Авторами указывается факт попытки использования математики в военном деле с древности, тем самым подтверждается тесная связь математических методов и военного дела. В статье упоминаются великие учёные, которые внесли существенный вклад в формирование математики в военном деле. Так, применение математических методов сыграли важную роль в сфере проектирования, исследования и производства вооружения, а также в теории кораблестроения, в исследовании военной техники. Решение важных проблем теоретической и экспериментальной аэродинамики сыграли значительную роль в развитии военной реактивной авиации.

**Ключевые слова:** математика, военное дело, вооружения, теория кораблестроения, аэродинамика, военная реактивная авиация.

**APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS IN THE MILITARY MATTER****Zhukova V.A., Rybalko R.S., Shulga Y.V.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: super.rina311997@yandex.ru*

The article describes the application of mathematical methods in military affairs. The historical prerequisites for the formation and development of mathematics as a fundamental science are revealed. Since mathematics is applied in all areas of science and society, it cannot be excluded from its relationship with the military. The authors indicate the fact of the attempt to use mathematics in military affairs from antiquity, thereby confirming the close relationship of mathematical methods and military science. The article mentions the great scientists who contributed a substantial amount of goods to the formation of the advancement of mathematics in military affairs. Thus, the application of mathematical methods of activity played an important role in the field of design, research activities and production of arms dependence, as well as in the theory of shipbuilding, in the study of the provision of military equipment external. Solving important problems of profit theoretical and experimental advancement of aerodynamics establishment played a significant more role in the development of active military jet delivery of aviation.

**Keywords:** mathematics, military science, armaments, shipbuilding theory, aerodynamics, military jet aviation

Отсутствует конкретная дата возникновения математики установлено лишь то, что она возникла ещё до нашей эры. Математика как фундаментальная наука применяется практически во всех сферах жизни общества. Формирование и развитие математики началось с тех времен как человек стал использовать числа, например, три апельсина и два банана. Общество стало использовать числа для расчёта времени, дней месяцев, количества тех или иных предметов и т.д. Через некоторое время знания о математике заполнили наш мир. Их применяли в различных видах деятельности, в первую очередь в торговле строительстве, производстве различных предметов, в том числе и оружия [3].

Современному обществу математика весьма необходима так как нас абсолютно со всех сторон охватывают компьютеры и числа. С помощью математики, возможно, анализировать тексты, извлекать информацию и находить смысл. Высокий уровень развития математики нужен для прогресса

многочисленных наук. Сложно отыскать подобную сферу, где математика не играла бы практически никакой роли. Военная математика адаптированная к военным нуждам, имела ещё у вавилонян. Многочисленные области современной математики, также получили развитие со стороны военных задач [2].

Попытка использования математики в военном деле обнаруживается еще в древности. В военно-теоретических работах Ксенофонта (Греция), Полибия, Вегепия (Рим), Сунь-цзы (Китай) встречаются элементы количественного подхода к рассмотрению отдельных проблем военного дела. Существенный вклад в формирование математики внёс древнегреческий учёный Архимед (около 287 – 212 до нашей эры), у которого знания механики, физики, военного дела совмещались с использованием математики с целью решения практических задач. Именно Архимед сделал множество открытий в математике и показал, как она применяется в военных целях. Использо-

ние математики в баллистике впервые изложено в книгах итальянца Н. Тарталья «Новая наука» (1537), «Вопросы и открытия, относящиеся к артиллерийской стрельбе» (1546) [1].

В конце 18 – начале 19 столетия в связи с ростом производства и совершенствованием вооружения массовых регуляторных армий и флотов наступает обширное применение математических методов в сфере проектирования, исследования и производства вооружения.

А.Н. Крылов удачно применял математический аппарат в теории кораблестроения, а также для расчёта продольных колебаний ствола артиллерийского орудия при выстреле.

Применение математики в аэродинамике, зародившейся связи с необходимостями авиации в начале XX века, обеспечило разработку научной теории, и создания методов расчёта подъёмной силы крыла.

В годы Великой Отечественной войны огромный вклад в исследовании военной техники привнесли советские математики. Благодаря трудам М.В. Келдыша, М.А. Лаврентьева, а позже и А.А. Дородницына были решены важные проблемы теоретической и экспериментальной аэродинамики, которые сыграли значительную роль в развитии военной реактивной авиации. Широко известны работы А.Н. Колмогорова по использованию математических методов в теории стрельбы. Группой исследователей под руководством С.А. Христиановича на основе математических расчётов были проведены работы по повышению кучности пороховых реактивных снарядов.

Разработать методы защиты кораблей от минного и торпедного оружия, было доверено Ленинградскому физико-техническому институту. Идею размагничивания предложили и реализовали эксперты во главе с академиком А.П. Александровым, тем самым оказав значительную помощь Военно-Морским Силам [5].

Андрей Николаевич Колмогоров решил проблему повышения эффективности огня артиллерии. Теория вероятностей использовалась для местонахождения самолётов и подводных лодок врага, для указания путей, позволяющих избежать встречи с подводными лодками противника.

М.В. Келдышев совместно с командой учёных решил задачу разрушения самолётов из-за вибрации. Сложная математическая теория флаттера обеспечила самолёты надёжной защитой от возникновения вибраций.

История и современное состояние применения математики в военном деле демонстрируют, что связь военной науки и практической деятельности вооружённых сил с математикой есть непрерывно развивающийся во времени объективный процесс. Количество военных задач, решаемых с помощью математических методов и средств автоматизации, особенно в сфере прогнозирования развития военной науки, военной техники и оружия, а также при выработке решений, постоянно растёт [7].

Проанализируем наиболее глубоко математику в военном деле. Математика считается одним из мощных инструментов познания и применения законов вооружённой борьбы в теории и практике военного дела.

Математика способна гарантировать следующее полное формирование военного дела. Математика предоставляет возможность детально проанализировать сущность процессов вооружённой борьбы, раскрыть её количественные закономерности, таким образом, отыскать оптимальные решения и варианты военных действий. Эффективное использование математики в области военного искусства оказалось возможным благодаря применению электронных и вычислительных машин, способных за короткое время решать сложные и трудоёмкие задачи, связанные с нахождением оптимальных решений [10].

Смысл использования математических методов в процессах управления боевыми действиями войск состоит в том, чтобы, применяя знания законов, закономерностей и принципов вооружённой борьбы, уменьшить сроки подготовки принимаемых решений и увеличить их качество, достичь существующими силами и средствами лучших итогов военных действий. Использование математических методов в совмещении с электронными вычислительными машинами предоставляет возможность решать задачи подобного рода, обеспечивая довольно стремительный и точный прогноз хода боевых действий с целью рассмотрения любых возможных вариантов решений [9].

Математика в нынешних условиях представляет немаловажную значимость в исследовании вооружённой борьбы и применении обнаруженных зависимостей и закономерностей, которые проявляют свое действие посредством основы военного искусства. Математика дает возможность более полно учитывать и осуществлять данные принципы, с помощью формирования количественных рекомендаций исходя

из учета определенных реальных условий боевой деятельности. В этом как раз и кроются возможности математики, так как анализ и учет конкретных количественных изменений могут привести к качественным изменениям. Военное искусство считается средоточием боевого опыта, накопленного на протяжении многочисленных веков [6].

Для того чтобы выявить и установить закономерность вооруженной борьбы, понадобились исследования и анализ многовекового навыка ведения войн. До возникновения электронных вычислительных машин и методов моделирования боевых действий это был единственно верный путь. Однако по мере формирования прикладной математики положение изменяется. Математика предоставляет возможность моделировать боевые действия, а, следовательно, и выявить основные взаимосвязи в процессах ведения вооруженной борьбы [4].

Иными словами, математика предоставляет возможность вскрывать и устанавливать закономерности ведения вооруженной борьбы, используя электронно-вычислительные машины и строя разнообразные модели. Моделирование боевых действий – отличный инструмент в руках военачальников для прогнозирования возможных исходов боевых действий. Если моделирование боевых действий – это универсальный метод, в таком случае прочие математические методы, предоставляют широкие возможности решения частных задач при осуществлении принципов военного искусства.

Применение различных методов оптимизации боевых действий своих войск как раз и является сущностью в использовании математики в военном деле. Задача математики – более точно учитывать количественные изменения. Таким образом, математика и ЭВМ предоставляют командирам абсолютно всех рангов возможность связывать основные философские категории: количество, меру и качество, и тем самым становятся в руках командира важным оружием, призванным помогать ему, достигать успехов в решении поставленных задач. Такая работа помогает понять то, что математика является мощнейшим инструментом познания и применения законов вооруженной борьбы в теории и практике военного дела, кроме того может обеспечить его глубокое развитие [8].

В военной теории и практике используются почти все без исключения разделы современной математики. В жизни существует большое количество ситуаций, где необходимо использование математических знаний. Не только в военных целях, но и в других профессиях. Математика заставляет нас думать, анализировать. В математике вовсе нет лжи, все формулы и теоремы имеют строгое доказательство. Математика развивает способность к логическому мышлению, что дает возможность человеку жить интересно и никогда не скучать. Чем бы мы в дальнейшем ни занимались, что бы мы ни выбирали, знания математики нам будут необходимы.

### Список литературы

1. Гулай Т.А. Математика: Рабочая тетрадь / Т.А. Гулай, В.А. Жукова, С.В. Мелешко, И.А. Невидомская. – Ставрополь, 2015.
2. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Мелешко С.В. Математические методы исследования экономических процессов // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 12–1. – С. 116–117.
3. Мамаев И.И. Теория вероятностей и математическая статистика в аграрном вузе / Мамаев И.И., Бондаренко В.А., Шибанов В.П. // Финансово-экономические проблемы развития региона и учетно-аналитические аспекты функционирования предпринимательских структур. – 2013. – С. 478–482.
4. Мелешко С.В., Воропаева Д.С., Пшеничная П.И. Применение математических методов в биологии // Аграрная наука Северо-Кавказскому Федеральному округу: сборник научных трудов по материалам 81-й Ежегодной научно-практической конференции / Отв. за вып. Т.А. Башкатова, 2016. – С. 201–205.
5. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б., Мелешко С.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. – Ставрополь, 2013.
6. Долгополова А.Ф., Колодяжная Т.А. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 1 // Международный журнал экспериментального образования. – 2011. – № 12. – С. 62–63.
7. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 2 // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – №2. – С. 81–82.
8. Долгополова А.Ф., Мелешко С.В., Цыплакова О.Н. Применение анализа чувствительности модели при восстановлении финансового равновесия предприятия // Аграрная наука Северо-Кавказскому Федеральному округу: Сборник научных трудов по материалам 80-й Ежегодной научно-практической конференции / Ставропольский государственный аграрный университет; Редакционная коллегия: Е.И. Костюкова, М.Г. Лещева, А.Н. Герасимов, Ю.М. Склярова, Н.В. Кулиш, И.И. Глотова, Д.Б. Литвин, А.В. Фролов, 2015. – С. 98–103.
9. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б., Мелешко С.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие – Ставрополь, 2013.
10. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Финансовая математика в инвестиционном проектировании (учебное пособие). // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 8–2. – С. 178–179.



УДК 519.2:336.77

**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СФЕРЕ КРЕДИТОВАНИЯ****Заргарян Н.Р., Лубянская М.В.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: nat.zargarian@yandex.ru*

В современном мире для решения многих задач в экономической сфере и сфере финансов применяются различные методы математики и статистики, основывающиеся на базовых понятиях и законах теории вероятностей. В настоящее время теория вероятностей применяется в различных сферах науки, экономики, техники. Особое место в этом вопросе занимает сфера кредитования. В статье описывается история возникновения теории вероятностей, рассматривается связь математических методов теории вероятностей в сфере кредитования, а также создание математических моделей для определения кредитной ставки. Особое внимание уделено применению теории вероятностей в экономике. Создание экономико-математических моделей, опирающихся на теорию вероятностей, позволяет провести планирование, исследование и прогнозирование экономических явлений. Также описывается решение ситуационных задач на конкретных примерах.

**Ключевые слова:** теория вероятностей, экономика, кредитование, банк, кредитная организация, процент, займ, обязательства, статистика, анализ

**APPLICATION OF THE PROBABILITY THEORY IN THE LENDING SPHERE****Zargaryan N.R., Lubyanskaya M.V.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: nat.zargarian@yandex.ru*

In the modern world, various methods of mathematics and statistics are used to solve many problems in the economic sphere and in the sphere of finance, based on the basic concepts and laws of probability theory. At present, probability theory is applied in various fields of science, economics, and technology. A special place in this matter is the sphere of crediting. The article describes the history of the emergence of probability theory, examines the relationship between mathematical methods of probability theory in the sphere of credit, and the creation of mathematical models for determining the credit rate. Particular attention is paid to the application of probability theory in the economy. The creation of economic and mathematical models, based on the theory of probability, allows you to plan, study and forecast economic phenomena. Also describes the solution of situational problems on specific examples.

**Keywords:** probability theory, economics, crediting, bank, credit organization, interest, loan, obligations, statistics, analysis

Теория вероятностей берёт свое начало в первой четверти XVII в. Поскольку область ее применения XVII-XVIII вв. из-за невысокого уровня естествознания ограничивалась узким кругом вопросов, таких как страхование, азартные игры, демография, то теория вероятностей в то время не смогла получить молниеносного развития. Однако с XIX в. в связи с практической необходимостью, теория вероятностей стремительно развивается и находит применение в различных сферах науки, экономики, техники. Например, теория ошибок наблюдений, теория стрельбы, статистика, молекулярная и атомная физика, химия, метеорология, вопросы планирования, статистический контроль в производстве и так далее.

В наши дни нет области знаний, в которых не использовались бы методы, например, стохастики, включающей в себя части теории вероятностей и математической статистики.

Использование вероятностно-статистических способов является традиционным в физике, геодезии, биологии, экономике, лингвистике, психологии, теории обучения и так далее. Теория вероятностей – ма-

тематическая основа статистики – науки XX века, а развитие статистических и кибернетических идей способствовало значительному возрастанию прикладного значения теории вероятностей [8].

В XVII веке французы П. Ферма, Б. Паскаль и голландец Х. Гюйгенс впервые попытались дать определение вероятности. В середине XIX века благодаря работам известного математика и механика П. Чебышева и его последователей А. Ляпунова и А. Маркова теорию вероятностей в мире стали величать «русской наукой». Данные исследования продолжили С. Бернштейн, А. Хинчин и А. Колмогоров, Б. Гнеденко, Ю. Прохоров, Б. Севастьянов, Ю. Линник и другие [9].

По мнению Лапласа «теория вероятностей – это здравый смысл», который сведен к исчислению. Пьер-Симон говорил о ней, что «нет науки, более достойной наших размышлений» и что «было бы полезно ввести ее в систему народного просвещения». Его призыв услышало общество и в программу средней школы включена стохастическая линия.

В современном мире для решения многих задач в экономической сфере и сфере



финансов применяются различные методы математики и статистики, основывающиеся на базовых понятиях и законах теории вероятностей. В условиях современной экономической ситуации теория вероятностей является важной частью в повышении квалификации профессионалов в области экономики и финансов [3].

Теория вероятностей считается первостепенной среди математических наук, которая изучает законы, управляющие случайными величинами.

В России заинтересованность теорией вероятностей возникла в начале XIX в. Большую пользу в развитие этой науки принесли такие русские ученые, как П.Л. Чебышев, А.М. Ляпунов, А.А. Марков.

Теория вероятностей – наука, изучающая применение специфических методов, способствующих решению задач, возникающих в процессе рассмотрения случайных величин. Она выявляет закономерности, относящиеся к массовым явлениям. Данные методы не определяют итог случайного явления, но могут показать суммарный результат. Таким образом, если мы изучим законы, которые управляют случайными событиями, то сможем при необходимости изменить исход этих событий.

Одной из первостепенных областей применения теории вероятностей является экономика. Планирование, исследование и прогнозирование экономических явлений невыполнимы без создания экономико-математических моделей, опирающихся на теорию вероятностей.

Коммерческие банки в настоящее время управляют широким спектром операций денежно-кредитного характера, но их основная деятельность – выдача кредитов. В настоящее время у банков возникает опасность – кредитный риск. Он обуславливается вероятностью выполнения кредитозаемщиком всех обязательств соглашения по объемам и срокам. Степень вероятности формируется способностью заемщика погашать кредитные обязательства [10].

Рассмотрим пример 1. Человек, взявший кредит, должен его вернуть. Однако он возвращает деньги частями, также выплачивает фиксированный процент за пользование кредитом. По прошествии определенного времени кредитозаемщик должен вернуть всю сумму, которую он брал в кредит, а также плату за его пользование. Но при некоторых обстоятельствах, когда он не может выполнить условия договора, банк с помощью судебного иска накладывает взыскание и

компенсирует свои потери. Однако главной задачей для банка является выдача кредитов и извлечение из этого прибыли, а не наложение штрафов. Ввиду этого банкам выгоднее выдавать кредиты только тем, в ком он может быть уверен, что ссуда будет возвращена точно в срок и с процентами.

Появляется случайная величина – возвращен кредит или нет. Для того чтобы узнать, надежен ли кредитуемый или нет, банк анализирует общую характеристику, личные доходы, собственный капитал, экономическую ситуацию в целом. В этот перечень так же относится кредитовая история заемщика, процент людей, которые вернули денежные средства в определенный срок того социального положения, к которому относится заемщик и так далее. Анализ проводится методами теории вероятностей и математической статистики. Несмотря на это банк своей главной целью ставит получение прибыли, а не компенсацию, полученную с людей, которые не смогли выплатить кредит, поэтому каждой банковской организации выгоднее предоставлять кредиты в тех ситуациях, когда имеются гарантии выплаты кредитованной суммы.

Таким образом, образуется величина, которая случайна и показывает возможность человека погасить кредит. Для того чтобы определить категорию граждан, которым можно выдать кредит, кредитная организация рассматривает и изучает статистику. Проводится анализ процентного соотношения в срок вернувших кредитов и всю кредиторскую историю в целом. Методами и способами математической статистики и теории вероятностей происходит анализ и оценка.

Проанализируем задачу 2 на определение кредитной ставки. Кредитная организация G выдает кредит 1000000 рублей на 1 год. Вероятность не погашения ссуды 1 %. Определите размер процентной ставки для получения прибыли.

Обозначим процентную ставку  $p$  (100%). Доход кредитной организации обозначим случайной величиной, так как заемщику нужно вернуть кредит в совокупности с процентами, но при этом он может его не вернуть. Составим закон распределения, где  $p$  – условия возврата кредита с процентами, а прибыль банка получается  $p$  млн руб:

|      |      |
|------|------|
| $p$  | $-1$ |
| 0,99 | 0,01 |

Таким образом, вероятность возврата 99%.

1 % невозврата, когда банк теряет 1000000 рублей, показываем как доход, равный -1.

Определим математическое ожидание:

$$0,99p - 0,01.$$

Следовательно, решив неравенство  $0,99p - 0,01 > 0$ , мы приходим к тому, что  $p > 1/99$ , тогда ставка процента по кредиту должна быть выше, чем 1 % (100/99).

Главным риском при выдаче кредита значится вероятность того, что заёмщик не сможет вовремя выполнить обязательства. Ликвидный и процентный риск зависят от кредитного. Это обуславливается, в первую очередь, тем, что основной причиной кризиса ликвидности является очень высокий уровень кредитного риска, проявляющийся в том, что большие суммы кредитов не погашаются. Договоры о ссудах не обеспечивают колоссальных доходов, так как заемщики не возвращают больше, чем прописано в договоре, очень часто кредитруемые возвращают меньше, чем было указано в договоре. Частично возвращенная сумма или долг при погашении ведут к уменьшению дохода банка и кредитному риску.

Рассмотрим задачу 3. Пусть банковская организация *W* привлекла сумму в 60 ден. ед., сроком хранения 0,2 года (73 дня), ставка процента годовых – 30 % и внес в полном размере в кредит сроком погашения 0,2 года и процентной ставкой 50 % годовых. Чистый доход, который получит банк за 73 дня (0,2 года) при совершении этой депозитно-кредитной операции и при кредитном риске равном 0, получится:

$$0,2(0,5 \cdot 60 - 0,3 \cdot 60) = 2,4 \text{ ден.ед.}$$

Сделаем предположение – вероятность не погашения кредита 20 %, следовательно, сумма прибыли, с учетом появившегося кредитного риска:

$$0,2((1 - 0,2)0,5 \cdot 60 - 0,3 \cdot 60) = 1,2 \text{ ден.ед.}$$

Анализ результатов подсчетов позволяет сделать вывод: если уровень кредитного риска 20 %, то доход понижается. Таким образом, для покрытия убытка в прибыли, банковской организации нужно повысить кредитную ставку процента.

Банк является одним из главных и надежных институтов в мире, который являет собой основу стабильной и развитой системы экономики.

На сегодняшний день имеет место быть нестабильная экономическая и правовая атмосфера банковского института, при ко-

торой банкам необходимо обязательно сохранять и увеличивать вложенные суммы вкладчиков. Кредитные операции – это основа банковской системы. Именно они являются главной частью банковской прибыли.

В нынешних условиях рыночной экономики, в ситуации связанной с экономическими рисками максимальную прибыль получает умеющий рассчитать, заметить и распознать кредитные риски, спрогнозировать их и минимизировать. Это главная причина успешности банка в кредитно-денежной политике. Банк, анализируя все статистические денежные характеристики клиента, способен не только охарактеризовать кредитоплатежность фирмы, но и помочь в активизации резервов бизнеса и, как следствие, стать более надежным заёмщиком.

### Список литературы

1. Бондаренко В.А. Задачи с экономическим содержанием на занятиях по дифференциальному исчислению / В.А. Бондаренко, О.Н. Цыплакова // Актуальные вопросы теории и практики бухгалтерского учета, анализа и аудита: ежегодная 75-я научно-практическая конференция, 2011. – С. 124–127.
2. Бондаренко В.А. Теоретико-вероятностные модели в задачах экономики природопользования / В.А. Бондаренко, И.И. Мамаев, П.А. Сахнюк, Т.И. Сахнюк // Экономические, инновационные и информационные проблемы развития региона: материалы Международной научно-практической конференции. – 2014. – С. 62–65.
3. Гулай Т.А. Математика: Рабочая тетрадь / Т.А. Гулай, В.А. Жукова, С.В. Мелешко, И.А. Невидомская, Ставрополь, 2015.
4. Гулай Т.А. Математические методы исследования экономических процессов / Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова, С.В. Мелешко // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 12–1. – С. 116–117.
5. Жукова В.А. Математические методы как средство анализа экономической ситуации предприятий АПК / В.А. Жукова, И.А. Невидомская // Экономические и социальные проблемы регионов в условиях развития информационного общества: сборник материалов Международной научно-практической конференции. – 2017. – С. 91–95.
6. Литвин Д.Б. Модель экономического роста с распределением запаздыванием в инвестиционной сфере / Д.Б. Литвин, Т.А. Гулай, В.А. Жукова, И.И. Мамаев // Вестник АПК Ставрополя. – 2017. – № 2 (26). – С. 225–228.
7. Мамаев И.И. Использование математического анализа в построении модели налогообложения / И.И. Мамаев, В.А. Жукова // Экономические и информационные проблемы развития региона: оценка, тенденции, перспективы. – 2016. – С. 181–185.
8. Мамаев И.И. Математическое моделирование как метод нивелирования коррупции в экономике / И.И. Мамаев, В.А. Жукова // Аграрная наука Северо-Кавказскому Федеральному округу: сборник научных трудов по материалам 80-й Ежегодной научно-практической конференции. Ставропольский государственный аграрный университет, 2015. – С. 221–224.
9. Мамаев И.И. Модели азартных игр на занятиях по теории вероятностей / И.И. Мамаев, В.А. Жукова // Экономические и информационные аспекты развития региона: теория и практика: международная научно-практическая конференция. Ставропольский государственный аграрный университет, 2015. – С. 172–176.
10. Морозова О.В. Математическая статистика для экономических специальностей на базе EXCEL (практикум) / О.В. Морозова, А.Ф. Долгополова, Н.Н. Тынянко, Е.В. Долгих, Р.В. Крон, С.В. Попова, Н.Б. Смирнова, А.А. Демчук // Международный журнал экспериментального образования. – 2009. – № 54. – С. 21.

УДК 519.22:51-77

**ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ЭКОНОМИКЕ****Захарова В.С., Неснова Е.В.***ФГБОУ ВО Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь,  
e-mail: vika.zaxarova.98@mail.ru*

Данная статья посвящена изучению применения математической статистики в экономике и рассмотрению операций купли-продажи. Зачастую в экономике приходится иметь дело не только с известными событиями, но и с явлениями, которые не имеют точных значений, а лишь подлежат оценочному описанию. Исходя из этого в статье рассматриваются такие понятия как: вероятность и случайные величины, позволяющие предугадать изменения в экономике и предпринимательстве. Любое экономическое исследование всегда предполагает объединение теории (экономической модели) и практики (статистических данных). Во многих своих разделах математическая статистика опирается на теорию вероятностей, позволяющую оценить надёжность и точность выводов, делаемых на основании ограниченного статистического материала (например, оценить необходимый объём выборки для получения результатов требуемой точности при выборочном обследовании). Основным элементом экономического исследования является взаимосвязь экономических переменных, что показано в данной работе.

**Ключевые слова:** экономика, математическая статистика, вероятность, случайные величины, дисперсия

**THE APPLICATION OF MATHEMATICAL STATISTICS IN THE ECONOMY****Zakharova V.S., Nesnova E.V.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: vika.zaxarova.98@mail.ru*

This paper studies the application of mathematical statistics in Economics and the review of operations of purchase and sale. Often in Economics we have to deal not only with the known events, but also with phenomena that have no exact values, but only subject assessment description. On this basis the article considers such notions as: probability and random variables, allowing to predict changes in the economy and entrepreneurship. Any economic study always involves the unification of theory (economic model) and practice (statistics). In many sections of its mathematical statistics relies on probability theory, allowing to assess the reliability and accuracy of the findings made on the basis of a limited statistical material (for example, to estimate the required sample size to produce results of the desired precision sampling). The primary element of economic study is the interrelationship of economic variables that are shown in this work.

**Keywords:** economics, mathematical statistics, probability, random variables, variance

При описании разнообразных систем регулярно возникает необходимость рассматривать совокупность величин разной природы, взаимосвязанных между собой. Так, например, при рассмотрении операций купли-продажи элементами системы будут являться:

- продукция, характеризующаяся количеством единиц товара, а также разнообразием (тип товара) и его качественными показателями;
- деньги, характеризующиеся единственным показателем – суммой;
- информация – совокупность сообщений о значениях всех величин, образующих систему, и об их изменениях.

В экономической деятельности, и в особенности в предпринимательстве, приходится иметь дело не только с уже известными событиями (как, например, количество проданной вчера продукции), но и с будущими явлениями, не характеризующимися точными значениями и поддающимися лишь оценочному описанию. При математическом моделировании таких событий используется понятие вероятности. Характеристики, при-

нимающие различные значения в каждом отдельном случае (например, количество продукции, которая будет продана в определённый день), называют случайными величинами (СВ) [5, 8].

Для описания СВ важно знание о том, каково множество её значений. Так, при подбрасывании монетки исход эксперимента может принимать одно из двух значений, а при бросании простого игрального кубика – одно из шести. Для неслучайной, детерминированной СВ множество значений состоит из одного элемента. Все такие СВ, множество значений которых конечно, называются дискретными. Если же, например, исследователя интересуют координаты места падения брошенной монетки, то возможных значений оказывается бесконечно много, и тогда СВ называется непрерывной. От этого свойства – дискретности либо непрерывности – зависит применяемый метод описания. [4]

При многократной реализации дискретной СВ можно определить частоту, с которой она принимает каждое из возможных значений. Из теории вероятностей известно

утверждение, что при увеличении количества испытаний каждая из частот сходится к некоторому пределу, всегда находящемуся в промежутке от 0 до 1. Этот предел и называется вероятностью. Таким образом, вероятность реализации СВ в виде фиксированного значения – это частота появления искомого значения при бесконечном числе опытов. Обычно вероятность обозначается латинской буквой  $P$ :  $P(X)$  – вероятность наступления события  $X$ . Если в случае дискретной СВ вероятность события равна 1, то событие происходит при каждом опыте и называется достоверным; если вероятность равна 0, то событие называется невозможным и никогда не происходит [1, 9].

Из сказанного видно, что при любом множестве значений дискретной СВ сумма вероятностей появления этих значений равна 1. Так, при бросании симметричного шестигранного игрального кубика вероятность выпадения каждого из значений от 1 до 6 равна  $\frac{1}{6}$ ; если же кубик не симметричен, то эти шесть значений могут быть другими, но их сумма по-прежнему равна 1 [7].

|       |               |               |               |               |               |               |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$ | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             |
| $p_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Каждую дискретную СВ можно описать в виде таблицы, в которой выписаны все возможные её значения вместе с их частотами. Такую таблицу можно называть выборочным распределением. Можно вместо таблицы использовать графическое изображение – гистограмму [3].

Распределение наблюдаемой случайной величины, отражённое в такой таблице или гистограмме, содержит все сведения о ней, которые возможно добыть в результате экспериментов. С другой стороны, в практической деятельности бывает необходима дополнительная информация, как, например, сколько мы в среднем будем выигрывать при бросании кубика, получая при каждом броске выигрыш, равный выпавшему значению? В приведённом примере среднее значение, полученное при непосредственных наблюдениях, вычисляется как:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times p_i. \quad (1)$$

$$M(X) = 1 \cdot 0,140 + 2 \cdot 0,080 + 3 \times \\ \times 0,200 + 4 \cdot 0,400 + 5 \cdot 0,100 + 6 \times \\ \times 0,080 = 3,48.$$

В общем случае применяется понятие математического ожидания, определяемое как сумма всех значений СВ, умноженных на соответствующие вероятности. Если  $P(X_i)$  — вероятность появления значения  $X_i$  случайной величины  $X$ , то математическое ожидание

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

В случае симметричного кубика оно примет вид

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + \\ + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5.$$

Можно отметить, что математическое ожидание является пределом средних значений при стремлении числа опытов к бесконечности.

Помимо вычисления среднего значения важно бывает также определить, насколько сильно оказывается нарушена симметрия, то есть насколько велик разброс значений относительно математического ожидания. Это приводит к необходимости введения понятия дисперсии, которая в общем случае выражается по формуле:

$$D(X) = M(((X - M(X))^2)) ; \quad (2)$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \quad (3)$$

Справедлива также формула (3), по которой дисперсия выражается через разность среднего квадрата и квадрат её среднего значения. В рассмотренном случае можно убедиться, что  $D(X) = 14,04 - 3,48^2 \approx 1,93$ .

Из формул видно, что дисперсия имеет размерность второй степени. Чтобы избежать этого, часто рассматривают среднеквадратичное отклонение  $\sigma(X)$ , равное квадратному корню из дисперсии.



$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)} \quad (4)$$

В разобранным примере среднее квадратичное отклонение будет равно 1,389.

В случае, когда распределение СВ состоит из единственного значения, дисперсия равна 0. И наоборот, при броске правильного кубика среднее значение квадрата отклонения равно

$$(12 + 22 + 32 + 42 + 52 + 6^2) \frac{1}{6} \approx 15,167,$$

а дисперсия вычисляется как  $15,167 - 12,25 = 2,917$ . Отсюда видно, что наибольшее рассеивание значений отмечается при равномерном распределении, то есть когда вероятности значений СВ равны между собой.

Поскольку математическое ожидание  $M(X)$  и среднее квадратичное отклонение  $S(X)$  имеют ненулевую размерность, имеет смысл рассматривать их отношение, являющееся безразмерным, или коэффициент вариации:

$$V(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)}. \quad (5)$$

В рассмотренном выше случае получим

$$V(X) = \frac{1,389}{3,48} = 0,399.$$

Эта величина представляет собой одну из допустимых оценок «случайности» данной случайной величины.

Таким образом, ключевыми характеристиками случайной величины являются её математическое ожидание – предел средних значений – и дисперсия, являющаяся мерой разброса её значений относительно середины. Если величина детерминирована, то есть определена, то её математическое ожидание равно её значению, а коэффициент вариации и дисперсия равны нулю. У равномерно распределённых случайных величин последние два показателя достигают наибольшего значения [2].

Одна из важнейших особенностей введённых математических характеристик заключается в удобной возможности их обобщения на случай непрерывной СВ. Их распределение задаётся кривой на координатной плоскости, каждая точка которой

соответствует вероятностной мере (плотность вероятности). При построении математической модели вместо простого суммирования, как для дискретных СВ, в случае непрерывности происходит вычисление интеграла. Как правило, при рассмотрении непрерывных случайных величин не требуется рассчитывать вероятность определённого, точного значения; чаще всего задача сводится к нахождению вероятности попадания значения СВ в фиксированный промежуток. Чтобы найти вероятность принятия СВ значения, не превосходящего аргумента (функция распределения), достаточно проинтегрировать на указанном промежутке кривую вероятности [6].

### Список литературы

1. Бондаренко Д.В., Бражнев С.М., Литвин Д.Б., Варнавский А.А. Метод повышения точности измерения векторных величин // Наука Парк. – 2013. – № 6 (16). – С. 66–69.
2. Гулай Т.А., Жукова В.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А. Математика: рабочая тетрадь. – Ставрополь, 2015.
3. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Финансовая математика в инвестиционном проектировании (учебное пособие). // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 8–2. – С. 178–179.
4. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Совершенствование экономических механизмов для решения проблем экологической безопасности. // Информационные системы и технологии как фактор развития экономики региона. II Международная научно-практическая конференция, 2013. – С. 68–71.
5. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Жукова В.А., Мамаев И.И. Модель экономического роста с распределенным запаздыванием в инвестиционной сфере // Вестник АПК Ставрополья. – 2017. – № 2 (26). – С. 225–228.
6. Литвин Д.Б., Шепеть И.П. Моделирование роста производства с учетом инвестиций и выбытием фондов // Социально-экономические и информационные проблемы устойчивого развития региона: Международная научно-практическая конференция, 2015. – С. 114–116.
7. Литвин Д.Б., Шепеть И.П., Бондарев В.Г., Литвина Е.Д. Применение дифференциального исчисления функций нескольких переменных к разработке алгоритма определения координат объекта // Финансово-экономические и учетно-аналитические проблемы развития региона: Материалы Ежегодной 78-й научно-практической конференции, 2014. – С. 242–246.
8. Роговая Н.А., Шайтор А.К., Литвин Д.Б. Качество образования и один из путей его повышения // Инновационные направления развития в образовании, экономике, технике и технологиях. Международная научно-практическая конференция: сборник статей. В 2 ч. / под общ. ред. В.Е. Жидкова, 2014. – С. 169–173.
9. Litvin D.B., Popova S.V., Zhukova V.A., Putrenok E.L., Narozhnaya G.A. Monitoring of the parameters of intra-industrial differentiation of the primary industry of the traditionally industrial region of southern Russia // Journal of Advanced Research in Law and Economics. – 2015. – Т. 6; № 3. – С. 606–615.



УДК 303.722.2:658.81

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ РАСЧЕТА ИЗМЕНЕНИЯ ВАЛОВОЙ ПРОДУКЦИИ

Иванникова И.А.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: inessa.ivannikova19@mail.ru

Эффективное функционирование предприятия возможно при экономически грамотном управлении его деятельностью. Важная роль в реализации этой задачи отводится методам абсолютных и относительных разниц. Хозяйственная деятельность предприятия и ее результаты представляются в форме показателей, имеющих количественное и стоимостное значение, которые могут быть выражены в форме абсолютных и относительных величин. Абсолютная величина показателей хозяйственной деятельности предприятия отражает их количественные характеристики, представленные в единицах объема, веса, стоимости и т.д., безотносительно к другим показателям. Соответственно анализ абсолютных изменений того или иного показателя сводится к выявлению отклонения сто фактической величины от плановой, расчетной и т.д. Анализ с использованием относительных величин позволяет определить влияние одного из факторов хозяйственной деятельности предприятия на величину результативного показателя в зависимости от изменения других факторов.

**Ключевые слова:** цепные подстановки, элиминировать, мультипликативная модель

## APPLICATION OF METHODS OF ABSOLUTE AND RELATIVE DIFFERENCES FOR CALCULATION CHANGE IN GROSS OUTPUT.

Ivannikova I.A.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol,  
e-mail: inessa.ivannikova19@mail.ru

Effective functioning of the enterprise is possible with economically competent management of its activities. An important role in the realization of this task is given to the methods of absolute and relative differences. The economic activities of an enterprise and its results are presented in the form of indicators that have a quantitative and cost value, which can be expressed in the form of absolute and relative values. The absolute value of the indicators of the economic activity of the enterprise reflects their quantitative characteristics, presented in units of volume, weight, cost, etc., irrespective of other indicators. Accordingly, the analysis of absolute changes of a given indicator is reduced to revealing a deviation of one hundred of the actual value from the planned, calculated, etc. Analysis of the use of relative values makes it possible to determine the impact of one of the factors of the enterprise's economic activity on the magnitude of the resultant indicator, depending on changes in other factors. Keywords: method of chain substitutions, elimination, multiplicative model.

**Keywords:** chain substitutions, eliminate, multiplicative model

Задача детерминированного факторного анализа заключается в определении или количественной оценке влияния каждого фактора на результативный показатель. Наиболее часто применяется способ цепных подстановок, основанный, как и ряд других, на элиминировании. Элиминировать – это значит устранить, исключить воздействие всех факторов на величину результативного показателя, кроме одного [1].

Способ исчисления абсолютных разниц представляет собой набор определенных модификаций. Он применяется для определения влияния отдельных факторов на результативный показатель в мультипликативных и мультипликативно-аддитивных моделях. Суть его состоит в последовательном исчислении разницы между частными показателями и определении влияния этой разницы на обобщающий показатель

при неизменных других частных показателей способа цепных подстановок.

Метод исчисления разниц имеет недостаток, суть которого сводится к возникновению неразложимого остатка, который присоединяется к числовому значению влияния последнего фактора [2].

В связи с этим величина влияния факторов на изменение результативного показателя меняется в зависимости от места, на которое поставлен тот или иной фактор в детерминированной модели [5].

Метод абсолютных разниц основан на нахождении разности между фактической и базисной величиной частных показателей с последующим определением найденной таким образом величины на изменение обобщающего показателя. Алгоритм расчета и последовательность замены частных показателей аналогична способу

цепных подстановок, но влияние частного показателя на результативный рассчитывается сразу [3].

В связи с этим, все показатели, предшествующие исчисляемому изменению частного показателя, берутся в их фактическом значении, а последующие показатели – в базисном. Применяется в мультипликативных моделях и смешанных моделях типа:

$$y = a(b - c).$$

При его использовании величина влияния факторов на изменение результативного показателя рассчитывается умножением абсолютного прироста исследуемого фактора на плановую (базовую) величину факторов, которые находятся в модели справа от него, и на фактическую величину факторов, расположенных слева от него.

Способ относительных разниц удобно применять в тех случаях, если требуется рассчитать влияние большого числа факторов: от 3 до 10 и более. В отличие от предыдущих способов, здесь значительно сокращается число вычислительных процедур, что обуславливает его преимущество [4].

Данный способ значительно проще цепных подстановок, что при определенных обстоятельствах делает его очень эффективным. Это прежде всего касается тех случаев, когда исходные данные содержат уже определенные ранее относительные приросты факторных показателей в процентах или коэффициентах [6].

Рассмотрим применение методов факторного анализа при анализе следующей практической ситуации:

Имеются следующие данные:

- среднегодовая численность работников, чел. (план. – 903; факт. – 909);
- среднечасовая выработка, руб. (план. – 31; факт. – 33);
- количество отработанных дней 1 рабочим за год, дней (план. – 247; факт. – 251);
- средняя продолжительность рабочего дня, часов (план. – 8; факт. – 7.9).

Мультипликативно-факторная модель следующего вида:

$$ВП = ЧР \times Д \times П \times ЧВ.$$

Определить количественное изменение валовой продукции за счет каждого из факторов, используя способы абсолютных и относительных разниц.

Исходные данные для решения задачи

| Наименование показателя                             | Условное обозначение | План     | Факт       | Отклонение (+ ; -) | Выполнение плана, % |
|-----------------------------------------------------|----------------------|----------|------------|--------------------|---------------------|
| Валовая продукция, руб.                             | ВП                   | 55314168 | 59481051,3 | 4166883,3          | 107,5               |
| Среднегодовая численность работников, чел.          | ЧР                   | 903      | 909        | 6                  | 100,7               |
| Количество отработанных дней 1 рабочим за год, дней | Д                    | 247      | 251        | 4                  | 101,6               |
| Средняя продолжительность рабочего дня, часов       | П                    | 8        | 7,9        | -0,1               | 98,8                |
| Среднечасовая выработка, руб.                       | ЧВ                   | 31       | 33         | 2                  | 106,5               |

Способ абсолютных разниц:

$$ВП = ЧР \times Д \times П \times ЧВ \quad (1)$$

$$\Delta ВП_{ЧР} = (ЧР_{ф} - ЧР_{пл}) \times Д_{пл} \times П_{пл} \times ЧВ_{пл} = 367536,0 \text{ руб.} \quad (2)$$

$$\Delta ВП_{Д} = ЧР_{ф} \times (Д_{ф} - Д_{пл}) \times П_{пл} \times ЧВ_{пл} = 901728,0 \text{ руб.} \quad (3)$$

$$\Delta ВП_{П} = ЧР_{ф} \times Д_{ф} \times (П_{ф} - П_{пл}) \times ЧВ_{пл} = -707292,9 \text{ руб.} \quad (4)$$

$$\Delta ВП_{ЧВ} = ЧР_{ф} \times Д_{ф} \times П_{ф} \times (ЧВ_{ф} - ЧВ_{пл}) = 3604912,2 \text{ руб.} \quad (5)$$

Способ относительных разниц:

$$\Delta \text{ЧР}\% = \frac{(\text{ЧР}_\Phi - \text{ЧР}_{\text{ПЛ}})}{\text{ЧР}_{\text{ПЛ}}} 100\%; \quad (6)$$

$$\Delta \text{ЧР}\% = \frac{6}{903} 100\% = 0,664451827;$$

$$\Delta \text{Д}\% = \frac{(\text{Д}_\Phi - \text{Д}_{\text{ПЛ}})}{\text{Д}_{\text{ПЛ}}} 100\%; \quad (7)$$

$$\Delta \text{Д}\% = \frac{4}{247} 100\% = 1,619433198;$$

$$\Delta \text{П}\% = \frac{(\text{П}_\Phi - \text{П}_{\text{ПЛ}})}{\text{П}_{\text{ПЛ}}} 100\%; \quad (8)$$

$$\Delta \text{П}\% = \frac{-0,1}{8} 100\% = -1,25$$

$$\Delta \text{ЧВ}\% = \frac{(\text{ЧВ}_\Phi - \text{ЧВ}_{\text{ПЛ}})}{\text{ЧВ}_{\text{ПЛ}}} 100\% \quad (9)$$

$$\Delta \text{ЧВ}\% = \frac{2}{31} 100\% = 6,451612903;$$

$$\Delta \text{ВП}_{\text{ЧР}} = \frac{\text{ВП}_{\text{ПЛ}} \times \Delta \text{ЧР}\%}{100}; \quad (10)$$

$$\Delta \text{ВП}_{\text{ЧР}} = \frac{55314168,0 \times 0,664451827}{100} = 367536,0 \text{ руб.}$$

$$\Delta \text{ВП}_{\text{Д}} = \frac{(\text{ВП}_{\text{ПЛ}} + \Delta \text{ВП}_{\text{ЧР}}) \Delta \text{Д}\%}{100} \quad (11)$$

$$\Delta \text{ВП}_{\text{Д}} = \frac{(55314168,0 + 367536,0) \times 1,619433198}{100} = 901728,0 \text{ руб.}$$

$$\Delta \text{ВП}_{\text{П}} = \frac{(\text{ВП}_{\text{ПЛ}} + \Delta \text{ВП}_{\text{ЧР}} + \Delta \text{ВП}_{\text{Д}}) \Delta \text{П}\%}{100} \quad (12)$$

$$\Delta \text{ВП}_{\text{П}} = \frac{(55314168,0 + 367536,0 + 901728,0) (-1,25)}{100} = -707292,9 \text{ руб.}$$

$$\Delta \text{ВП}_{\text{ЧВ}} = \frac{(\text{ВП}_{\text{ПЛ}} + \Delta \text{ВП}_{\text{ЧР}} + \Delta \text{ВП}_{\text{Д}} + \Delta \text{ВП}_{\text{П}}) \times \Delta \text{ЧВ}\%}{100}; \quad (13)$$

$$\Delta \text{ВП}_{\text{ЧВ}} = \frac{(55314168,0 + 367536,0 + 901728,0 - 707292,9) 6,451612903}{100} = 3604912,2 \text{ руб.}$$

Проверка:

$$\Delta \text{ВП} = \Delta \text{ВП}_{\text{ЧР}} + \Delta \text{ВП}_{\text{Д}} + \Delta \text{ВП}_{\text{П}} + \Delta \text{ВП}_{\text{ЧВ}} \quad (14)$$

$$\Delta \text{ВП} = 367536,0 + 901728,0 - 707292,9 + 3604912,2 = 4166883,3 \text{ руб.}$$

Произведенные нами расчеты свидетельствуют о том, что:

- в планируемом году среднегодовая численность работников уменьшилась в связи с изменением валовой продукции на 367536 руб.;

- в планируемом году количество отработанных дней одним рабочим за год уменьшится за счет изменения валовой продукции на 901728 руб.;

- в планируемом году средняя продолжительность рабочего дня возрастет в связи с изменением валовой продукции на – 707292,9 руб.;

- в планируемом году среднечасовая выработка уменьшилась за счет изменения валовой продукции на 3604912,2 руб.

Таким образом, использование методов абсолютных и относительных разниц в производственной задаче позволяет рассчитать изменение валовой продукции предприятия, провести анализ его деятельности и разработать перспективный план развития предприятия.

### Список литературы

1. Бондаренко В.А., Мамаев И.И., Сахнюк П.А., Сахнюк Т.И. Решение задачи планирования посевов с использованием теории игр / Экономические, инновационные и информационные проблемы развития региона: материалы Международной научно- практической конференции. – 2014. – С. 56–62.
2. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б. Государственное регулирование в системе агробизнеса // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона, 2012. – С. 202–207.
3. Долгополова А.Ф. Моделирование стратегии управления в социально-экономических системах с использованием марковских процессов // Вестник АПК Ставрополя. – 2011. – № 1 (1). – С. 67–69.
4. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Финансовая математика в инвестиционном проектировании (учебное пособие) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 8–2. – С. 178–179.
5. Манжосова И. Инновационный путь обновления средств аграрного сектора / И. Манжосова, В. Жукова, О. Цыплакова // Экономика сельского хозяйства России. – 2015. – № 4.
6. Математическая статистика для экономических специальностей на базе EXCEL (практикум) / О.В. Морозова, А.Ф. Долгополова, Н.Н. Тынянко, Е.В. Долгих, Р.В. Крон, С.В. Попова, Н.Б. Смирнова, А.А. Демчук // Международный журнал экспериментального образования. – 2009. – № 84. – С. 21.

УДК 621.316.5

## РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦЫ И ЕЕ ДЕТЕРМИНАНТА

Искандарова К.Р., Чубанов А.А.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: alav26@mail.ru

Статья посвящена матричному методу расчета электрических цепей. В ней рассмотрены основные теоретические понятия. На примере показана практичность и рациональность матричного метода в электротехнической инженерной практике. Использование матричных методов расчета позволяет оформить процесс составления уравнений электромагнитного баланса цепи, а также упорядочить ввод данных в ЭВМ, что особенно существенно при расчете сложных разветвленных схем. Также поднимаются вопросы взаимодействия математики и техники в целом. В этой статье мы разберем расчет электрических цепей с использованием матрицы и ее детерминанта, который применяется на практике. Для этого необходимо вспомнить, что такое матрица и ее детерминанты. Рассмотрим, с какой целью в электротехнике применяют матричные методы расчета сложных электрических цепей.

**Ключевые слова:** матричный метод, электрическая цепь, матрица и ее детерминант

## CALCULATION OF ELECTRICAL CIRCUITS WITH THE USE OF A MATRIX AND ITS DETERMINANT

Iskandarova K.R., Chubanov A.A.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: alav26@mail.ru

The article is devoted to the matrix method for calculating electrical circuits. In it the basic theoretical concepts are considered. The practicality and rationality of the matrix method in electrical engineering practice are shown on an example. The use of matrix calculation methods makes it possible to formalize the process of drawing up the equations of the electromagnetic balance of a circuit, and also to order the input of data into a computer, which is especially important in the calculation of complex branched circuits. Questions of interaction of mathematics and engineering in general are also raised. In this article, we will analyze the calculation of electrical circuits using the matrix and its determinant, which is used in practice. For this, it is necessary to recall what the matrix and its determinants are. Let's consider, for what purpose in electrotechnology apply matrix methods of calculation of complex electric circuits.

**Keywords:** Matrix method, the electric circuit, matrix and its determinant

В настоящее время трудно переоценить значение инженерной практики в современном мире науки и техники. Инженеры пользуются огромными познаниями в математике, стимулируют научно-технический прогресс, результаты которого определяют поступательное развитие общества. Однако стоит отметить, что данное развитие имеет место, только при тесном взаимодействии математики и технической практики. Инженерное дело, как область интеллектуальной деятельности человека, не может быть реализовано без математического аппарата, на основе которого решаются основные научно-технические задачи. Соответственно и математика не имела бы возможности интенсивного развития, если бы не являлась основным инструментом в научно-технической деятельности. Это значит, что математика и инженерное дело взаимно дополняют друг друга. Таким образом, мы приходим к выводу, что современный инженер, воплощающий инновационные идеи, не может обойтись без уверенных знаний математики [3, 8].

Например, инженер-электротехник для решения основных задач в своей области, в част-

ности расчет параметров электрических цепей, использует уравнения Кирхгофа в матричной форме. В данном случае мы наблюдаем, как благодаря линейной алгебре и ее методам, значительно упрощается процесс длительных расчетов, а значит, увеличивается эффективность инженерной деятельности.

Рассмотрим базовую теорию. Матрица – это прямоугольная таблица чисел, в которой содержатся  $m$  строк (или  $n$  столбцов) идентичной длины [7].

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

сокращенно можно записать, где  $i = 1, \bar{m}$  (то есть  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ) – номер строки,  $j = 1, n$  (то есть  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ) – номер столбца [6].

Матрицу размером  $m \times n$  называют матрицу  $A$  и обозначают  $A_{m \times n}$ . Элементами составляющие матрицу, называются числа  $a_{ij}$ . Элементы, стоящие на диагонали и идущие из верхнего угла, образуют главную диагональ. Матрица, имеющая одинаковое



количество столбцов и строк, называется квадратной [1, 2].

Квадратной матрице  $A$   $n$ -го порядка можно сопоставить число  $\det A$  (или  $|A|$ , или  $\Delta$ ), называемое ее детерминантом, таким образом:

$$n = 1. \quad A = (a_1); \quad \det A = a_1.$$

$$n = 2. \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$n = 3. \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{13} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Минором некоторого элемента  $a_{ij}$  детерминанта  $n$ -го порядка называется детерминант  $n-1$ -го порядка, получившийся из исходного с помощью вычеркивания столбца и строки, на пересечении которых находится выбранный элемент [2].

Алгебраическим дополнением элемента  $a_{ij}$  детерминанта называется минор, взятый со знаком «+», если сумма  $i+j$  – четное число, и со знаком «-», если сумма нечетная. Обозначается как  $A_{ij}$ :  $A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$ .

Метод Крамера – это способ решения систем линейных алгебраических уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных с нулевым главным детерминантом матрицы коэффициентов системы [5].

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \bar{n} \quad (\text{Формула Крамера})$$

На примере продемонстрируем расчет электрической цепи с помощью данной теории.

#### Пример 1.

Дана электрическая цепь (рисунок). Надо определить токи в ветвях, с помощью законов Кирхгофа. Параметры элементов

электрической цепи следующие:  $R_1=45 \text{ Ом}$ ,  $R_2=15 \text{ Ом}$ ,  $R_3=45 \text{ Ом}$ ,  $R_4=75 \text{ Ом}$ ,  $E_1=60 \text{ В}$ ,  $E_2=450 \text{ В}$ .

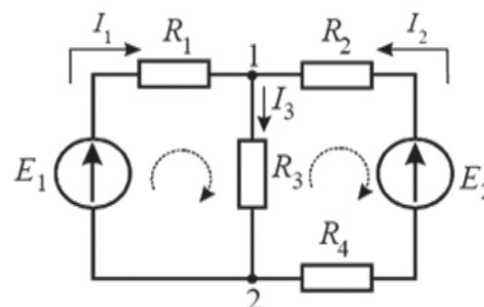


Схема электрической цепи

**Решение.** Необходимо выбрать положительные направления искомых токов ветвей и обозначить их на схеме.

Составим уравнение, используя первый закон Кирхгофа для узла 1. Выбрав направления обходов контуров, можно записать уравнение по второму закону Кирхгофа. В итоге можно получить систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 = E_1 \\ -I_2 (R_2 + R_4) - I_3 R_3 = -E_2 \end{cases}$$

Решаем полученную систему по методу Крамера с помощью детерминантов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & -90 & -45 \end{vmatrix} = 10125;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 60 & 0 & 45 \\ -450 & -90 & -45 \end{vmatrix} = 12150;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 45 & 60 & 45 \\ 0 & -450 & -45 \end{vmatrix} = 37800;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 45 & 0 & 60 \\ 0 & -90 & -450 \end{vmatrix} = 25650;$$

Находим значения токов по формуле Крамера

$$I_1 = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{12150}{10125} = 1,2 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{37800}{10125} = 3,73 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{25650}{10125} = 2,53 \text{ А}.$$

### Пример 2.

Второй закон Кирхгофа используется для метода контурных токов. С помощью этого метода можно уменьшить число уравнений в системе на  $n-1$ . Достигается это разделением схемы на ячейки (независимые контуры) и введением для каждого контура-ячейки своего тока – контурного тока, являющегося расчетной величиной. В заданной системе рассмотрим три контура-ячейки и введем для них контурные токи  $I_{k1}$ ,  $I_{k2}$ ,  $I_{k3}$ . Смежными ветвями называются ветви, принадлежащие двум смежным контурам. В них действительный ток равен алгебраической сумме контурных токов смежных контуров, с учетом их направления. При составлении этих уравнений по второму закону Кирхгофа алгебраически суммируются ЭДС источников в левой части равенства, входящих

в контур-ячейку. В правой части равенства алгебраически суммируются напряжения на сопротивлениях, входящих в этот контур, а также учитывается падение напряжения на сопротивлениях смежной ветви, определяемое по контурному току соседнего контура. На основании ранее приведенного материала контурные токи рассчитываются следующим образом:

$$E_1 = I_{k1}(r_{01} + R_1 + R_3 + R_4) + I_{k2}R_3 - I_{k3}R_4;$$

$$E_2 = I_{k1}R_3 + I_{k2}(r_{02} + R_2 + R_3 + R_5) + I_{k3}R_5;$$

$$0 = -I_{k1}R_4 + I_{k2}R_5 + I_{k3}(R_4 + R_5 + R_6).$$

Подставляем в уравнение численные значения ЭДС и сопротивлений:

$$40 = 102I_{k1} + 24I_{k2} - 41I_{k3};$$

$$20 = 24I_{k1} + 93I_{k2} + 16I_{k3};$$

$$0 = -41I_{k1} + 16I_{k2} + 118I_{k3}.$$

Решим систему с помощью определителей. Вычислим определитель системы  $\Delta$  и частные определители  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 102 & 24 & -41 \\ 24 & 93 & 16 \\ -41 & 16 & 118 \end{vmatrix} = 1119348 - 15744 - 15744 - \\ -156333 - 67968 - 26112 = 837447.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 40 & 24 & -41 \\ 20 & 93 & 16 \\ 0 & 16 & 118 \end{vmatrix} = 438960 - 13120 - 56640 - 10240 = 358960;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 102 & 40 & -41 \\ 24 & 20 & 16 \\ -41 & 0 & 118 \end{vmatrix} = 240720 - 26240 - 33620 - 113280 = 67580;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 102 & 24 & 40 \\ 24 & 93 & 20 \\ -41 & 16 & 0 \end{vmatrix} = -19680 + 111360 + 152520 - 236640 = 115560;$$

Вычисляем контурные токи:

$$I_{k1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{358960}{837447} = 0,429 \text{ А}.$$

$$I_{k2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{67580}{837447} = 0,081 \text{ A.}$$

$$I_{k3} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{115560}{837447} = 0,138 \text{ A.}$$

Действительные токи ветвей:

$$I_1 = I_{k1} = 0,429 \text{ A;}$$

$$I_6 = I_{k3} = 0,138 \text{ A;}$$

$$I_1 = I_{k1} = 0,081 \text{ A;}$$

$$I_3 = I_{k1} + I_{k2} = 0,429 + 0,081 = 0,510 \text{ A;}$$

$$I_4 = I_{k1} - I_{k3} = 0,429 - 0,138 = 0,291 \text{ A;}$$

$$I_5 = I_{k2} + I_{k3} = 0,081 + 0,138 = 0,219 \text{ A.}$$

#### Список литературы

1. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Задачи с экономическим содержанием на занятиях по дифференциальному

исчислению // Актуальные вопросы теории и практики бухгалтерского учета, анализа и аудита: ежегодная 75-я научно-практическая конференция. – 2011. – С. 124–127.

2. Гулай Т.А., Гатауллина К.Р., Фурсов Д.И., Применение классического метода при математическом расчете переходных процессов // Международный студенческий научный вестник. – 2017. – № 4–4. – С. 511–513.

3. Гулай Т.А., Желтяков В.И., Применение систем линейных алгебраических уравнений при расчете электрических цепей // Международный студенческий научный вестник. – 2017. – № 4–4. – С. 522–524.

4. Гулай Т.А., Жукова В.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А., Математика: рабочая тетрадь. – Ставрополь, 2015.

5. Гулай Т.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А., Применение технических средств обучения в процессе математической подготовки студентов инженерных направлений // Вестник АПК Ставрополя. – 2014. – № 1 (13). – С. 10–13.

6. Долгополова А.Ф., Колодяжная Т.А. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 1 // Международный журнал экспериментального образования. – 2011. – № 12. – С. 62–63.

7. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 2 // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – № 2. – С. 81–82.

8. Мелешко С.В., Зорина Е.Б., Попова С.В., Гулай Т.А., Самостоятельная работа как важнейшее средство повышения профессионально-познавательной и творческой активности будущих специалистов // Theoretical & Applied Science. – 2016. – № 11 (43). – С. 135–138.

УДК 517.958

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Каланчук И.В., Попов Н.И.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: igor.kalanchuk@gmail.com

Приведены обзор и систематизация, а так же рассмотрены методы решения задач в математической физике посредством дифференциальных уравнений первого и второго порядков, классификация дифференциальных уравнений. Такой подход дал возможность получить необходимые условия оптимальности. Математические модели естественнонаучных явлений и процессов зачастую представляют собой задачи, содержащие дифференциальные уравнения с частными производными первого и второго порядков. Дифференциальные уравнения существенные для физики, механики техники называют дифференциальными уравнениями математической физики. Рассмотрено квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Рассмотрено линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. Для получения общего решения уравнения рассмотрена характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведен пример применения дифференциальных уравнений к решению различных прикладных, в том числе инженерно-технических задач.

**Ключевые слова:** методы решения, математическая физика, дифференциальные уравнения

## DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Kalanchuk I.V., Popov N.I.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: igor.kalanchuk@gmail.com

Provides an overview and systematization, as well as the methods of solving problems in mathematical physics by differential equations of first and second order, classification of differential equations. This approach provided the opportunity to obtain necessary optimality conditions. The mathematical models of science phenomena and processes often represent tasks containing a differential equation with partial derivatives of first and second order. Differential equations are essential in physics, mechanics technique called differential equations of mathematical physics. Considered a quasilinear differential equation in partial derivatives of first order. We consider linear partial differential equations of second order with two independent variables. To obtain the General solution of the equation considered characteristic system of ordinary differential equations. The example of application of differential equations to the solution of various applications, including engineering tasks.

**Keywords:** methods of solution, mathematical physics, differential equations

Основными уравнениями математической физики для случая, когда искомая функция  $u$  зависит от двух независимых переменных, являются следующие дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.

I. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это уравнение является простейшим уравнением с частными производными второго порядка гиперболического типа. К решению такого уравнения сводятся задачи о поперечных колебаниях струны и продольных колебаниях стержней, о звуковых и электромагнитных колебаниях, о колебаниях газа и т.д.

II. Волновое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это уравнение является простейшим уравнением параболического типа. К решению такого уравнения сводятся задачи

о распространении тепла в однородной среде, о фильтрации жидкостей и газов, некоторые вопросы теории вероятностей и т.д.

III. Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

представляющее простейшее уравнение эллиптического типа. К решению этого уравнения сводятся задачи о свойствах стационарных электрических и магнитных полей, о стационарном распределении тепла в однородном теле, задачи гидродинамики, диффузии и т.д.

Замечание 1. В общем при постановке задачи исследования следует учитывать, что физическое явление может носить одномерный, двухмерный и трёхмерный характер, а также быть стационарным (не меняющимся во времени).

Двухмерное волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

которое описывает колебания мембраны и поверхности несжимаемой жидкости.

В конкретных задачах, сводящихся к уравнениям математической физики, всегда ищется не общее, а частное решение уравнения, удовлетворяющее некоторым дополнительным определённым условиям, вытекающим из физических соображений и особенностей данной задачи.

Таковыми дополнительными условиями являются:

а) начальные условия, относящиеся обычно к начальному моменту времени ( $t = 0$ ), с которого начинается изучение данного явления;

б) граничные условия, то есть условия, заданные на границе рассматриваемой среды (области), внутри которой находится решение составленного ими данного дифференциального уравнения.

Совокупность начальных и граничных условий называется краевыми условиями.

Задача, состоящая в нахождении частного решения уравнений при начальных условиях называется задачей Коши.

Задача математической физики, в которой учитываются как начальные, так и граничные условия, называется смешанной задачей (задачей Коши общего вида).

Для решения уравнений математической физики обычно применяются:

а) метод Даламбера (метод характеристик),  
б) метод Фурье (метод разделения переменных).

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$a(x, y) \frac{du}{dx} + b(x, y) \frac{du}{dy} = c(x, y, u). \quad (1)$$

Для получения общего решения уравнения (1) рассматривают характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений [3]:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}. \quad (2)$$

Если  $c=0$ , то система сводится к одному уравнению

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}.$$

Если  $f(x, y) = C$  общий интеграл уравнения, тогда

$u = w(f(x, y))$  – общее решение.

Само дифференциальное уравнение содержит в себе только самую общую информацию об описываемом процессе. Необходимо задание начальных и граничных условий, для конкретизации.

Дифференциальные уравнения математической физики второго порядка. Большое количество процессов и явлений в физике описывается с помощью дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, это связано с тем, что фундаментальные законы физики – законы сохранения – записываются в терминах вторых производных [2, 5].

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$a(x, y) \frac{d^2 w}{dx^2} + 2b(x, y) \frac{d^2 w}{dx dy} + c(x, y) \frac{d^2 w}{dy^2} = F\left(x, y, w, \frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dy}\right), \quad (3)$$

где  $a, b, c$  – это некоторые функции от  $x, y$ , которые имеют непрерывные производные до второго порядка включительно.

Для того чтобы привести уравнение (3) к каноническому виду, необходимо записать так называемое характеристическое уравнение (4):

$$ady^2 - 2b dx dy + c dx^2 = 0, \quad (4)$$

из которого выходят два уравнения:

$$ady - \left(b + \sqrt{b^2 - ac} dx\right) = 0;$$

$$ady - \left(b - \sqrt{b^2 - ac} dx\right) = 0$$

и найти их общие интегралы.

В общем случае линейное уравнение с частными производными второго порядка параболического типа с  $n$  независимых переменных можно записать в виде:

$$\frac{dw}{dt} - L_{x,t}[w] = \Phi(x, t),$$

где

$$L_{x,t}[w] \equiv \sum_{j=1}^n a_{i,j}(x, t) \frac{d^2 w}{dx_i dx_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{dw}{dx_i} + c(x, t) w.$$



Уравнения параболического типа описывают неустановившиеся диффузионные, тепловые процессы, зависящие от времени [1, 6].

Методы решения уравнений математической физики

Все методы решения этих уравнений можно разделить на две группы:

1. Аналитические методы решения уравнений, которые основаны на сведении

2. Уравнения в частных производных к обыкновенному или системе обыкновенных уравнений;

3. Численные методы решения (с помощью ЭВМ).

Пример: Найдите функцию  $w=w(x,t)$ , как решение уравнения  $w_t = -aw_x$ , где  $a>0$ ,  $a=\text{const}$ , при начальном условии

$$w(x,0) = f(x) = \cos x.$$

Решение  $w_t + aw_x = 0$  – это уравнение (уравнение переноса) в частных производных:

$$\frac{dw}{wt} + a \frac{dw}{dx} = 0. \quad (1.1)$$

Характеристическое уравнение для (1.1) имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a} \quad (1.2)$$

$$d(x-at) = 0 \rightarrow x-at = C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Общее решение уравнения (1.1), имеет вид бегущей волны:

$$w(x,t) = \varphi(x-at). \quad (1.3)$$

Из (1.3) видно, что  $a$  – скорость переноса. Так как  $a>0$ , то волна бежит слева направо. Подставим начальное условие, получим:

$$w(x,0) = \varphi(x) = f(x). \quad (1.4)$$

Получаем:

$$w(x,t) = f(x-a) = \cos(x-at).$$

Ответ: Функция  $w(x,t) = \cos(x-at)$ , является решением уравнения переноса при заданном начальном условии.

### Список литературы

1. Бондаренко В.А., Мамаев И.И. Профессиональная направленность в обучении математике студентов биологических факультетов // Вестник АПК Ставрополя. – 2014. – № 1 (13). – С. 6–9.
2. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Задачи с экономическим содержанием на занятиях по дифференциальному исчислению // Актуальные вопросы теории и практики бухгалтерского учета, анализа и аудита: ежегодная 75-я научно-практическая конференция / Редколлегия: В.З. Мазлоев, А.В. Ткач, И.С. Санду, И.Ю. Скляр, Е.И. Костюкова; отв. за вып. А.Н. Бобрышев. – 2011. – С. 124–127.
3. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Некоторые аспекты интегрированного подхода изучения математического анализа // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона: ежегодная 76-я научно-практическая конференция Ставропольского государственного аграрного университета «Аграрная наука – Северо-Кавказскому региону». – 2012. – С. 280–283.
4. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Долгополова А.Ф. Применение операционного исчисления в моделировании экономических систем // Аграрная наука, творчество, рост. 2013.
5. Перспективный облик отказоустойчивых цифровых систем управления маневренных ла / В.В. Косьянчук, С.В. Константинов, Т.А. Колодяжная, П.Г. Редько, И.П. Кузнецов // Полет: Общероссийский научно-технический журнал. – 2010. – № 2. – С. 20–27.
6. Попова С.В., Смирнова Н.Б. Элементы алгоритмизации в процессе обучения математике в высшей школе // Современные проблемы развития экономики и социальной сферы: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., посвященной 75-летию Ставропольского государственного аграрного университета. – 2005. – С. 526–531.

УДК 536.242

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАГНИТОКАЛОРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА В ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ

Короткин Р.А., Чернявский Н.А., Яновский А.А.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: RAKorotkin@yandex.ru

За последнее столетие магнитокалорический эффект был детально изучен, заинтересованность к нему не только не упала, но, наоборот, резко возросла в последние десятилетия. Это объясняется тем, что данные, полученные из измерений используются для получения информации о магнитных структурах и их видоизменении. Вызывает интерес и использование магнитокалорического эффекта при разработке и создании холодильных устройств. В таких устройствах магнитное рабочее тело выступает в качестве хладагентов, используемых в традиционных холодильных установках с газом в качестве рабочего тела, а процесс намагничивания-размагничивания – является аналогом циклов сжатия – расширения. В разрабатываемой нами холодильной установке мы предлагаем использовать в качестве магнитного рабочего тела магнитную жидкость на основе редкоземельных металлов.

**Ключевые слова:** магнитокалорический эффект, магнитная холодильная машина, магнитотепловой насос, магнитная жидкость

## USE OF THE MAGNETOCALORIC EFFECT IN HEAT ENGINEERING DEVICES

Korotkin R.A., Chernyavsky N.A., Yanovskii A.A.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: RAKorotkin@yandex.ru

Over the last century, the magnetocaloric effect has been studied in detail, interest in it has not only not fallen, but, conversely, has increased dramatically in recent decades. This is because data obtained from measurements are used to obtain information about magnetic structures and their modification. The use of the magnetocaloric effect in the development and creation of refrigeration devices is also of interest. In such devices, the magnetic working medium acts as refrigerants used in conventional refrigeration units with gas as a working fluid, and the magnetization-demagnetization process is analogous to compression-expansion cycles. In the refrigeration unit we develop, we propose to use a magnetic fluid based on rare earth metals as a magnetic working medium.

**Keywords:** magnetocaloric effect, magnetic chiller, magneto-thermal pump, magnetic fluid

Магнитокалорический эффект (МКЭ) – это изменение температуры магнетика в результате обратимого выделения или поглощения тепла при воздействии магнитного поля на вещество. Данный эффект, проявляющийся в адиабатных условиях, представляет большой интерес в связи с потенциальным применением его в теплотехнических устройствах. Использование этого эффекта позволяет изучать взаимодействия и изменение магнитных структур в магнетиках. Для реализации адиабатических условий необходима адиабатическая оболочка, которая будет изолировать магнетик от тепловых потоков, возникающих со стороны окружающей среды. Создание адиабатического процесса также возможно при быстром включении и выключении магнитного поля, когда теплопередачей можно пренебречь [1].

МКЭ измеряется двумя методами прямым и косвенным. Прямой метод состоит в измерении изменения температуры образца при адиабатическом приложении или снятии внешнего магнитного поля. Косвенные методы позволяют определить значения энтропии при изотермическом намагничивании образца, например, основываясь на анализе семейства изотермических кривых намагничивания. При косвенном методе рассчитывается изменение энтропии из соотношения Максвелла для двух близких по температуре кривых намагничивания:

Максимальных значений

$$\Delta S(\Delta T, H) = \int_0^H \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_{H,p} dH.$$

а следовательно и величин изменения температуры и энтропии следует ожидать в окрестностях магнитных фазовых переходов. Вблизи температуры перехода термодинамическое описание становится не вполне корректным, так для переходов первого рода в силу необратимости соотношение, может быть справедливо только в случае неравенства, а вычисление значения изменения энтропии с помощью соотношений Максвелла приводит к получению сильно завышенных значений. Примером тому служит эксперимент в котором была вычислена величина изменения энтропии 330 кДж/(кг·К) для сплава на основе мар-

ганца, железа и мышьяка, этот результат был пересмотрен в опыте с использованием уравнения Клайперона-Клаузиуса для получения более реалистичного значения 26 кДж/(кг·К). Таким образом прямой метод позволяет получать более правдоподобные значения величины МКЭ.

Хотя МКЭ был открыт более ста лет назад, в настоящее время к нему проявляется значительный интерес. Исследование данного эффекта позволяет получить важную информацию о характеристиках магнитного упорядочения, обменных и магнито-кристаллических взаимодействиях, о трансформации магнитных структур при действии магнитного поля.

Эффект постоянно изучается хотя последние наработки уже позволяют реализовывать магнитотепловые насосы и магнитные охладители. Все чаще ученые приходят к мнению, что компрессионные холодильники уже достигли предела своего развития в плане повышения эффективности. По мнению специалистов, как только будет найден материал, удовлетворяющий техническим (требуется значительный МКЭ в определенном диапазоне температур и материал с долговременной стабильностью) и экономическим (более распространенный, нежели родий или гадолиний) требованиям, через несколько лет магнитные холодильники полностью вытеснят все существующие типы холодильников. На сегодняшний день существует более 56 прототипов, однако пока нет информации о начале широкомасштабного производства таких изделий. Маг-

нитный холодильник выгодно отличается от традиционных своей энергоэффективностью, надежностью, экологичностью и безопасностью для человека. В этих устройствах не используются хлор-фтор-углероды, элементы уничтожающие озоновый слой, а также являющиеся ядовитыми для человека особенно в процессе сгорания. Величина МКЭ и, следовательно, эффективность процесса охлаждения в магнитном холодильнике определяется свойствами магнитных рабочих тел. Были проанализированы многочисленные возможные комбинации редкоземельных и магнитных металлов и других материалов с точки зрения поиска оптимальных сплавов для реализации магнитного охлаждения в различных диапазонах температур. Среди исследованных материалов с высокими магнетокалорическими свойствами соединение (сплав железа с родием) обладает наибольшим удельным магнетокалорическим эффектом. Величина удельного МКЭ для этого соединения в несколько раз больше, чем в соединениях силицидов-германидов. Этот сплав из-за высокой стоимости родия не подходит для масштабного производства, однако, он может служить своеобразным эталоном, с которым следует сравнивать магнетокалорические свойства исследуемых материалов.

В качестве рабочих тел предлагается использовать редкоземельные магнетики, сплавы Гейслера, арсенид марганца  $MnAs$ , и др., обладающие большим МКЭ и изменением магнитной энтропии в удобных для работы таких машин интервалах температур.

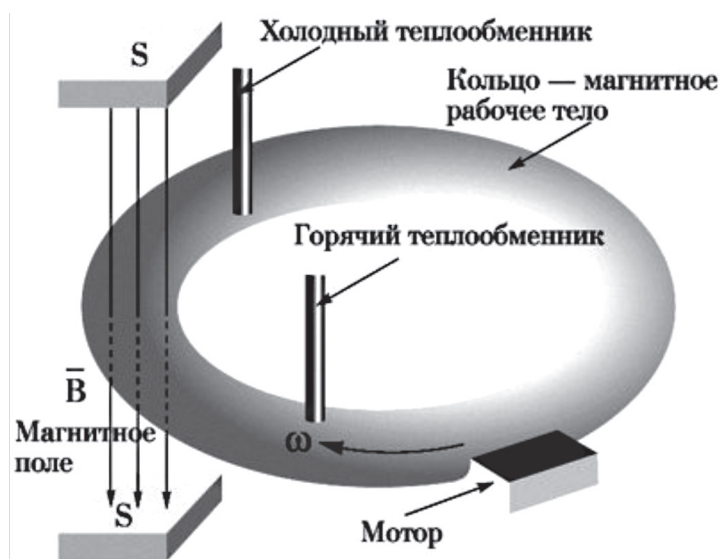


Схема магнитной холодильной машины

Однако ни одно из вышеперечисленных соединений не может быть использовано для проектирования бытовых охладителей в связи с необходимостью высоких полей или большого приложенного внешнего давления, что ведет к усложнению конструкции и увеличению размеров и стоимости конечного устройства. Поиск оптимального соединения для построения магнитных холодильников, и совершенствование технологий изучения МКЭ приоритетная задача на будущее.

Кроме магнитных холодильников также стоит упоминания разработка магнито-тепловых насосов, так как подавляющее большинство современной климатической техники представляют собой компрессорные устройства. Работа таких устройств базируется на холодильном цикле Карно, который описывает процессы изменения агрегатного состояния хладагента под воздействием давления. На протяжении многих лет этот принцип хорошо зарекомендовал себя с точки зрения надежности. Но он уже не соответствует современным требованиям, как экологии, так и экономики. Поэтому в настоящее время инженеры многих климатических компаний работают над разработкой нового поколения оборудования, которые было бы экологически безопасно для окружающей среды и работало с меньшими энергозатратами.

В настоящее время разрабатываются технологии производства магнитного теплового насоса. Разработчики провели презентацию, во время которой показали, что технология магнитного теплового насоса обладает более высоким коэффициентом эффективности, и в ближайшем будущем может занять место парокомпрессионного цикла, на котором базируется работа нынешних тепловых насосов.

В основе принципа работы магнитного теплового насоса лежит магнетокалорический эффект. Более ярко эффект проявляется у пара- и ферромагнетиков. Попадая во внешнее магнитное поле, эти вещества начинают намагничиваться и вырабатывают тепло. Это достигается за счет переориентации магнитных моментов микрочастиц вдоль силовых линий поля. Когда вещества

покидают внешнее магнитное поле, они размагничиваются. Это приводит к тому, что на разупорядочение магнитных моментов тратится кинетическая энергия парамагнетиков и ферромагнетиков, что приводит к снижению температуры.

Подобная технология магнитного охлаждения и обогрева имеет ряд преимуществ по сравнению с классической схемой. В первую очередь, это высокая энергоэффективность. По коэффициенту преобразования электроэнергии в холод подобные магнитные установки уже сегодня превосходят компрессорные образцы. Коэффициент полезного действия лабораторного прототипа такой магнитной холодильной машины составил 60%, в то время как лучший показатель традиционной установки едва достигает 40%. К тому же, работа магнитной климатической техники более близка к идеальному тепловому циклу. Перспектива управления теплообменными процессами с помощью магнитного поля является также важным направлением и в теплофизике кипения магнитных жидкостей [2–5].

Что касается экологичности, то и здесь «новинка» обещает быть успешной по причине замены в ней хладагентов, которые негативно влияют на озоновый слой нашей планеты, обычной водой. Обеспечение плавной работы и отсутствие вибраций, свойственных компрессорным устройствам, является плюсом в пользу магнитных устройств.

#### Список литературы

1. Игропуло В.С., Яновский А.А. Математическое моделирование некоторых ориентационных процессов на наноповерхностях // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2008. – Т. 15; № 3. – С. 484–485.
2. Математическое моделирование и разработка систем охлаждения процессоров персональных компьютеров / А.А. Яновский, Я.В. Каныгин // Международный студенческий научный вестник. – 2015. – № 3–4. – С. 496–498.
3. Моделирование отрыва пузырьков пара в кипящей магнитной жидкости / Яновский А.А., Симоновский А.Я., Холопов В.Л. // Физико-химические и прикладные проблемы магнитных дисперсных наносистем: V Всероссийская научная конференция с международным участием: сборник научных трудов, 2015. – С. 239–246.
4. Перспективы развития и моделирования систем охлаждения процессоров ПК с использованием магнитной жидкости в качестве охлаждающей среды / А.А. Яновский, А.Я. Симоновский, П.А. Хаустов // Международный студенческий научный вестник. – 2015. – № 3–4. – С. 498–499.
5. Фертман В.Е. Магнитные жидкости: Справочное пособие. – Минск: Высш. шк., 1988. – 184 с.

УДК 517.442

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТАБЛИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ РАСЧЕТА RC-ЦЕПЕЙ

Лабынцев А.С., Петрищев Д.Е.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: alekseylab1998@mail.ru

В данной статье мы рассмотрим метод использования таблицы преобразований Лапласа для расчёта переходных процессов в RC-цепочке. Преобразование Лапласа, находит широкое применение в теории цепей. Одной из особенностей преобразования Лапласа, которые предопределили его широкое распространение в научных и инженерных расчётах, является то, что многим соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые соотношения над их изображениями. Так, свёртка двух функций сводится в пространстве изображений к операции умножения, а линейные дифференциальные уравнения становятся алгебраическими. В качестве примера возьмём схему для расчёта переходных процессов, а также применим основное уравнение для конденсатора. Преобразуем данное уравнение, приведём к дифференциальному виду, применим таблицу Лапласа, после чего приведём уравнение к явному виду и упростим выражение. Выведем формулу образа тока, используя таблицу преобразования Лапласа. Найдем напряжение на емкости. Для решения уравнения, мы используем, только таблицу преобразования Лапласа, что позволит нам сократить время на решение данного уравнения.

**Ключевые слова:** расчет, RC-цепи, таблица преобразования Лапласа

## USING A TABLE OF LAPLACE TRANSFORM FOR THE CALCULATION OF THE RC-CIRCUITS

Labyntsev A.C., Petrishchev D.E.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: alekseylab1998@mail.ru

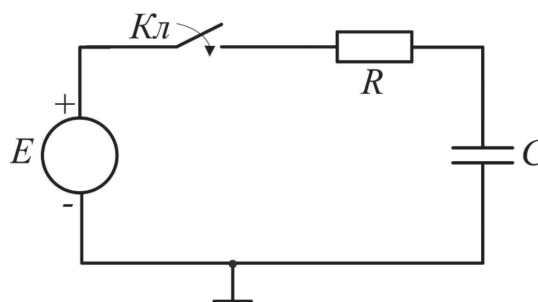
In this article we will discuss the method using the table of Laplace transforms to calculate transient processes in RC-chain. The Laplace transform, is widely used in circuit theory. One of the features of the Laplace transform, which explains its wide distribution in scientific and engineering calculations is the fact that many relationships and operations over the originals correspond to simple ratios of their images. Thus, the convolution of two functions is reduced in the image space to the operations of multiplication and linear differential equations become algebraic. As an example, take the scheme for calculation of transient processes and applies the basic equation for a capacitor. We can transform this equation, we give the differential mind, let's apply the table of Laplace, and then bring the equation to clear the mind and simplify the expression. Derive the formula for the current image using the table of Laplace transform. Find the voltage capacity. To solve the equations, we use only the table of Laplace transform that will enable us to reduce time for the solution of this equation.

**Keywords:** calculation, RC circuit, the table of the Laplace transform

Основной смысл использования метода, основанного на использовании таблицы преобразований Лапласа для расчета переходных процессов заключается в том, что  $f(t)$  некоторой вещественной переменной  $t$  ставится в соответствие функция  $F(p)$  комплексной переменной. В итоге имеем, что производные и интегралы от вещественной функции заменяют математическими функциями. В ходе расчета данных уравнений мы находим изображения, а затем, путем обратного преобразования, — оригиналы. Главным этапом практического применения является необходимость определения только независимых начальных условий, что заметно упрощает расчет переходных процессов в электрических цепях высокого порядка по сравнению с классическим методом [2, 3].

В данной статье мы рассмотрим способ применения преобразований Лапласа для расчета переходных процессов в RC-цепочке.

Для расчетов используется схема (рисунк), имеющая источник ЭДС  $E$ , ключ  $K$ , резистор  $R$  и последовательно включенный конденсатор  $C$ . В исходном состоянии цепь разомкнута, ток отсутствует [4, 6].



RC-цепь для расчета переходных процессов

Рассмотрим переходный процесс, который возникает, когда ключ  $K$  замыкается.

Предположим, что  $t = 0$  с. Появляется ток, конденсатор начинает заряжаться. В любой производный момент времени



мы можем записать уравнение по правилу Кирхгофа [5, 6].

Получаем:

$$\varepsilon(t) = i_r(t)R + u_c(t)R.$$

Для расчета воспользуемся таблицей преобразования Лапласа.

Таким образом, мы приводим уравнение к дифференциальному виду. Окончательно получаем:

$$\varepsilon(t) = i_r(t)R + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt R.$$

Данное уравнение необходимо решить. Для этого мы вновь воспользуемся табли-

Таблица преобразований Лапласа

| № | $f(t)$               | $F(p)$                           | №  | $f(t)$                         | $F(p)$                                           |
|---|----------------------|----------------------------------|----|--------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1 | $1(t)$               | $\frac{1}{p}$                    | 11 | $t \sin \omega t$              | $\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$           |
| 2 | $C = \text{const}$   | $\frac{C}{p}$                    | 12 | $t \cos \omega t$              | $\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$      |
| 3 | $t$                  | $\frac{1}{p^2}$                  | 13 | $e^{-\lambda t} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$      |
| 4 | $t^n$                | $\frac{n!}{p^{n+1}}$             | 14 | $e^{-\lambda t} \cos \omega t$ | $\frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$ |
| 5 | $e^{\lambda t}$      | $\frac{1}{p - \lambda}$          | 15 | $t \text{ shat}$               | $\frac{2ap}{(p^2 - a^2)^2}$                      |
| 6 | $t^n e^{-\lambda t}$ | $\frac{n!}{(p + \lambda)^{n+1}}$ | 16 | $t \text{ chat}$               | $\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$                |
| 7 | $\sin \omega t$      | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$  | 17 | $e^{-\lambda t} \text{ shat}$  | $\frac{a}{(p + \lambda)^2 - a^2}$                |
| 8 | $\cos \omega t$      | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$       | 18 | $e^{-\lambda t} \text{ chat}$  | $\frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 - a^2}$      |

Вспомним основное уравнение для конденсатора:

$$u_c(t) = \frac{Q(t)}{C},$$

где  $C$  – емкость конденсатора,  $Q$  – заряд, который образуется в следствии протекания тока через конденсатор.

После преобразования (таблица) уравнение можно записать в следующем виде:

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt.$$

цей преобразований (таблица) к обоим частям уравнения.

$$E(p) = \frac{\varepsilon}{p} = RI(p) + \frac{1}{C} \frac{I(p)}{p}.$$

Таким образом, преобразование Лапласа позволяет нам исключить время и найти образ  $I(p)$ , после чего, используя таблицу, привести уравнение к явному виду [1].

Упростим выражение, разделив обе части уравнения на общий знаменатель. Получим:

$$\varepsilon C = I(p)(RCp + 1).$$

Отсюда находим образ тока:

$$I(p) = \frac{\varepsilon C}{1 + RCp},$$

где  $RC = \tau$  – постоянная времени

Чтобы прийти к каноническому виду разделим и умножим знаменатель на  $\tau$ . Получим:

$$I(p) = \frac{\varepsilon C}{\tau \left( p + \frac{1}{\tau} \right)}.$$

В итоге получаем:

$$i(t) = \frac{\varepsilon C}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Осталось найти напряжение на емкости, которое всегда равно:

$$u(t) = \varepsilon - i(t)R$$

или

$$u(t) = \varepsilon - \frac{\varepsilon C}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Для решения данного уравнения мы не использовали ничего, кроме таблицы преобразований Лапласа.

Рассмотрим еще одну показательную задачу электротехники, решаемую с помощью операционного исчисления.

Найти закон изменения тока  $i(t)$  при включении постоянной э.д.с.  $E_0$  в последовательный колебательный контур с параметрами  $R$ ,  $L$  и  $C$  при условии  $i(0) = 0$ .

По закону Кирхгофа для мгновенных значений запишем

$$u_L + u_R + u_C = E_0,$$

где 
$$u_R = Ri, \quad u_L = L \frac{di}{dt},$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau.$$

После подстановки получим дифференциально-интегральное уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E_0.$$

Обозначим изображение функции-оригинала  $i = i(t)$  через  $I(p)$ , то есть

$$i(t) \longleftrightarrow I(p).$$

Тогда по правилу дифференцирования оригинала и правилу нахождения изображения интеграла от данной функции-оригинала находим

$$\frac{di}{dt} \longleftrightarrow pI(p)$$

и 
$$\int_0^t i(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{I(p)}{p},$$

а 
$$E_0 \longleftrightarrow \frac{E_0}{p}.$$

Подставив найденные изображения, получим операторное уравнение

$$LpI(p) + RI(p) + \frac{I(p)}{Cp} = \frac{E_0}{p}.$$

Решая это алгебраическое уравнение относительно изображения  $I(p)$ , имеем

$$I(p) = \frac{E_0}{p \left( Lp + R + \frac{1}{Cp} \right)}$$

или 
$$I(p) = \frac{E_0}{L \left( p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} \right)}.$$

Обозначим

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

Тогда, выделяя полный квадрат в знаменателе, получим

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{E_0}{L \left[ (p + \beta)^2 + (\omega_0^2 - \beta^2) \right]} = \\ &= \frac{E_0}{L\omega} \frac{\omega}{(p + \beta)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

По таблице с учетом свойства линейности восстановим оригинал

$$i(t) = \frac{E_0}{L\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t.$$

**Вывод.** В реальном колебательном контуре существуют свободные колебания тока, которые носят затухающий характер ( $\beta = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания).

**Список литературы**

1. Гулай Т.А., Гатаулина К.Р., Фурсов Д.И., Применение классического метода при математическом расчете переходных процессов // Международный студенческий научный вестник. – 2017. – № 4–4. – С. 511–513.

2. Гулай Т.А., Желтяков В.И., Применение систем линейных алгебраических уравнений при расчете электрических цепей // Международный студенческий научный вестник. – 2017. – № 4–4. – С. 522–524.

3. Гулай Т.А., Жукова В.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А., Математика: рабочая тетрадь. – Ставрополь, 2015.

4. Долгополова А.Ф., Колодяжная Т.А. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 1 // Международный журнал экспериментального образования. – 2011. – № 12. – С. 62–63.

5. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 2 // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – №2. – С. 81–82.

6. Мелешко С.В., Зорина Е.Б., Попова С.В., Гулай Т.А., Самостоятельная работа как важнейшее средство повышения профессионально-познавательной и творческой активности будущих специалистов // Theoretical & Applied Science. – 2016. – № 11 (43). – С. 135–138.

УДК 519.852:65

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ  
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА****Лалаян Л.Р., Шамашова А.В.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: Lilitochka1999@yandex.ru*

Развитие современного общества характеризуется повышением технического уровня, усложнением организационной структуры производства, углублением общественного разделения труда, предъявлением высоких требований к методам планирования и хозяйственного руководства. В этих условиях только научный подход к руководству экономической жизнью общества позволит обеспечить высокие темпы развития народного хозяйства. Одним из необходимых условий дальнейшего развития экономической науки является применение точных методов количественного анализа, широкое использование математики. В настоящее время новейшие достижения математики и современной вычислительной техники находят все более широкое применение в экономических исследованиях и планировании. Особенно успешно развиваются методы оптимального планирования, которые и составляют сущность математического программирования. Предлагается решение задачи оптимизации производства, как одной из задач математического обеспечения систем автоматизированного проектирования (САПР).

**Ключевые слова:** задача оптимизации, математическое обеспечение САПР, технологическая эффективность, симплекс-метод

**USING LINEAR PROGRAMMING METHODS FOR SOLVING THE OPTIMIZATION  
PROBLEM OF PRODUCTION****Lalayan L.R., Shamashova A.V.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: Lilitochka1999@yandex.ru*

The development of modern society is characterized by an increase in the technical level, the complication of the organizational structure of production, the deepening of the social division of labor, the presentation of high requirements to methods of planning and economic management. In these conditions, only a scientific approach to the management of the economic life of society will ensure high rates of development of the national economy. One of the necessary conditions for the further development of economic science is the application of precise methods of quantitative analysis, the extensive use of mathematics. At present, the latest achievements of mathematics and modern computer technology are increasingly used in economic research and planning. Especially successful are the methods of optimal planning, which constitute the essence of mathematical programming. The solution of the problem of production optimization as one of the problems of the mathematical support of computer-aided design (CAD) systems is proposed.

**Keywords:** optimization problem, CAD software, technological efficiency, simplex method

В настоящее время в условиях современного рынка важно стремиться к оптимизации производства, как основного фактора повышения экономической эффективности. Поскольку современное производство не может быть конкурентоспособным без применения средств автоматизации на всех этапах жизненного цикла изделия, для разрешения противоречий между возрастающей сложностью технических объектов и требованием к эффективности проектирования, возникает и необходимость автоматизации проектирования [1].

В рамках жизненного цикла промышленных изделий система автоматизированного проектирования (САПР) решает задачи автоматизации работ на стадиях проектирования и подготовки производства. Предприятия, ведущие разработки без САПР или лишь с малой степенью их использования, оказываются неконкурентоспособными как из-за больших материальных и времен-

ных затрат на проектирование, так и из-за невысокого качества проектов.

Средство обеспечения САПР – это совокупность однотипных компонентов. Выделяют следующие виды обеспечения САПР: техническое, математическое, программное, лингвистическое, информационное и организационное. Эффективность и производительность работы САПР в наибольшей степени зависит от его математического обеспечения. Математическое обеспечение (МО) САПР состоит из математических моделей, методов и алгоритмов, необходимых для решения задач автоматизированного проектирования, которые помогают справиться с поставленной задачей. Выделяют три основные задачи, рассматриваемые в математическом обеспечении САПР: задача анализа, задача оптимизации и задача синтеза [5].

В данной работе подробно рассмотрим задачу оптимизации производственного

процесса. Задача оптимизации заключается в повышении эффективности технологических и организационных систем (металлорежущего станка, автоматической линии, производства в целом) при помощи принятия продуманных решений. Главное в постановке задачи оптимизации: максимизация или минимизация целевой функции. Оптимизировать можно разные процессы производства: себестоимость детали (минимизация), быстродействие оборудования, доход от реализации (максимизация) и т.д. [2].

В процессе оптимизации, с учетом заданных условий, определяются элементы решения, т.е. те параметры системы и показатели качества, которые зависят от выбора и приводят к определению оптимальных конструкций, технологических схем и др. Всякая оптимизационная задача предполагает заданной целевую функцию – количественный показатель качества альтернатив выбора.

В процессе принятия оптимальных решений теоретически наиболее эффективны методы математического программирования: линейное, нелинейное, динамическое программирование и т.д. [4].

Рассмотрим пример решения задачи линейного программирования (ЛП) для нахождения оптимальных условий изготовления изделий. Приведем решение с использованием симплекс-метода. Данный метод имеет ряд преимуществ: возможность найти оптимальное значение целевой функции, план выпуска каждого изделия, информацию о степени использования и резерве переменных.

Допустим, предприятие выпускает два вида изделий: А и В. Для их изготовления используется 3 вида станков ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ). Длительность обработки каждого изделия: на станке типа  $C_1$  изделий А – 12; изделий В – 4 единицы; на станке типа  $C_2$  изделий

А – 4, изделий В – 4 единицы; на станке типа  $C_3$  изделий А – 3, изделий В – 12 единиц. Прибыль от реализации одного изделия А составляет 30 единиц, В – 40 единиц. Рабочее время станка  $C_1$  – 300 единиц,  $C_2$  – 120 единиц,  $C_3$  – 252 единиц. Необходимо определить такой план выпуска продукции А и В, чтобы прибыль предприятия была максимальна.

Решение данной задачи осуществляется с помощью симплекс-метода. Симплекс-метод был разработан и впервые применен для решения задач в 1947 г. американским математиком Дж. Данцигом. [3].

Математическая модель данной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} 1) & x_1, x_2 \geq 0, \\ 2) & 12x_1 + 4x_2 \leq 300; \\ & 4x_1 + 4x_2 \leq 120; \\ & 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \\ 3) & F(x) = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow \max \end{aligned}$$

где  $x_1$  – количество изделий А,  $x_2$  – количество изделий В.

Для дальнейшего решения симплекс – методом приведем математическую модель к каноническому виду, т.е. преобразуем все неравенства в равенства, добавив к каждому выражению неотрицательную переменную [6].

$$\begin{aligned} 1) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \\ 2) & 12x_1 + 4x_2 + x_3 = 300 \\ & 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 120 \\ & 3x_1 + 12x_2 + x_5 = 252 \\ 3) & F(x) = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow \max \end{aligned}$$

Построим исходную симплекс-таблицу (табл. 1).

Таблица 1

Исходная симплекс-таблица

| Базисные переменные $i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Свободный член $b$ | Отношение $b_i/a_{ik}$ |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------|------------------------|
| $x_3$                   | 12    | 4     | 1     | 0     | 0     | 300                | 75                     |
| $x_4$                   | 4     | 4     | 0     | 1     | 0     | 120                | 30                     |
| $x_5$                   | 13    | 12    | 0     | 0     | 1     | 252                | 21                     |
| $F$                     | -30   | -40   | 0     | 0     | 0     | 0                  | -                      |



Допустимый вектор имеет вид:  $X^{(1)}=(0,0,300,120,252)$ . План не оптимален, так как в индексной строке есть отрицательные элементы. Ведущий столбец  $k=2$ , т.к. в индексной строке наименьший отрицательный элемент стоит во втором столбце. Ведущая строка  $l=3$ , так как в третьей строке наименьшее отношение  $\frac{b_i}{a_{ik}}$ . Ведущий элемент  $a_{lk} = a_{32} = 12$ .

Построим новую симплекс-таблицу (табл. 2).

Допустимый вектор имеет вид:  $X^{(3)}=(12,18,84,0,0)$ . Полученный план оптимален, так как в индексной строке нет отрицательных элементов. Значит, допустимый вектор  $X^{(3)}$  является оптимальным. Целевая функция имеет вид:

$$F = 1080 - 20/3 x_4 - 10/9 x_5.$$

Таким образом, получили оптимальный план производства, где максимальная прибыль составит 1080 единиц (по условию все  $x_i \geq 0$ ). При этом следует выпускать 12 еди-

$$\text{Новая ведущая строка} = \frac{\text{Старая ведущая строка}}{a_{ik}}$$

Таблица 2

Новая симплекс таблица

| Базисные переменные $i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Свободный член $b$ | Отношение $b_i/a_{ik}$ |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------|------------------------|
| $x_3$                   | 11    | 0     | 1     | 0     | -1/3  | 216                | 19,63                  |
| $x_4$                   | 3     | 0     | 0     | 1     | -1/3  | 36                 | 12                     |
| $x_5$                   | 1/4   | 1     | 0     | 0     | 1/12  | 21                 | 84                     |
| $F$                     | -20   | -0    | 0     | 0     | 40/12 | 840                | -                      |

Допустимый вектор имеет вид:  $X^{(2)}=(0,21,216,36,0)$ . План не оптимален, так как в индексной строке есть отрицательный элемент. Ведущий столбец  $k=1$ , так как в индексной строке наименьший отрицательный элемент стоит в первом столбце. Ведущая строка  $l=2$ , т.к. во второй строке наименьшее отношение  $\frac{b_i}{a_{ik}}$ . Ведущий элемент  $a_{lk} = a_{21} = 3$ .

Построим новую симплекс-таблицу (табл. 3).

ниц изделий А и 18 единиц изделий В, станок  $C_2$  и  $C_3$  загружены полностью, а у станка  $C_1$  имеется резерв времени 84 единицы.

В ходе решения получили оптимальный план производства, где максимальная прибыль составит 1080 единиц (по условию все  $x_i > 0$ ). При этом следует выпускать 12 единиц изделий А и 18 единиц изделий В, станок  $C_2$  и  $C_3$  загружены полностью, а у станка  $C_1$  имеется резерв времени 84 единицы.

Таким образом, в различных ситуациях связанных с необходимостью принятия ре-

$$\text{Новая ведущая строка} = \frac{\text{Старая ведущая строка}}{a_{ik}}$$

Таблица 3

Итоговая симплекс таблица

| Базисные переменные $i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$  | $x_5$ | Свободный член $b$ | Отношение $b_i/a_{ik}$ |
|-------------------------|-------|-------|-------|--------|-------|--------------------|------------------------|
| $x_3$                   | 0     | 0     | 1     | -11/13 | 8/9   | 84                 | -                      |
| $x_4$                   | 1     | 0     | 0     | 1/3    | -1/9  | 12                 | -                      |
| $x_5$                   | 0     | 1     | 0     | -1/12  | 1/9   | 18                 | -                      |
| $F$                     | 0     | -0    | 0     | 20/3   | 10/9  | 1080               | -                      |

шений на производстве возникает необходимость математического решения самых разнообразных задач оптимизации производственных процессов [7]. Для нахождения их решения применяются те или иные математические методы, дающие точные или приближенные результаты. Задачи оптимизации производства часто используются в теоретико-экономических исследованиях и обоснованиях.

#### Список литературы

1. Долгополова А.Ф. Моделирование стратегии управления в социально-экономических системах с использованием Марковских процессов // Вестник АПК Ставрополя. – 2011. – № 1 (1). – С. 67–69.
2. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Особенности применения методов математического моделирования в экономических исследованиях // Kant: Экономика и управление. – 2013. – № 1. – С. 62–66.
3. Линейная алгебра: учебное пособие для студентов вузов сельскохозяйственных, инженерно-технических и экономических направлений / Р.В. Крон, С.В. Попова, Н.Б. Смирнова, Е.В. Долгих. – М., 2015.
4. Логинова Я.А., Долгополова А.Ф. Использование элементов линейной алгебры в экономических расчетах // Международный студенческий научный вестник. – 2016. – № 3–3. – С. 393–395.
5. Манько А.И., Гулай Т.А., Жукова В.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А. Обзор методов социально-экономического прогнозирования и их применение в реальной экономике // Наука и образование: современные тренды. – 2015. – № 2 (8). – С. 438–448.
6. Немцова А.В., Попова С.В. Применение средств матричной алгебры для решения задач экономического содержания // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5–2. – С. 171 – 172.
7. Цысь Ю.В., Долгополова А.Ф. Элементы линейной алгебры и их применение при решении экономических задач // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 6. – С. 91–93.

УДК 519.1:003.26

**КАК ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА СВЯЗАНА С КРИПТОГРАФИЕЙ?****Ложкин П.А.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: pasha26rusk@gmail.com*

Криптография включает в себя создание письменных или сгенерированных кодов, которые позволяют хранить информацию в секрете. Криптография преобразует данные в формат, который не читается для неавторизованного пользователя, что позволяет передавать его без возможности его декодирования обратно в читаемый формат, тем самым компрометируя данные. Криптография опирается на многие понятия математики и дискретной математики такие, как абстрактная алгебра, теория чисел, множества, линейная алгебра, комбинаторика, теория вероятностей. Примером связи криптографии и дискретной математики может служить известный алгоритм RSA, который позволяет использовать систему шифрования с открытым ключом, используя понятие наибольшего общего делителя чисел, теорему Ферма, теорию конгруэнции и расширенный алгоритм Евклида. Криптография способствует развитию математики, а математика предоставляет базу для решения задач криптографии.

**Ключевые слова:** безопасность, дискретная математика, криптография**HOW IS DISCRETE MATHEMATICS CONNECTED WITH CRYPTOGRAPHY?****Lozhkin P.A.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: pasha26rusk@gmail.com*

Cryptography includes the creation of written or generated codes that allow you to store information in secret. Cryptography converts data into a format that is not readable for an unauthorized user, which allows it to be transmitted without the possibility of decoding it back into a readable format, thereby compromising data. Cryptography is based on many concepts of mathematics and discrete mathematics, such as abstract algebra, number theory, sets, linear algebra, combinatorics, probability theory. An example of the connection between cryptography and discrete mathematics is the well-known RSA algorithm that allows the use of a public key encryption system using the concept of the greatest common number divisor, Fermat's theorem, congruence theory, and the extended Euclidean algorithm. Cryptography promotes the development of mathematics, and mathematics provides a basis for solving cryptography problems.

**Keywords:** security, discrete mathematics, cryptography

Криптография – один из наиболее распространённых способов защиты информации. Суть этого способа заключается в преобразовании текста программы / данных в зашифрованный текст [1, 3].

Шифрование/кодирование данных является одним из самых древних способов защиты информации и применялось ещё задолго до появления первых ЭВМ и электронных носителей информации. Древние люди шифровали свою информацию перестановкой слов /фраз/ чисел в тексте, тем самым получая возможность передавать кому-либо конфиденциальную информацию с малой вероятностью её расшифровки в дальнейшем. Однако такие методы шифрования были не слишком надёжны, и подбор ключа для расшифровки требовал не слишком много времени. С тех пор методы шифрования значительно шагнули вперёд, и существует огромное количество программ, генерирующих сложные и длинные ключи и шифрующих данные всё надёжнее. Подобные ключи человеку запомнить не под силу и потому для расшифровки закодированных файлов используются заранее

установленные пароли, которые прописываются в зашифрованный файл программой его зашифровывающей. Для декодирования подобного файла требуется лишь программа-дешифратор (обычно таковой является та же самая программа, что и шифровала файл(-ы) и знание пароля) [2].

Минимально безопасным паролем, на данный момент, считается пароль от 12 знаков – подбор такого пароля методом брутфорса (автоматического перебора пароля по определённом словарю) является продолжительным и, на одном персональном компьютере, может занять годы, если не века. Тем не менее, на производительном оборудовании подбор подобных паролей уже отнимает гораздо меньше времени, особенно если ведётся сразу с большого числа компьютеров. Зачастую злоумышленники взламывают компьютеры пользователей, устанавливают вредоносное программное обеспечение и создают сеть ботнет – множество заражённых персональных компьютеров, образующих единую сеть, чаще всего предназначенную для DDoS-атак или же брутфорса, то есть перебора ключей

для расшифровки закодированного файла. Такие сети могут вовлекать в себя миллионы компьютеров, тем самым подвергая огромной угрозе безопасность криптованных данных.

Для большей безопасности криптованных данных нередко применяются способы их маскировки под текстовые документы, аудио и видео файлы путём «склейки» зашифрованного файла/контейнера с обычным файлом/программой, содержащим любую информацию. Запустив такой файл, злоумышленник увидит лишь информацию подставного файла и, с высокой вероятностью, даже не станет пытаться его расшифровать. То есть, чтобы никто не нашёл чёрную кошку в тёмной комнате, желательно, чтобы никто о ней и не знал – тогда не будет желающих искать [8].

Таким образом, можно сказать, что криптография являлась на протяжении всей истории человечества и продолжает являться поныне наиболее гарантированным способом защиты и сокрытия важной информации, особенно той, что находится в открытом доступе или потенциально может быть украдена. В совокупности с некоторыми хитростями такой метод становится ещё более надёжным.

Как связана криптография и математика?

Шифрование данных использует множество инструментов из абстрактной алгебры, теории чисел, линейной алгебры, включающих такие разделы, как конгруэнции, квадратичную теорию вычетов, теорию поля, матрицы, некоммутативные группы, комбинаторику, теорию вероятностей, различные математические алгоритмы, хэш-функции и квантовые алгоритмы. Все эти математические инструменты являются частью дискретной математики [4, 6, 7, 10].

Криптография опирается на такие понятия математики и дискретной математики, как множество, отношения и операции над множествами, мощность множества, эквивалентность множеств, функции, целые и действительные числа, простые числа, НОД, НОК числа и алгоритмы их нахождения, многочлены и разложение их на множители, действия над матрицами, алгоритмы применения матриц. Используются системы аксиом для основных алгебраических структур: группоид, моноид, полугруппы, группы, частичные порядки, кольца, поля [5, 9].

В криптологии до сих пор существует проблема разложения больших чисел (целых) на множители.

Примером связи криптографии и дискретной математики может служить известный алгоритм RSA, который позволяет использовать систему шифрования с открытым ключом, в которой каждый знает, как шифровать, но может расшифровать только тот, у кого есть специальный закрытый ключ. Вместе они называются открытым ключом. Одним из этих чисел является произведение  $pq$  двух простых чисел, а другое – число мы будем называть « $E$ », которое по техническим причинам должно быть относительно простым с  $(p-1)(q-1)$ . То есть наибольший общий делитель (НОД)  $E$  и  $(p-1)(q-1)$  должен быть равен 1. Например, мы можем выбрать  $p = 5$ ,  $q = 11$  и  $E = 21$ .

Заметим, что  $(5-1)(11-1) = 40$  и что  $\text{НОД}(21, 40) = 1$ . Чтобы зашифровать сообщение, сначала нужно конвертировать его в последовательность целых чисел. Есть много способов сделать это – некоторые лучше, некоторые хуже. Затем, один за другим, необходимо зашифровать целые числа. Чтобы зашифровать целое число  $x$ , вычисляется  $x^E \bmod pq$ , где  $\bmod$  – (вычисление остатка от целочисленного деления).

Числа  $pq$  и  $E$  являются общедоступными, так что каждый может зашифровать любое целое число. Например, для шифрования числа 6 мы вычисляем  $6^{21} \bmod 55 = 46$ .

Не очевидно, как это сделать в голове, но дискретная математика обеспечивает быстрые (эффективные) алгоритмы модульного возведения в степень. Плюсом этой схемы является то, что очевидный способ расшифровки 46 заключается в «грубой силе». Эта идея «грубой силы» слишком медленная, потому что, когда используются очень большие  $p$  и  $q$ , результирующее число всевозможных  $x$  слишком велико для эффективного управления.

Однако, используя средства еще одной части дискретной математики, а именно теорему Ферма, теорию конгруэнции и расширенный алгоритм Евклида, мы можем эффективно вычислить показатель магического декодирования  $d$ , который будет занимать 46, и вернуть его обратно к 6.

Задача применения разделов дискретной математики состоит в том, чтобы найти  $d$  такое, что  $Ed = 1 \bmod (p-1)(q-1)$ . (Обнаружение этого магического дешифрующего экспонента). Средства дискретной математики позволяют нам задействовать такой эффективный алгоритм, что для этого, нам необходимо знать только  $(p-1)(q-1)$ .

В нашем случае показатель магического декодирования случайно совпадает с 9 (обычно это не одинаковое число), поэтому для дешифровки 46 нам нужно вычислить

$$46^9 \bmod 55 = 6.$$

Таким образом, единственное, что препятствует расшифровке публично кодированного сообщения RSA, заключается в том, что они не знают  $(p-1)(q-1)$ . И единственный способ узнать это число – получить его от числа  $pq$ , что потребует факторинга  $pq$ , и никто не знает, как это сделать эффективно. Поэтому единственными людьми, которые могут расшифровать публично закодированные сообщения RSA, являются люди, которые создали  $pq$ , в первую очередь, потому что только они знают  $p$  и  $q$ . Существует много примеров, но этот единственный пример, который объясняет, как дискретная математика неразрывно связана с криптографией.

Криптография порождает новые трудные математические задачи, при этом математика является каркасом, основой криптографии. По мере развития общества, его научных достижений разрабатываются новые математические методы, приводящие к разрешению задач, ранее считавшихся неразрешимыми.

#### Список литературы

1. Авдошин С.М., Набебин А.А. Дискретная математика. Модулярная алгебра, криптография, кодирование. – М.: ДМК Пресс, 2017.
2. Вихляева В.В., Попова С.В. Вероятность как инструмент поиска оптимального решения в условиях неопреде-

лённости // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5–2. – С. 146 – 148.

3. Гулай Т.А., Долгополовой А.Ф., Мелешко С.В. Математические методы исследования экономических процессов // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 12–1. – С. 116–117.

4. Линейная алгебра (учебное пособие) / Крон Р.В., Попова С.В., Долгих Е.В., Смирнова Н.Б. // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 11–1. – С. 115.

5. Линейная алгебра: учебное пособие для студентов вузов сельскохозяйственных, инженерно-технических и экономических направлений/ Р.В. Крон, С.В. Попова, Н.Б. Смирнова, Е.В. Долгихю – М., 2015.

6. Мелешко С.В., Попова С.В., Цыплакова О.Н. Элементы комбинаторики: Учебно-методическое указание. – Ставрополь, 2012.

7. Попова С.В. Формирование алгоритмической культуры у студентов на занятиях по математике // Экономика регионов России: анализ современного состояния и перспективы развития: Сборник научных трудов по материалам ежегодной 68-й научно-практической конференции / Ответственный редактор Н.В. Кулиш, 2004. – С. 423–426.

8. Попова С.В., Колодяжная Т.А. Применение алгоритмов при обучении математике в вузе // Моделирование производственных процессов и развитие информационных систем: Даугавпилсский университет, Латвия, Европейский Союз Белорусский государственный университет, Беларусь Днепрпетровский университет экономики и права, Украина Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия Санкт-Петербургский государственный политехнический университет Северо-Кавказский государственный технический университет Ставропольский государственный университет Ставропольский государственный аграрный университет. Ставрополь, 2011. – С. 278–281.

9. Попова С.В., Смирнова Н.Б. Элементы алгоритмизации в процессе обучения математике в высшей школе // Современные проблемы развития экономики и социальной сферы: сборник материалов Международной научно-практической конференции, посвященной 75-летию Ставропольского государственного аграрного университета / Ответственный редактор: Н.В. Кулиш, 2005. – С. 526–531.

10. Смирнова Н.Б., Попова С.В. Основные принципы проектирования компьютерной математической модели // Сборник научных трудов по материалам Ежегодной 69-й научно-практической конференции, посвященной 75-летию СтГАУ / Ответственный редактор: Н.В. Кулиш, 2005. – С. 185–189.



УДК 511:621.3

**ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ****Мазинова Л.Э., Попова С.В.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: mazinowal@mail.ru*

Теория комплексных чисел исторически вышла из потребностей математики, но в дальнейшем нашла широкое применение в технических дисциплинах. Разные формы записи комплексных чисел дают возможность решать задачи в зависимости от поставленных условий. Переход от одной формы к другой позволяет осуществлять формула Эйлера, связывающая тригонометрические формулы и экспоненту. Введение комплексных чисел позволяет более продуктивно и достаточно компактно решать задачи электротехники, выполняя действия с помощью формул или векторов. Метод комплексных амплитуд, с помощью которого описываются гармонические колебания в линейных электрических цепях, позволяет осуществить переход от реальных гармонических токов и напряжений к комплексным амплитудам, что, по сути, приводит к изучению реальных процессов в цепях с помощью комплексных чисел.

**Ключевые слова:** формула Эйлера, комплексные числа, расчёты в электротехнике**APPLICATION OF COMPLEX NUMBERS IN ELECTRICAL ENGINEERING****Mazinowa L.I., Popova S.V.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: mazinowal@mail.ru*

The theory of complex numbers has historically emerged from the needs of mathematics, but later it found wide application in technical disciplines. Different forms of recording complex numbers make it possible to solve problems depending on the set conditions. The transition from one form to another makes it possible to realize the Euler formula connecting trigonometric formulas and the exponential. The introduction of complex numbers makes it possible to solve the problems of electrical engineering more productively and fairly compactly, by performing actions with the help of formulas or vectors. The method of complex amplitudes, by means of which harmonic oscillations in linear electric circuits are described, allows the transition from real harmonic currents and voltages to complex amplitudes, which, in fact, leads to the study of real processes in chains by means of complex numbers.

**Keywords:** Euler's formula, complex numbers, calculations in electrical engineering

В математике чрезвычайно обширно используется решение задач с помощью комплексных чисел. Однако, что такое комплексные числа и как они нашли себя в электротехнике [4]?

Для начала рассмотрим формулу Эйлера. Это серьёзная и важная формула, которая объединяет тригонометрические функции  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$  с экспонентой  $e^x$  – с функцией, которая не входит в состав периодических функций, но очень часто используется в электротехнике [1].

Формула Эйлера считается базовой формулой при вычислении комплексных напряжений токов в электротехнике [2].

Известно, что свойства большинства математических функций выводятся на множестве вещественных чисел, если они на этом множестве существуют. Но, например, уравнение

$$x^2 = -5$$

решения в области вещественных чисел не имеет.

Для того чтобы обеспечить решение таких уравнений, было введено понятие комплексного числа, включающего в себя не только вещественную, но и мнимую

часть, которая содержит мнимую единицу, по определению равную

$$i = \sqrt{-1}.$$

Если ввести допущение, что такое число существует, то всё равно очень много математических функций при невыполнении не выводятся за множество комплексных чисел, а продолжают рассматривать на множестве вещественных чисел. При этом остаётся немало задач, особенно прикладного характера, решение которых нужно производить с помощью комплексных чисел [5, 6, 8].

Комплексным числом  $Z$  в общем случае считают сумму пары чисел – вещественного числа  $x$  и произведения  $yi$ , где  $i$  – есть мнимая часть:

$$Z = x + yi.$$

Преимуществом комплексных чисел является то, что, практически, все математические операции над комплексными числами не выходят за множество комплексных чисел, то есть результат действия над комплексными числами можно выразить в виде комплексного числа.

Этим активно пользуются при расчётах в электротехнике. В математике для симво-

лического изображения мнимой единицы используют обозначение  $i$ , но в электротехнике же так принято обозначать ток, поэтому это обозначение заменяют на  $j$ , физический смысл же от этого не меняется:

$$Z = x + jy.$$

Вернёмся, применив эту формулу к тригонометрическим функциям, а именно к  $\cos \varphi$ .

Учтём, что любая функция  $f(x)$  при определённых условиях представима в виде степенного ряда, то есть сводится к виду

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

При разложении функции  $\cos \varphi$  в ряд Маклорена получим:

$$\cos \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!}.$$

Также распишем ряд Маклорена для функции  $\sin \varphi$ :

$$\sin \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Точно так разложим на ряд Маклорена функцию  $e^x$  и получим:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Предположим, что  $x$  принадлежит множеству комплексных чисел и  $x = j\varphi$ . Для того, чтобы получить формулу Эйлера разобьём этот ряд на два ряда по чётным и нечётным степеням  $k$ :

$$e^{j\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

далее в первом и втором слагаемом путём элементарных преобразований вынесем за скобку  $j^{2n}$  и получим:

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^{2n} \varphi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j j^{2n} \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Учитывая то, что  $j^2 = -1$ , то получим следующее:

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^{2n} \varphi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j j^{2n} \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^n \varphi^{2n}}{(2n)!} + j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^n \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \cos \varphi + j \sin \varphi. \end{aligned}$$

Собственно говоря, мы получили формулу Эйлера, устанавливающую зависимость между экспонентой и тригонометрическими функциями и имеющую вид:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

Эта формула существенно помогает упростить математические выражения в комплексной области. Так при описании электромагнитных процессов в цепях переменного тока приходится вычислять много непростых интегралов, что приводит к громоздкому решению. Оказалось, что выполнение поставленных задач упрощается при введении комплексных чисел [3, 7].

Комплексные числа можно представлять в разных формах записи – алгебраической, тригонометрической или показательной – в зависимости от постановки задачи, исходных данных и требуемых результатов, но благодаря формуле Эйлера легко переходить от одной формы записи к другой. Например, переменный ток в цепи можно записать по-разному:

$\dot{I} = a + jb$  – алгебраическая форма;

$\dot{I} = I_m (\cos \varphi_i + j \sin \varphi_i)$  – тригонометрическая форма;

$\dot{I} = I_m e^{j\varphi_i}$  – показательная форма.

При сложении токов в цепях с начальной фазой, равной нулю, сложностей не возникает. Но при сложении токов с разными начальными фазами простая, на первый взгляд, задача приводит к громоздким тригонометрическим вычислениям. Тогда как, используя переход к комплексным числам, эта же задача решается в несколько строк [9, 10].

Если решать задачи электротехники с помощью векторов, то опять же удобно перейти к комплексной записи токов или напряжений и выполнять построения на комплексной плоскости, где горизонтальная ось – ось вещественной части комплексного числа, а вертикальная – ось мнимой части этого же числа.

Комплексные числа также применяются для описания гармонических колебаний в линейных электрических цепях, при этом переход от реальных гармонических токов и напряжений к комплексным амплитудам выражает суть метода комплексных амплитуд, который является моделью исследуемых процессов, где на первое место выдвигаются амплитуды, а время и частоты отодвигаются на задний план. Переход к комплексным значениям позволяет компактно описать один объект сразу двумя величинами.

По сути, переход от реальных гармонических колебаний к комплексным амплитудам есть построение модели с помощью комплексных чисел, которые в этой модели носят названия — комплексный ток, комплексное напряжение, комплексная ЭДС.

Применение комплексных чисел позволяет:

- использовать законы, формулы и методы расчётов, применяющиеся в цепях постоянного тока, для расчёта цепей переменного тока;
- упростить некоторые вычисления, заменив графическое решение с использованием векторов на алгебраическое решение;
- рассчитывать сложные цепи, не решаемые другим путем;
- упростить расчеты цепей постоянного и переменного токов.

### Список литературы

1. Вахтина Е.А., Габриелян Ш.Ж. Электротехника и электроника. — М.: Изд-во «Илекса», 2012.
2. Габриелян Ш.Ж., Вахтина Е.А., Шарипов И.К. Электротехника и электроника. — Ставрополь, 2012.
3. Гулай Т.А., Гринько А.Д., Пантелова Е.М. Математическая модель расчета в электрической цепи с несинусоидальными токами // Международный студенческий научный вестник. — 2017. — № 4-4. — С. 514-517.
4. Гулай Т.А., Невидомская И.А., Мелешко С.В. Анализ и оценка приоритетности разделов дисциплины «математический анализ» изучаемой студентами инженерных направлений // European Social Science Journal. — 2013. — № 8-2 (35). — С. 109-115.
5. Журавлёв И.В., Рыбалкин Н.А., Попова С.В. Применение средств математики для определения скорости катка ступенчатого блока // Международный студенческий научный вестник. — 2015. — № 3-4. — С. 463-465.
6. Математические модели и методы обработки измерительных сигналов емкостных преобразователей на постоянном токе / М.А. Мастепаненко, И.Н. Воронников, С.В. Аникеев, И.К. Шарипов. — Ставрополь, 2015.
7. Моделирование электрических временных параметров активатора импульсного электрического поля / В.И. Хайновский, Г.П. Стародубцева, Е.И. Рубцова, О.С. Копылова, П.В. Никитин, С.И. Любая // Вестник АПК Ставрополя. — 2016. — № 2 (22). — С. 39-44.
8. Попова С.В., Смирнова Н.Б. Влияние развивающих функций математических задач на эффективное обучение студентов вуза // Вестник АПК Ставрополя. — 2015. — № 1 (17). — С. 213-217.
9. Попова С.В., Шкабура А.С. Применение математического аппарата в профессии электроэнергетика / Аграрная наука Северо-Кавказскому федеральному округу: сборник научных трудов по материалам 81-й Ежегодной научно-практической конференции / Ответственный за выпуск Т.А. Башкатова, 2016. — С. 214-218.
10. Смирнова Н.Б., Попова С.В., Мамаев И.И. О прикладной ориентации курса математики в высшей школе // Учетно-аналитические аспекты и перспективы развития инновационной экономики: Международная научно-практическая конференция, 2010. — С. 270-272.

УДК 621.31

## ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ К РАСЧЕТУ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Мазницын А.Ш., Тарасова К.А.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: mazars001@mail.ru

Данная статья посвящена применению матрично-топологического метода для расчета линейных электрических цепей. Существующие методы расчета электрических цепей – непосредственно по законам Кирхгофа, методу контурных токов, эквивалентного генератора, наложения и методу узловых потенциалов – позволяют принципиально рассчитать любую схему. Но их применение без использования топологических матриц рационально для относительно простых схем. Поэтому применение матричных методов расчета позволяет формализовать процесс составления уравнений электромагнитного баланса цепи, а также упорядочить ввод данных в персональный компьютер, что особенно важно и удобно при расчете сложных разветвленных схем. Анализ процессов в линейных электрических цепях вызывает большой интерес в электротехнике. Использование матрицы при расчете электрической цепи позволяет оптимизировать и ускорить процесс решения электротехнических задач.

**Ключевые слова:** матрично-топологический метод, линейные электрические цепи, контурная матрица, узловая матрица, диагональная матрица, реальные токи

## APPLICATION OF MATRIX TO CALCULATION OF LINEAR ELECTRICAL CIRCUITS

Maznitsyn A.S., Tarasova K.A.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol,  
e-mail: mazars001@mail.ru

This article is devoted to the application of the matrix-topological method for calculating linear electric circuits. Existing methods for calculating electrical circuits – directly according to the laws of Kirchhoff, the method of contour currents, the equivalent generator, the superposition and the method of nodal potentials – make it possible in principle to calculate any scheme. But their use without the use of topological matrices is rational for relatively simple schemes. Therefore, the use of matrix calculation methods allows us to formalize the process of drawing up the equations for the electromagnetic balance of the circuit, and also to order the input of data into a personal computer, which is especially important and convenient in the calculation of complex branched circuits. The analysis of processes in linear electrical circuits is of great interest in electrical engineering. The use of the matrix in the calculation of the electrical circuit makes it possible to optimize and accelerate the process of solving electrical problems.

**Keywords:** matrix-topological method, the linear circuit, contour matrix, key matrix, a diagonal matrix, of real currents

Для характеристики линейных электрических цепей используются линейные уравнения для токов и напряжений. Линейные электрические цепи можно заменить линейными схемами замещения из линейных пассивных (резистивные элементы) и активных элементов (постоянные источники ЭДС или источники тока) с линейными вольтамперными характеристиками [3].

Линейные электрические цепи имеют следующие свойства: принцип наложения и эквивалентного генератора, принцип взаимности, теорема о линейных соотношениях, теорема компенсации. Эти свойства учитываются при выборе методов расчета и свойств линейных электрических цепей. Наиболее применимы: метод эквивалентно-

го преобразования, расчет схем с использованием законов Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых потенциалов, метод эквивалентного генератора, метод наложения, применение матриц (узловая, диагональная, матрица сопротивлений). Матрицы удобно составлять по графу схемы, в которой нет источников тока и ветвей с сопротивлением, равным нулю. Рассмотрим применение матриц к расчету линейных электрических цепей [1].

Задача: рассчитать электрическую цепь, применив матрично-топологический метод.

Дано:  $E_1 = 120$  В,  $E_2 = 210$  В,  $E_3 = 60$  В,  $I = 2$  А,  $R_1 = 25$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $R_3 = 8$  Ом,  $R_4 = 10$  Ом,  $R_5 = 34$  Ом,  $R_6 = 30$  Ом,  $R_7 = 20$  Ом,  $R_8 = 2$  Ом.-

Схема:

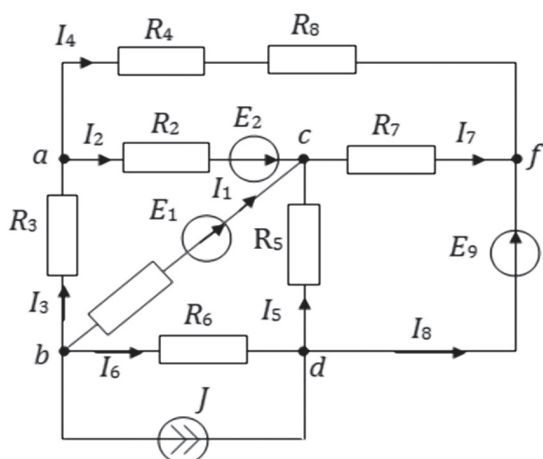


Рис. 1

Решение. Для того чтобы составить граф этой схемы, необходимо исключить из ветви ЭДС  $E_9$ , перенеся её через узел  $f$ , и заменить источник тока  $J$  на источник ЭДС  $E_6 = IR_6$ .

Преобразованная схема будет иметь вид рис. 2.

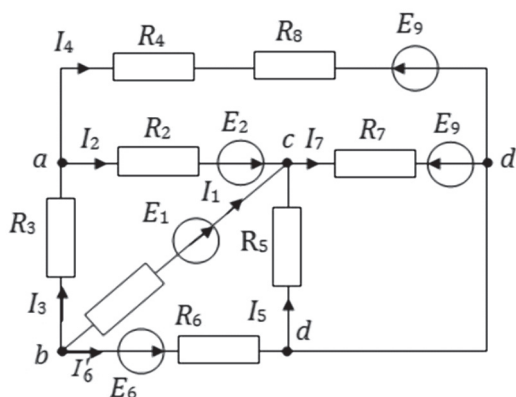


Рис. 2

Примечание. На полученной схеме узлы  $d$  и  $f$  допустимо рассматривать как один узел  $d$ .

Поскольку после преобразований ток, который течет через  $R_6$ , изменился, то обозначим его  $I_6$ .

Граф для преобразованной схемы будет иметь вид рис. 3.

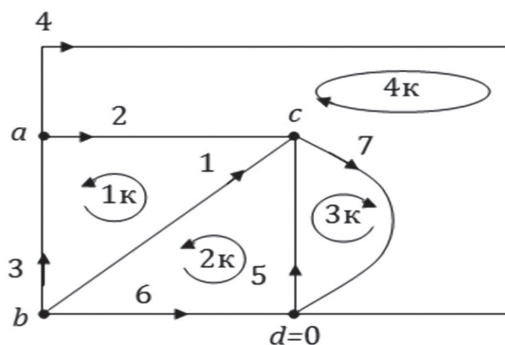


Рис. 3

Узловые и контурные матрицы удобно составлять по графу схемы, в которой нет источников тока и ветвей с сопротивлением, равным нулю. Если такие ветви имеются, то их следует исключить, используя эквивалентные преобразования [2].

Составим узловую матрицу  $A$  для графа (рис. 3), выбрав опорным узел  $d$ :

Ветви

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Узлы

Составим контурную матрицу  $B$  для направлений обходов независимых контуров:

Ветви

$$B = \begin{matrix} \begin{matrix} 1к \\ 2к \\ 3к \\ 4к \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Контур

Связь между узловой и контурной матрицами определяется формулами:

$$B \times A^T = 0, \quad A \times B^T = 0.$$

Составим диагональную матрицу сопротивлений ветвей  $R$ :



$$\begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 + R_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & R_7 \end{pmatrix},$$

а также матрицу ЭДС ветвей E:

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \\ -E_9 \\ 0 \\ JR_6 \\ -E_9 \end{pmatrix}.$$

Найдем контурные токи по формуле

$$I_k = (BRB^T)^{-1} BE = \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \\ I_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,201 \\ 1,08 \\ -4,445 \\ -7,165 \end{pmatrix}.$$

Найдем реальные токи в ветвях по формуле

$$I = B^T I_k = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,879 \\ 6,963 \\ -0,201 \\ -7,165 \\ -3,364 \\ 1,08 \\ 2,72 \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем токи  $I_6$  и  $I_8$  в схеме (рис. 1), применив первый закон Кирхгофа:

$$I_6 = -J - I_1 - I_3 = \\ = -2 + 0,879 + 0,201 = -0,92 \text{ А};$$

$$I_8 = J - I_5 + I_6 = \\ = 2 + 3,364 - 0,92 = 4,445 \text{ А}.$$

Определим  $U_J$ , применив второй закон Кирхгофа:

$$U_J = -I_6 \times R_6 = 27,586 \text{ ВТ.}$$

Проверим правильность расчета с помощью баланса мощности:

$$P_{\text{и}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_9 I_8 + J U_J = 1679 \text{ Вт.}$$

$$P_{\text{п}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 (R_4 + R_5) + \\ + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_7 = 1679 \text{ Вт.}$$

Итак, токи в линейной электрической цепи рассчитаны верно.

Таким образом, для оптимизации решения электротехнических задач и упрощения процесса составления уравнений возможно и доступно использование узловой и диагональной матрицы.

#### Список литературы

1. Гулай Т.А., Гатауллина К.Р., Фурсов Д.И., Применение классического метода при математическом расчете переходных процессов // Международный студенческий научный вестник. – 2017. – № 4-4. – С. 511–513.
2. Гулай Т.А., Желтяков В.И., Применение систем линейных алгебраических уравнений при расчете электрических цепей // Международный студенческий научный вестник. – 2017. – № 4-4. – С. 522–524.
3. Гулай Т.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А., Применение технических средств обучения в процессе математической подготовки студентов инженерных направлений // Вестник АПК Ставрополя. – 2014. – № 1 (13). – С. 10–13.
4. Долгополова А.Ф., Колодяжная Т.А. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 1 // Международный журнал экспериментального образования. – 2011. – № 12. – С. 62–63.
5. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 2 // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – №2. – С. 81–82.

## НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

Маслов А.С., Пальцев В.Ю.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: mas-26rus@mail.ru

Статья посвящена проблеме оптимизации процесса использования компьютера, связанной с нейронными сетями. Ежедневное использование компьютера побуждает к постоянному совершенствованию условий его использования, расширения его функционального спектра, надежности. В статье проводится параллель между процессами, происходящими в мозге человека и связанными с нейронами и синапсами, и процессами, происходящими в системе компьютера и связанными с узлами, направленными соединениями и их весом. Делается вывод о том, что нейронные сети не могут заставить компьютеры думать, как люди, однако их возможности позволяют оптимизировать работу пользователя компьютера в силу их положительных качеств и возможности использования без отвлечения на параллельные процессы, в системе, а также multifunctionality. Также они открывают поле для дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** математика, нейронные сети, узлы соединения, обратное распространение, функция передачи

## NEURAL NETWORKS

Maslov A.S., Paltsev V.Y.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: mas-26rus@mail.ru

The article is devoted to the problem of optimizing the process of using a computer connected with neural networks. Daily use of the computer encourages constant improvement of the conditions of its use, expansion of its functional spectrum, reliability. The article draws a parallel between the processes occurring in the human brain and associated with neurons and synapses, and processes occurring in the computer system and connected with nodes, directed joins and their weight. It is concluded that neural networks can not make computers think like people, but their capabilities allow to optimize the work of the computer user due to their positive qualities and the possibility of using without distraction for parallel processes, in the system, and multifunctionality. They also open the field for further research.

**Keywords:** mathematics, neural networks, connection nodes, backward propagation, transfer function

Современные компьютеры несмотря на то, что могут сделать довольно простые. Они берут исходные данные, делают вычисления и выводят данные. Человеческий мозг гораздо сложнее. Человеческий мозг имеет миллиарды нейронов, и они общаются друг с другом, используя электрические импульсы. Таким образом, они создают синапсы, и масса синапсов отвечает за способность мозга думать и иметь сознание [1].

Некоторые ученые думали, что смогут сделать компьютеры, смоделировав эту систему нейронных связей. Они назвали свою идею нейронными сетями. Идея, стоящая за нейронными сетями, состоит в том, что у нас есть узлы, которые связаны друг с другом. Это похоже на нейроны и синапсы в мозге. Мы побуждаем узел с помощью исходных данных, а этот узел в свою очередь побуждает связанные с ним узлы. Но это не очень полезно, поэтому нейронные сети организуются так, как нужно для необходимых результатов. С тех пор как мы стали использовать компьютерную модель вычисления мы бы хотели использовать хорошо определенные входные и выходные узлы. Мы также хотели бы иметь направленные соединения, чтобы знать каким пу-

тем пройдет информация. Но кроме этого, мы хотим, чтобы у наших соединений были разные значения, это означает, что некоторые соединения более важные, чем другие. Эти разные значения называются весом, который показывает отличие одних областей от других. Назначение обладания разным весом в соединениях заключается в том, что это позволяет нашим узлам вести себя как настоящие нейроны. Когда узел возбуждается двумя разными узлами, вы можете решить какой из двух узлов более важен ему, используя вес.

На этом примере узлы А и В имеют разный вес, и они пытаются передать свои значения узлу С, так как они связаны с ним (рис. 1). Но связь между В и С толще, чем связь между А и С. Поэтому узел С решает, что В более важен и принимает его значения. В некоторых случаях мы бы хотели, чтобы узлы сами решали каких возбудителей им выбрать. Поэтому каждый узел думает о своих действиях. Для решения у каждого узла есть функции передачи для суждения входных данных. Так как компьютеры рассматривают всю информацию в виде чисел, функция передачи – это математическое уравнение, обычно не слишком сложное [2].

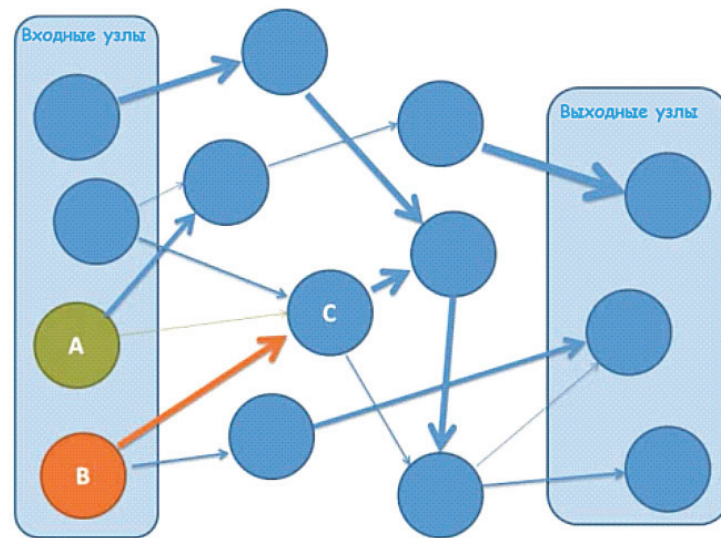


Рис. 1

Примерами функций передачи являются: линейная функция; пороговая функция; сигмоидальная функция; логистическая функция; гиперболический тангенс; модифицированный гиперболический тангенс.

$$F(x) = tx, \quad (1)$$

где  $t$  – параметр функции

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq T \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \quad (2)$$

где  $T$  – сдвиг функции активации

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad (3)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{(1 + \exp(-tx))}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}(Ax) = \frac{e^{Ax} - e^{-Ax}}{e^{Ax} + e^{-Ax}}, \quad (5)$$

$$\operatorname{mtgx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{ax} + e^{-bx}} \quad (6)$$

при  $(a, b > 1)$ .

После принятия решения, узел принимает значение от выбранного возбудителя

и сам становится возбудителем. Принятие решения о передаче значения очень полезно для выходных данных, так как эти узлы создают результаты, которые нам обычно нужны. Обычно функция передачи возвращает значение, как комбинацию узлов с разными значениями. Итак, для использования веса соединений и функций передачи, нейронные сети берут начальные (входные) и производят конечные (выходные) данные. Это та же задача, которую делает компьютер. Но она выполнена в виде более близком для нашего мозга [3].

Так как важны только входные и выходные узлы, мы полагаем, что узлы в середине скрыты. Они делают большую часть работы, но получают меньше похвалы. Один из самых важных вопросов – как определен вес соединения. Оказывается, нейронные сети могут выучить их. Сам это процесс называется обратным распространением. Если выбрать соединения с разным весом, тогда с данным набором входных данных мы выбираем желаемый набор выходных данных (рис. 2 и 3). Используя случайный вес, мы позволяем сети вычислять некоторые выходы, потом мы сравниваем вычисленные нейронной сетью данные с желаемыми данными.

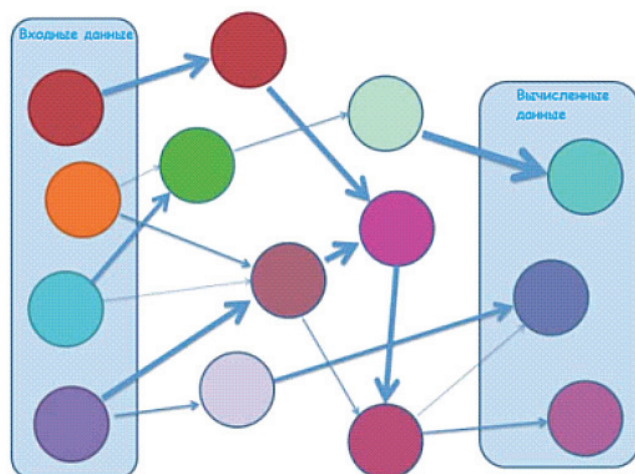


Рис. 2

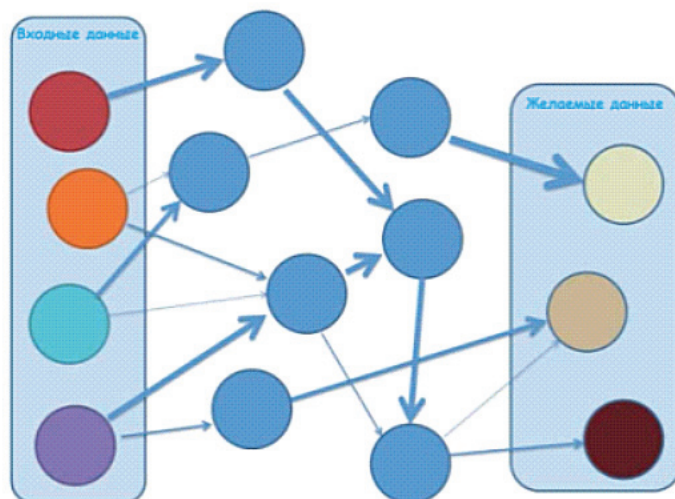


Рис. 3

Так как мы дали сети случайные данные, то не можем ожидать, что два выхода будут иметь одинаковые значения. Итак, мы находим разницу. Мы называем эту разницу ошибкой в сети. На примере мы дали каждой ячейке численное значение (рис. 4). Можно увидеть, что мы находим ошибку, просто вычитая и получая значения, называемые отрицательные ошибки. Теперь, имея ошибки, мы должны привести в порядок вес соединений. Попытаться получить меньшие ошибки, здесь нам поможет обратное распространение ошибки.

Выходные узлы сообщают скрытым узлам, что они соединены к ошибке и вместе они исправляют соединение между ними. Новые данные вычисляются по формуле (7), основанной на старых данных, ошибке и скоростью обучения.

$$W_{j,i} \leftarrow W_{j,i} + aa_j \Delta_j,$$

$$\Delta_j = (T_i - O_i) g' \sum_j^n W_{j,i} a_j. \quad (7)$$



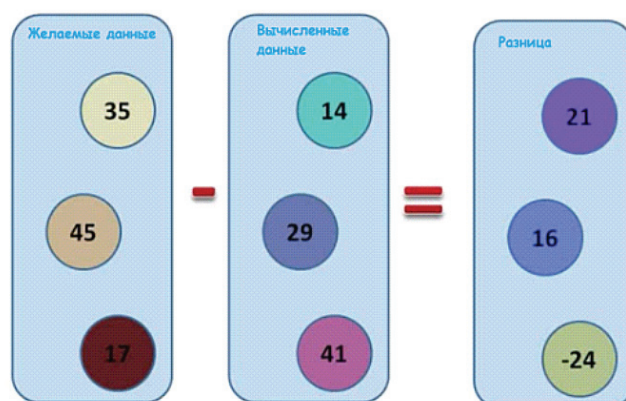


Рис. 4

Мы вернемся к определению скорости обучения позже. Скрытые узлы высчитывают собственную ошибку используя похожую на прежнюю формулу. Потом эти узлы с новыми вычисленными ошибками, прогоняют эти ошибки через скрытые узлы и исправляют вес позади них. Этот процесс будет идти, пока каждый вес не будет исправлен и определена каждая ошибка. Идея заключается в том, чтобы определить какие узлы виновны за ошибки в конечных данных и попытаться исправить вес. После обновления данных в узлах, сеть пытается использовать первоначальные данные и вычислить выходные данные. Данные будут близки к желаемым, но все еще будет ошибка. И весь процесс исправлений будет повторяться, пока ошибка полностью не исчезнет. Кроме того, нейронной сети нужно проделать этот процесс для всех входных данных в узлах [3].

Но это работает, обычно нейронная сеть произведет желаемые данные. Можно попытаться вычислить желаемый результат намного быстрее, изменив скорость обучения и также количество узлов в сети. Но все еще на это уйдет миллион попыток нейронной сети для решения простой проблемы.

Итак, могут ли нейронные сети заставить компьютеры думать как люди? Скорее всего нет, но мы можем многое получить от нейронных сетей. Их способность обучаться делает их гибкими и мощными. Кроме того, нет необходимости разрабатывать алгоритм для выполнения конкретной задачи; то есть нет необходимости понимать внутренние механизмы этой задачи. Они также очень хорошо подходят для систем реального времени из-за их быстрого ответа и времени

вычисления, которое обусловлено их параллельной архитектурой. Нейронные сети также способствуют другим областям исследований, таким как неврология и психология. Они регулярно используются для моделирования частей живых организмов и для исследования внутренних механизмов мозга.

Возможно, самым захватывающим аспектом нейронных сетей является возможность создания каких-то «сознательных» сетей. Существует целый ряд ученых, утверждающих, что сознание является «механическим» свойством и что «сознательные» нейронные сети являются реалистичной возможностью.

#### Список литературы

1. Королькова Л.Н., Литвин Д.Б., Шепеть И.П. Компьютер как инструмент социализации личности // Социальные и экономические аспекты использования информационных технологий в условиях инновационного развития регионов России: Сборник научных статей по материалам Всероссийской научно-практической конференции, 2017. – С. 108–111.
2. Крутаков Ю.Б., Королькова Л.Н., Бондарева Г.А. Решение в явном виде системы уравнений колмогорова для стационарного случая // НаукаПарк. – 2017. – № 3 (54). – С. 99–104.
3. Носиков Д.В., Королькова Л.Н. Методы визуализации объектов данных в интернете на основе технологии Svg // Инновационные направления развития в образовании, экономике, технике и технологиях: сборник статей в 2 ч. / ФГБОУ ВПО «Донской государственный технический университет», Технологический институт сервиса (филиал), 2016. – С. 126–131.
4. Писаренко И.Н., Королькова Л.Н., Литвин Д.Б. Необходимость исследования IDS как элемента инфраструктуры безопасности // Инновационные направления развития в образовании, экономике, технике и технологиях: сборник статей в 2-х ч. / ФГБОУ ВПО «Донской государственный технический университет», Технологический институт сервиса (филиал), 2016. – С. 139–142.
5. Khabarov A.N., Knyagin A.A., Bondarenko D.V., Shepet I.P., Korolkova L.N. Heuristic model of the composite quality index of environmental assessment // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science Current Problems and Solutions. Сер. «Ecology and Safety in the Technosphere: Current Problems and Solutions», 2017. – С. 012036.



УДК 519.21

**ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫПАДЕНИЯ «СЧАСТЛИВОГО» БИЛЕТА  
НА ЭКЗАМЕНЕ****Реvegук Ю.А., Рудикова Е.С.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: reveguk.tatyana@yandex.ru*

Вокруг нас происходит так много вещей и событий, которые, несмотря на уровень развития науки, трудно спрогнозировать. Сложно предугадать с каким номером выпадет бочонок при игре в лото или сколько будет солнечных дней в году. Но при этом, имея дополнительные сведения, возможно прогнозировать и вычислять вероятность таких событий. В данной статье идет речь о теории вероятности, составлен алгоритм решения задач по этой теме, а так же приведены примеры, с помощью которых возможно вычислить вероятность выпадения «счастливого» билета на экзамене. Теория вероятности – это отличный помощник, при предсказании наступления определенного события, в том числе выпадения «счастливого» билета на экзамене. Простые формулы позволяют провести расчеты любому человеку.

**Ключевые слова:** теория вероятности, «счастливый» билет, задачи**PROBABILITY OF LOSS OF A HAPPY TICKET ON THE EXAM****Reveguk Y.A., Rudikova E.S.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: reveguk.tatyana@yandex.ru*

Around us, there are so many things and events that, despite the level of development of science, it is difficult to predict. It is difficult to predict with what number a barrel will drop out when playing a lotto or how many sunny days a year it will be. However, with additional information, it is possible to predict and calculate the probability of such events. In this article we are talking about the theory of probability, an algorithm for solving problems on this topic is compiled, and examples are given with which it is possible to calculate the probability of a «happy» ticket dropping out of the exam. Probability theory is an excellent assistant when predicting the occurrence of a certain event, including the loss of a «happy» ticket on the exam. Simple formulas allow you to make calculations to any person.

**Keywords:** probability theory, «happy» ticket, tasks

Каждый человек в той или иной мере применяет теорию вероятности для анализа произошедших в его жизни событий. Люди обращают внимание на вероятность вещей и прогнозируют свое дальнейшее поведение. Но к большому сожалению, не всегда возможны точно определить вероятность того или иного события [1, 3].

Примеров реального использования теории вероятности в жизни огромное множество. Так, практически вся современная экономика базируется на ней. В общем, можно сказать, что теория вероятности будет иметь большое значение в начале практически любой деятельности, а так же в её регулировании. Она дает возможность оценить шансы той или иной неполадки, позволяет нам понять, что нужно проверить и какие усилия необходимо предпринять, исходя из полученных данных [5].

Любую деятельность любой сферы можно проанализировать, используя статистику, рассчитать благодаря теории вероятности и заметно улучшить.

Попробуем составить собственный алгоритм для решения задач по теории вероятности [2, 4]:

1. Необходимо ознакомиться с условием задачи и понять какие действия, с какими предметами выполняются.

2. Определить ключевой вопрос задачи и обозначить событие, вероятность которого необходимо вычислить.

3. Чтобы выбрать дальнейшую последовательность действий следует конкретизировать тип задачи и выяснить, какие формулы будут использоваться в дальнейшем для её решения.

4. Исходя из ответов на приведенные вопросы, выбрать формулы и подставить в них данные задачи.

5. Готово, вероятность найдена.

Одно из важных событий в жизни любого студента – это сессия. Это то время, когда нервничают все, включая отличников. Ведь всегда существует вероятность не сдать экзамен. Чтобы этого не произошло необходимо соблюдать десятки различных примет, можно даже обратиться к нумерологии. Но один из простых способов вытянуть счастливый билет – рассчитать вероятность его выпадения.

Составим и решим несколько простых задач, на примере которых каждый студент

может вычислить вероятность выпадения счастливого билета на экзамене [6].

Задача 1. «На экзамене по математике шесть студентов второго курса факультета агробиологии и земельных ресурсов друг за другом вытягивают билеты. Тридцать билетов включают в себя четыре простых вопроса. Необходимо вычислить вероятность, что хотя бы одному студенту попадет билет с простыми вопросами».

Решение. В первую очередь, определим ключевой вопрос задачи – вычислить вероятность, что хотя бы одному студенту попадет билет с простыми вопросами.

Далее пойдем от обратного, найдем вероятность того, что никому из студентов не попадет простой билет.

Эта вероятность будет равна

$$P = \frac{26}{30} \cdot \frac{25}{29} \cdot \frac{24}{28} \cdot \frac{23}{27} \cdot \frac{22}{26} \cdot \frac{21}{25} \approx 0,388.$$

Первая дробь  $\frac{26}{30}$  показывает вероятность того, что билет со сложным вопросом достался первому студенту.

Вторая дробь  $\frac{25}{29}$  показывает вероятность того, что билет со сложным вопросом

достался второму студенту. Третья дробь  $\frac{24}{28}$  показывает вероятность того, что билет со сложным вопросом достался третьему студенту и так далее до шестого студента. Так как в задаче требуется одновременное выполнение условий, то вероятности следует перемножить.

Для того, чтобы найти искомую вероятность, надо вычесть полученную выше вероятность из единицы.

$$1 - 0,388 = 0,612.$$

Задача 2. Леша, студент второго курса факультета механизации сельского хозяйства, сдаёт экзамен по теоретической механике, при этом из 50 билетов 35 он знает хорошо, а 15 плохо. Допустим, группа сдаёт экзамен по частям. В первый день 15 человек, включая Алексея. В каком случае Леше достанется с большей вероятностью «счастливый» билет – если он пойдет на экзамен в числе первых, в середине или же будет тянуть билет последним? Когда ему лучше зайти в кабинет?

Для начала рассмотрим случай, при котором Леша сохраняет свои шансы посто-

янными, то есть он не знает какие билеты вытянули однокурсники и не учит вопросы, которые знает плохо.

Пусть Алексей зайдет в аудиторию первым и вытянет «счастливый» билет, обозначим это событие  $X_1$ . По классическому определению вероятности:

$$P(X_1) = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}.$$

Может ли измениться вероятность извлечения нужного билета, если пропустить вперед отличника Жору? В этом случае станут возможными две несовместимые гипотезы:

$B_1$  – Жора вытянет «счастливый» (для Леша) билет;

$B_2$  – Жора вытянет «несчастливый» билет, таким образом, увеличивая шансы Леша.

Событие  $X_2$ , при котором Леша зайдет вторым и вытянет «счастливый» билет становится зависимым.

1) Можно предположить, что Жора с вероятностью

$$P(B_1) = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$$

забрал у Леша «удачный» билет. Тогда останется всего 49 билетов, среди которых 34 «Счастливых». По классическому определению вероятности:

$$P_{B_1}(X_2) = \frac{34}{49}.$$

2) Допустим, что Жора с вероятностью

$$P(B_2) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

«спас» Лешу от одного сложного билета. В этом случае останется 49 билетов, 35 из которых «счастливые». Тогда по классическому определению вероятности:

$$P_{B_2}(X_2) = \frac{35}{49}.$$

Воспользовавшись теоремами сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей зависимых событий, определим вероятность, что Леша вытянет «счастливый» билет, будучи вторым в очереди:

$$\begin{aligned}
 P(X_2) &= P(B_1 X_2 + B_2 X_2) = \\
 &= P(B_1 X_2) + P(B_2 X_2) = \\
 &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(X_2) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(X_2) = \\
 &= \frac{7}{10} \cdot \frac{34}{49} + \frac{3}{10} \cdot \frac{35}{49} = \frac{7}{10}.
 \end{aligned}$$

Вероятность не изменилась.

Рассмотрим следующее событие  $X_3$ , при котором Леша пойдет третьим, пропустив перед собой Жору и Леру, и вытянет «счастливый» билет.

В данном событии гипотез будет больше: однокурсники могут забрать два удачных билета или же два неудачных, так же вытянуть один «счастливый» билет и один «несчастливый» билет. Проведем аналогичные рассуждения, воспользуемся теми же теоремами и получим значение вероятности

$$P(X_3) = \frac{7}{10}.$$

И так далее.

Следовательно, не важно, когда идти – первоначальные вероятности останутся неизменными. Но нужно помнить, что это лишь усредненная теоретическая оценка. Если Леша пойдет последним на экзамен, то это не значит, что ему достанутся на выбор 17 «счастливых» билетов и 19 «несчастливых» билетов в соответствии с его изначальными шансами. Это соотношение может изменяться, как в лучшую, так и в худшую сторону. Однако, маловероятно, что среди билетов останутся одни «счастливые» или же наоборот – «несчастливые».

Математика и «чистый эксперимент» – это хорошо, но чего следует придерживаться в реальных условиях? Нужно принять во внимание субъективные факторы, такие как дополнительный балл для «храбрецов» или же усталость преподавателя в конце экзамена. Часто они могут решающими факторами.

В случае, если вы хорошо подготовились к экзамену, то лучше идти в числе первых, так как есть полный комплект билетов, постулат «мало возможные события не происходят» работает в большей степени.

Если же студент готов к экзамену достаточно хорошо, но пробелы в знаниях

всё-таки есть, то будет целесообразно пропустить вперед несколько человек и ожидать подходящего момента вне аудитории. Здесь нужно действовать по ситуации, когда начнет поступать информация о вытянутых билетах, и можно будет учить и повторять оставшиеся билеты, повышая первоначальную вероятность своего успеха.

В случае, если вы готовы неважно или плохо, то лучше идти в последнюю очередь. Существует небольшая вероятность, что останутся «счастливые» для вас билеты, вы можете изучить материал за время экзамена или же (в крайнем случае) сделать «шпаргалку».

Никогда невозможно точно предугадать, что произойдет с нами через день, два. Ведь событий связанных с нами в каждый момент невероятно много. Безусловно, мало кто будет высчитывать по формулам вероятность появления событий, но иногда бывает интересно проверить совпадает ли «эмпирический анализ» с математическим. Теория вероятности позволяет предугадать лишь однотипные события. Именно поэтому её применение связано с большим количеством условий и ограничений, существуют такие задачи, вычисления в которых можно провести лишь с использованием компьютера.

### Список литературы

1. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Задачи с экономическим содержанием на занятиях по дифференциальному исчислению // Актуальные вопросы теории и практики бухгалтерского учета, анализа и аудита: ежегодная 75-я научно-практическая конференция / Редколлегия: В.З. Мазлоев, А.В. Ткач, И.С. Санду, И.Ю. Скляр, Е.И. Костюкова, ответственный за выпуск А.Н. Бобрышев, 2011. – С. 124–127.
2. Гулай Т.А., Жукова В.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А. Математика: рабочая тетрадь. – Ставрополь, 2015.
3. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Жукова В.А., Мамаев И.И. Модель экономического роста с распределенным запаздыванием в инвестиционной сфере // Вестник АПК Ставрополя. – 2017. – № 2 (26). – С. 225–228.
4. Математика. Теория вероятностей и случайные величины: рабочая тетр.; учеб. пособие для студентов вузов по направлениям: 38.03.04 – «Гос. муницип. упр.», 38.03.05 – «Бизнес-информатика» / Т.А. Гулай, В.А. Жукова, С.В. Мелешко, И.А. Невидомская; СтГАУ. – Ставрополь: Сервисшкола, 2016.
5. Элементы теории вероятностей случайных событий: Рабочая тетрадь / И.А. Невидомская, С.В. Мелешко, Т.А. Гулай. – Ставрополь: Сервисшкола, 2015.
6. Теория вероятностей для экономических специальностей на базе Excel (практикум) / А.Ф. Долгополова, О.В. Морозова, Е.В. Долгих, Р.В. Крон, Н.Н. Тынянко, С.В. Попова, Н.Б. Смирнова // Международный журнал экспериментального образования. – 2009. – № 54. – С. 19.

УДК 303.723:311.16

**ПРОВЕРКА ЗНАЧИМОСТИ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ****Савельева А.С., Черненко Н.А.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: saveleva25.73@mail.ru*

Исследователя нередко интересует, как связаны между собой две или большее количество переменных в одной или нескольких изучаемых выборках. Например, может ли рост влиять на вес человека или может ли давление влиять на качество продукции? Такого рода зависимость между переменными величинами называется корреляционной, или корреляцией. Задача корреляционного анализа сводится к установлению направления (положительное или отрицательное) и формы (линейная, нелинейная) связи между варьирующими признаками, измерению ее тесноты, и, наконец, к проверке уровня значимости полученных коэффициентов корреляции. В статье рассматривается применение корреляционного анализа с расчетом коэффициентов корреляции Стьюдента. Изложенный материал дает общие сведения об оценке степени тесноты взаимосвязи между переменными.

**Ключевые слова:** корреляционный анализ, коэффициенты корреляции, выборка, переменные, случайные колебания, генеральная совокупность

**TEST OF SIGNIFICANCE FOR CORRELATION COEFFICIENT****Saveleva A.S., Chernenko N.A.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: saveleva25.73@mail.ru*

The researcher is often interested in how two or more variables are related to one or more of the samples studied. For example, can growth influence the weight of a person, or can pressure affect product quality? This kind of relationship between variables is called correlation, or correlation. The problem of correlation analysis is reduced to establishing the direction (positive or negative) and the form (linear, nonlinear) of the relationship between the varying signs, measuring its tightness, and, finally, to checking the significance level of the correlation coefficients obtained. The article discusses the use of correlation analysis with calculation of correlation coefficients t-test. The article gives an overview of the assessment of the degree of closeness of the relationship between the variables.

**Keywords:** correlation analysis, correlation coefficients, sampling, variables, random vibration, a general population

Как неоднократно отмечалось, для статистического вывода о наличии или отсутствии корреляционной связи между исследуемыми переменными необходимо произвести проверку значимости выборочного коэффициента корреляции. В связи с тем что надежность статистических характеристик, в том числе и коэффициента корреляции, зависит от объема выборки, может сложиться такая ситуация, когда величина коэффициента корреляции будет целиком обусловлена случайными колебаниями в выборке, на основании которой он вычислен. При существенной связи между переменными коэффициент корреляции должен значимо отличаться от нуля. Если корреляционная связь между исследуемыми переменными отсутствует, то коэффициент корреляции генеральной совокупности  $\rho$  равен нулю [9].

Как всякая статистическая характеристика, выборочный коэффициент корреляции является случайной величиной, т.е. его значения случайно рассеиваются вокруг одноименного параметра генеральной совокупности (истинного значения коэффициента корреляции) [1].

При отсутствии корреляционной связи между переменными  $y$  и  $x$  коэффициент

корреляции в генеральной совокупности равен нулю. Но из-за случайного характера рассеяния принципиально возможны ситуации, когда некоторые коэффициенты корреляции, вычисленные по выборкам из этой совокупности, будут отличны от нуля [5].

Процедура проверки значимости начинается с формулировки нулевой гипотезы  $H_0$ . В общем виде она заключается в том, что между параметром выборки и параметром генеральной совокупности нет каких-либо существенных различий. Альтернативная гипотеза  $H_1$  состоит в том, что между этими параметрами имеются существенные различия. Например, при проверке наличия корреляции в генеральной совокупности нулевая гипотеза заключается в том, что истинный коэффициент корреляции равен нулю  $H_0: \rho = 0$ . Если в результате проверки окажется, что нулевая гипотеза не приемлема, то выборочный коэффициент корреляции  $r_{x,y}$  значимо отличается от нуля (нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная  $H_1$ ) [7, 10].

При проверке значимости исследователь устанавливает уровень значимости  $\alpha$ , который дает определенную практическую уверенность в том, что ошибочные заключения будут сделаны только в очень



редких случаях. Уровень значимости выражает вероятность того, что нулевая гипотеза  $H_0$  отвергается в то время, когда она в действительности верна. Ясно, что имеет смысл выбирать эту вероятность как можно меньшей [2].

Пусть известно распределение выборочной характеристики, являющейся несмещенной оценкой параметра генеральной совокупности. Выбранному уровню значимости  $\alpha$  соответствуют под кривой этого распределения заштрихованные площади (см. рис. 1). Незаштрихованная площадь под кривой распределения определяет вероятность

$$P = 1 - \alpha.$$

Границы отрезков на оси абсцисс под заштрихованными площадями называют критическими значениями, а сами отрезки образуют критическую область, или область отклонения гипотезы [3].

Когда же надо убедиться в том, что одна величина в среднем строго больше или меньше другой, используется односторонняя критическая область. Если распределение выборочной характеристики симметрично, то уровень значимости двусторонней критической области равен  $\alpha$ , а односторонней  $\frac{\alpha}{2}$  (см. рис. 1). Далее мы лишь укажем критерии значимости для различных процедур, не останавливаясь на их построении [6].

Проверяя значимость коэффициента парной корреляции, устанавливают наличие или отсутствие корреляционной связи между исследуемыми явлениями. При отсутствии связи коэффициент корреляции генеральной совокупности равен нулю ( $\rho=0$ ). Процедура проверки начинается с формулировки нулевой и альтернативной гипотез [8]:

$H_0$ : различие между выборочным коэффициентом корреляции  $r$  и  $\rho = 0$  незначимо,

$H_1$ : различие между  $r$  и  $\rho=0$  значимо, и следовательно, между переменными  $y$  и  $x$  имеется существенная связь. Из альтернативной гипотезы следует, что нужно воспользоваться двусторонней критической областью.

Выборочный коэффициент корреляции при определенных предпосылках связан со случайной величиной  $t$ , подчиняющейся распределению Стьюдента с  $f = n - 2$  степенями свободы [4].

Вычисленная по результатам выборки статистика

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad (1)$$

сравнивается с критическим значением, определяемым по таблице распределения Стьюдента при заданном уровне значимости  $\alpha$  и  $f = n - 2$  степенях свободы. Правило применения критерия заключается в следующем: если  $|t| > t_{f,\alpha}$ , то нулевая гипотеза на уровне значимости  $\alpha$  отвергается

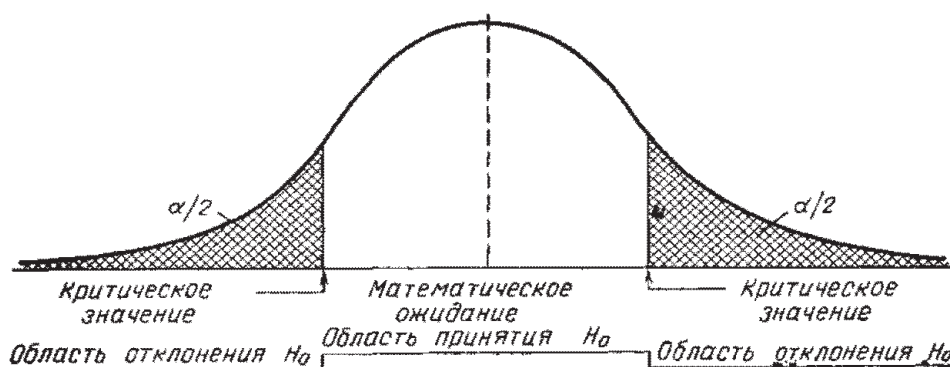


Рис. 1 Проверка нулевой гипотезы  $H_0$



ся, т. е. связь между переменными значима; если

$$|t| > t_{f,a},$$

то нулевая гипотеза на уровне значимости  $\alpha$  принимается. Отклонение значения  $r$  от  $\rho=0$  можно приписать случайной вариации. Данные выборки характеризуют рассматриваемую гипотезу как весьма возможную и правдоподобную, т. е. гипотеза об отсутствии связи не вызывает возражений.

Рассмотрим на конкретном примере проверку гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции.

Для 15 пар порядковых переменных  $(x, y)$  был вычислен коэффициент корреляции Спирмена, который оказался равным  $P_s = 0,64$ . При уровне значимости  $\alpha = 5\%$  проверить гипотезу  $H_0$  о равенстве генерального коэффициента ранговой корреляции нулю  $P_{s_r} = 0$  при конкурирующей гипотезе  $P_{s_r} \neq 0$ .

Решение:

$$H_0 : P_{s_r} = 0$$

$$H_1 : P_{s_r} \neq 0$$

Постановка задачи:

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$t = \frac{P_s \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-P_s^2}} \rightarrow t_{\text{набл}} = \frac{0,64 \sqrt{15-2}}{\sqrt{1-0,64^2}} \approx 3,00.$$

Найдем значения границ двусторонней критической области из условия, что при малых объемах выборок критерий  $t$  распределен (при справедливости нулевой гипотезы) по закону распределения Стьюдента с числом степеней свободы  $k = 15 - 2 = 13$ .

На основе таблицы «Критические точки распределения Стьюдента» найдем границы двусторонней критической области на основе

$$a = 0,05 \text{ и } k = 13 \rightarrow t_{\text{кр}} = 2,16.$$

Полученные результаты покажем графически (рис. 2).

Поскольку наблюдаемое значение критерия попало в критическую область, то следует отклонить нулевую гипотезу в пользу альтернативной гипотезы. Это означает, что коэффициент ранговой корреляции значим: между двумя порядковыми случайными величинами  $X$  и  $Y$  в генеральной совокупности имеется значимая связь, которая говорит о наличии связи этих двух случайных величин.

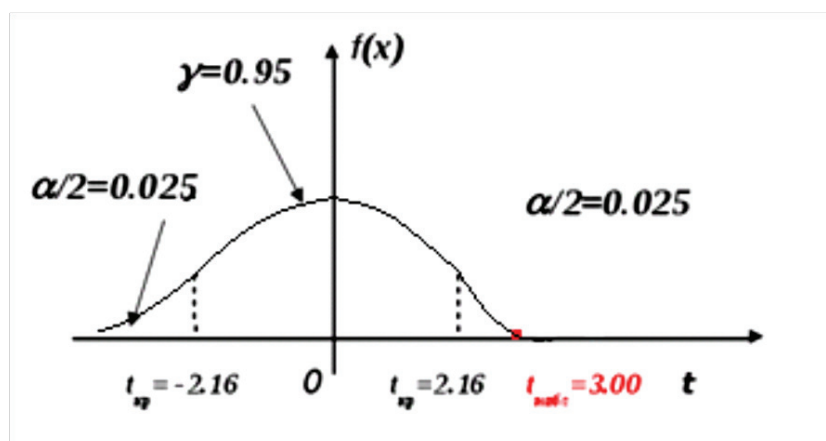


Рис. 2

## Список литературы

1. Бондаренко В.А., Донец З.Г., Цыплакова О.Н. Теория игр и финансовые рынки // Финансово-экономические и учетно-аналитические проблемы развития региона: материалы Ежегодной 78-й научно-практической конференции. – 2014. – С. 231–236.
2. Бондаренко В.А., Мамаев И.И., Сахнюк П.А., Сахнюк Т.И. Решение задачи планирования посевов с использованием теории игр // Экономические, инновационные и информационные проблемы развития региона: материалы Международной научно-практической конференции. – 2014. – С. 56–62.
3. Бондаренко Д.В., Бражнев С.М., Литвин Д.Б., Варнавский А.А. Метод повышения точности измерения векторных величин // Наука Парк. – 2013. № 6 (16). – С. 66–69.
4. Гулай Т.А., Литвин Д.Б., Попова С.В., Мелешко С.В. Прогнозирование в регрессионном анализе при построении статистических моделей экономических задач с помощью программы Microsoft excel // Экономика и предпринимательство. – 2017. – № 8–2 (85–2). – С. 688–692.
5. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Финансовая математика в инвестиционном проектировании (учебное пособие) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 8–2. – С. 178–179.
6. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Совершенствование экономических механизмов для решения проблем экологической безопасности // Информационные системы и технологии как фактор развития экономики региона. II Международная научно-практическая конференция, 2013. – С. 68–71.
7. Литвин Д.Б. Дифференциальное исчисление в исследовании производственных моделей. // В сборнике: экономические приоритеты и информационный механизм устойчивого развития регионов России: Сборник научных статей Всероссийской научно-практической конференции, 2017. – С. 102–105.
8. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Жукова В.А., Мамаев И.И. Модель экономического роста с распределенным запаздыванием в инвестиционной сфере. // Вестник АПК Ставрополя. – 2017. № 2 (26). – С. 225–228.
9. Литвин Д.Б., Шепеть И.П. Моделирование роста производства с учетом инвестиций и выбытием фондов. // Социально-экономические и информационные проблемы устойчивого развития региона: Международная научно-практическая конференция. – 2015. – С. 114–116.
10. Литвин Д.Б., Шепеть И.П., Бондарев В.Г., Литвина Е.Д. Применение дифференциального исчисления функций нескольких переменных к разработке алгоритма определения координат объекта. // Финансово-экономические и учетно-аналитические проблемы развития региона: Материалы Ежегодной 78-й научно-практической конференции, 2014. – С. 242–246.

УДК 621.3:629.3.015.3

# **ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТОВ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ И АЭРОДИНАМИКЕ**

**Тураев Р.М., Урядов Н.В.**

*ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: inf@stgau.ru*

Данная статья посвящена использованию интегралов в курсе изучаемых нами предметов, а именно физики, электроники и электротехники. В настоящее время многие процессы, которые происходят в природе, описываются при помощи дифференциальных уравнений. Интегральные исчисления, в большинстве своём, используются там, где имеются какие-либо переходные процессы или присутствует множество переменных. Поэтому, в данной статье, на конкретных примерах будут продемонстрированы особенности применения интегрирования в задачах различных уровней сложности. Показана последовательность их решения. Продемонстрировано то, что в каждой задаче могут применяться различные типы интегралов, как определённые, так и именные. Итогом статьи будет установление общей черты всех задач, для решения которых требуется применять интегральный метод счисления.

**Ключевые слова:** интеграл, физика, математика, интеграл Дюамеля, электротехника, аэродинамика, производная, уравнение

## **APPLICATION OF DEVICES OF INTEGRAL CALCULUS FOR SOLVING APPLIED PROBLEMS IN ELECTRICAL ENGINEERING AND AERODYNAMICS**

**Turaev R.M., Uryadov N.V.**

*Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru*

This article is devoted to the use of integrals in the course of the subjects we are studying, namely, physics, electronics and electrical engineering. Currently, many processes that occur in nature are described using differential equations. Integral calculi, in most cases, are used where there are some transients or there are many variables. Therefore, in this article, specific examples will demonstrate the features of the application of integration in problems of various levels of complexity. The sequence of their solution is shown. It is demonstrated that in each problem different types of integrals can be used, both definite and nominal. The result of the article will be the establishment of a common feature of all problems, for the solution of which it is required to apply the integrated method of calculation.

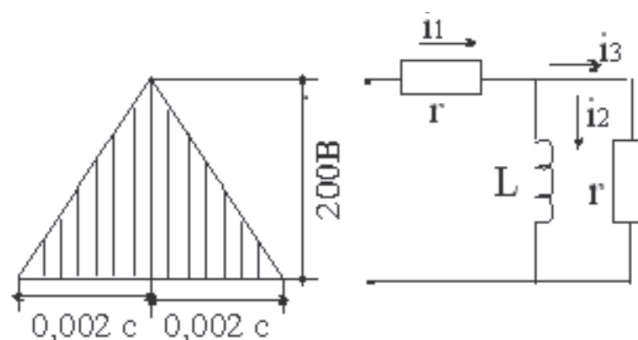
**Keywords:** integral, physics, mathematics, Duhamel integral, electrical engineering, aerodynamics, derivative, equation

На втором курсе мы начнем изучать такую дисциплину, как электротехника, где задачи решаются не простыми математическими действиями, а сводятся к использованию матриц, дифференциалов, определённых и не определённых интегралов. Данная статья будет посвящена использованию интегралов при решении сложных задач.

Хорошим примером могут служить задачи, решаемые с помощью интеграла Дюа-

меля. Данный интеграл применяется для нахождения неизвестных при решении задач, в которых происходят переходные процессы в цепях [3, 5].

Задача 1. На зажимах цепи действует одиночный импульс напряжения. Требуется с помощью интеграла Дюамеля определить переходный ток в одной из ветвей заданной цепи, возникающий при действии импульса напряжения и рассчитанного переходного тока.



Дано:

$R=50 \text{ Ом.}$

$L=100 \text{ мГн} = 0,1 \text{ Гн.}$

Найти:  $i_2(t)$ .

Решение.

Для начала мы находим переходную функцию системы  $h(t)$ :

$$h(t) = \frac{i_2(t)}{u(1)}.$$

Теперь находим неизвестные, в данном случае ток с индуктивностью при включении источника напряжения:

$$i_2(t) = Ae^{pt} + i_{2\text{уст}};$$

$$i_{2\text{уст}} = \frac{u(1)}{r}.$$

Нам неизвестна константа  $A$ . Согласно первому закону коммутации, ток через индуктивность скачком изменяться не может. А это значит, что до включения в цепь источника питания, ток в индуктивности отсутствовал, то есть, его и не будет в начальный момент времени  $t=0$ .

$$i_2(0) = Ae^{p0} + \frac{u(1)}{r} = 0.$$

Из данной формулы получаем, что

$$A = -\frac{u(1)}{r}.$$

Характеристическое сопротивление выражается формулой

$$Z_{\text{вх}} = r + \frac{rpL}{pL + r} = 0;$$

$$rpL + r^2 + rpL = 0;$$

$$2pL + r = 0;$$

$$p = -\frac{r}{2L}.$$

Теперь вернемся к начальному уравнению и подставим в него найденных величины:

$$i_2(t) = -\frac{u(1)}{r}e^{-\frac{r}{2L}t} + \frac{u(1)}{r} = \frac{u(1)}{r} \left[ 1 - e^{-\frac{r}{2L}t} \right]$$

$$h(t) = \frac{i_2(t)}{u(1)} = \frac{1}{r} \left[ 1 - e^{-\frac{r}{2L}t} \right] = \\ = \frac{1}{50} \left( 1 - e^{-\frac{50}{2 \cdot 0,1}t} \right) = 0,02(1 - e^{-250t}).$$

Посчитав переходную функцию системы  $h(t)$ , перейдем к нахождению выходной функции напряжения, разбив данную формулу на два участка:

$$u_{\text{вх1}}(t) = U_m \frac{t}{t_1} = 200 \frac{t}{0,002} 10^5 t,$$

$$\text{при } t \in [0; t_1]$$

$$u_{\text{вх2}}(t) = U_m - U_m \frac{t - t_1}{t_1} = 200 - 200 \frac{t - 0,002}{0,002} = \\ = 400 - 10^5$$

$$\text{при } t \in (t_1; \infty)$$

Найдём первую производную данных уравнений:

$$u'_{\text{вх1}}(t) = (10^5 t)' = 10^5$$

$$u'_{\text{вх2}}(t) = (400 - 10^5 t)' = -10^5.$$

Для первого интервала времени ток в индуктивности будет равен:

$$i_2(t) = \int_0^t u'_{\text{вх1}}(\tau) h(t - \tau) d\tau,$$

$$\text{при } t \in [0; t_1]$$

$$i_2(t) = \int_0^t u'_{\text{вх1}}(\tau) h(t - \tau) d\tau =$$

$$= \int_0^t 10^5 \cdot 0,02(1 - e^{-250(t-\tau)}) d\tau = \\ = 2000 \left( t + \frac{e^{-250t} - 1}{250} \right).$$

Для второго интервала времени ток в индуктивности будет равен:

$$i_2(t) = \int_0^t u'_{\text{вх1}}(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau,$$

$$\text{при } t \in (t_1; \infty)$$

$$\begin{aligned}
 i_2(t) &= \int_0^{t_1} u'_{\text{BX1}}(\tau) h(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^t u'_{\text{BX2}}(\tau) h(t-\tau) d\tau = \\
 &= \int_0^{0,002} 10^5 \cdot 0,02 (1 - e^{-250(t-\tau)}) d\tau - \int_{0,002}^t 10^5 \cdot 0,02 (1 - e^{-250(t-\tau)}) d\tau = \\
 &= 0,85 - 2000 \int_{t_1}^t ((t-0,002) - e^{-250(t-\tau)}) d\tau = \\
 &= -2000(0,002 + t - 1,649 e^{-250t})
 \end{aligned}$$

На данном примере мы раскрыли специфику решения задач по электротехнике, используя метод Дюамеля, основанный на принципе суперпозиции для линейных систем.

Теперь рассмотрим пример задачи, не связанной с электротехникой, при решении которой, применяется интегрирование. Возьмем теоретическую задачу на нахождение пройденного пути под действием аэродинамической силы [2, 6].

Решение. При увеличении скорости в среде, на смену вязкому трению приходит сила сопротивления. Она же воздействует на самолет во время полета. Теперь уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = -\beta v^2, \quad (1.1)$$

где неизменяемый коэффициент  $\beta$  зависит от формы тела и свойств среды. Задача заключается в исследовании процессов торможения частиц при попадании в среду, имеющую сопротивление.

Переменные в уравнении движения делятся:

$$\frac{dv}{v^2} = -\beta \frac{dt}{m}.$$

Проинтегрируем это соотношение со времени попадания частицы в среду, то есть ( $t=0$ ) и до произвольно момента времени  $t$ :

$$\begin{aligned}
 \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^2} &= \left\{ \text{т. к. } \frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{dv} = -\frac{1}{v^2}, \text{ то } \frac{dv}{v^2} = -d\left(\frac{1}{v}\right) \right\} = \\
 &= - \int_{v_0}^{v(t)} d \frac{1}{v} = - \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v(t)} = -\frac{\beta}{m} t.
 \end{aligned}$$

Теперь мы можем легко выразить зависимость скорости от времени:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + (\beta v_0 t / m)} \quad (1.2)$$

Замедление частицы происходит по гиперболическому закону, то есть чем больше значение  $\beta v_0 / m$ , тем сильнее частица тормозит.

Для нахождения зависимости пути от времени  $s(t)$ , подставим  $v = ds / dt$  в формулу (1.2):

$$\frac{ds}{dt} = \frac{v_0}{1 + (\beta v_0 t / m)}.$$

Данное уравнение позволяет с легкостью разделить переменные и сделать интегрирование с момента начала движения и до момента времени  $t$

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int_0^{s(t)} ds = v_0 \int_0^t \frac{dt}{1 + (\beta v_0 t / m)} = \left\{ \varepsilon = \frac{\beta v_0 t}{m}, d\varepsilon = \frac{\beta v_0}{m} dt \right\} = \\
 &= \frac{m}{\beta} \int_0^{\beta v_0 t / m} \frac{d\varepsilon}{1 + \varepsilon} = \left\{ \frac{d\varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{d(1 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon} = d[\ln(1 + \varepsilon)] \right\} = \\
 &= \frac{m}{\beta} \int_0^{\beta v_0 t / m} d[\ln(1 + \varepsilon)].
 \end{aligned}$$



Так, как  $\ln(1) = 0$ , получаем:

$$s(t) = \frac{m}{\beta} \ln \left( 1 + \frac{\beta v_0 t}{m} \right). \quad (1.3)$$

Таким образом, мы можем наблюдать, что пройденный частицей путь под действием аэродинамической силы со временем неограниченно увеличивается, в отличие от движения под действием силы вязкого трения. Другими словами, аэродинамическое сопротивление довольно таки мало для полной остановки тела. Но нельзя не отметить тот факт, что на начальном этапе сила аэродинамического замедления может быть больше, чем сила вязкого трения, однако, по мере торможения тела, силы вязкого трения постепенно становятся больше аэродинамических сил. Это приводит к неограниченности пройденного пути в рамках зависимости (1.3). Но в большинстве сред аэродинамическое сопротивление уступает место вязким силам сопротивления, которые завершают процесс торможения [1, 4]

В конечном итоге, можно сделать вывод, что интегральные исчисления используются в различных типах задач, в которых присутствуют переходные процессы или большое количество неизвестных.

### Список литературы

1. Бондаренко В.А., Ханларов С.Т. Применение определенного интеграла в геометрических и физических задачах // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5–2. – С. 143–146.
2. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Задачи с экономическим содержанием на занятиях по дифференциальному исчислению // Актуальные вопросы теории и практики бухгалтерского учета, анализа и аудита: ежегодная 75-я научно-практическая конференция / Редколлегия: В.З. Мазлов, А.В. Ткач, И.С. Санду, И.Ю. Скляр, Е.И. Костокова, ответственный за выпуск А.Н. Бобрышев. – 2011. – С. 124–127.
3. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Некоторые аспекты интегрированного подхода изучения математического анализа // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона: ежегодная 76-я научно-практическая конференция Ставропольского государственного аграрного университета «Аграрная наука – Северо-Кавказскому региону». – 2012. – С. 280–283.
4. Гулай Т.А., Колесников К.А., Применение комплексного метода для расчета токов и напряжений в электрической цепи // Аграрная наука Северо-Кавказскому Федеральному округу: Сборник научных трудов по материалам 81-й Ежегодной научно-практической конференции, 2016. – С. 182–185.
5. Гулай Т.А., Медведев М.А., Производная в электроэнергетике // Аграрная наука Северо-Кавказскому Федеральному округу: Сборник научных трудов по материалам 81-й Ежегодной научно-практической конференции, 2016. – С. 186–189.
6. Гулай Т.А., Невидомская И.А., Мелешко С.В., Анализ и оценка приоритетности разделов дисциплины «Математический анализ» изучаемой студентами инженерных направлений // European Social Science Journal. – 2013. – № 8–2 (35). – С. 109–115.

УДК 519.816

## ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Ширяева М.С.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: mari.serg.mk@gmail.com

Актуальность темы обусловлена тем, что использование методов оптимизации позволяет с максимальной выгодой и минимальными расходами решить задачу о производстве определенной продукции, найти более выгодный вариант и составить наиболее оптимальный план, а также сбалансированный режим работы. Решение оптимизационной производственной задачи играет важную роль в развитии производства в целом. В процессе построения математической модели для решения определяются величины, с помощью которых должна быть построена модель. На переменные накладываются ограничения при которых выполняются условия, характерные для моделируемой системы. Определяется цель задачи, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи. Для построения модели идентифицируются переменные, а цель и ограничения представляется в виде математических функций этих переменных. Надлежащий анализ вопросов подобного рода и корректная формулировка математической модели являются центральным звеном решения задач линейной оптимизации.

**Ключевые слова:** линейная оптимизация, принятие решений, симплекс – метод, математическая модель

## DECISION MAKING IN LINEAR OPTIMIZATION PROBLEMS

Shiryaeva M.S.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: mari.serg.mk@gmail.com

The relevance of the topic is due to the fact that the use of optimization methods allows to solve the problem of producing certain products with the maximum benefit and minimum costs, find a more advantageous option and make the most optimal plan, as well as a balanced mode of operation. The solution of the optimization production problem plays an important role in the development of production as a whole. In the process of constructing a mathematical model, the solution determines the quantities by which the model should be constructed. Variables are constrained under which the conditions characteristic of the simulated system are met. The goal of the task is determined, for the achievement of which from all admissible values of variables one must choose those that correspond to the optimal (best) solution of the problem. To build a model, variables are identified, and the goal and constraints are represented as mathematical functions of these variables. A proper analysis of such questions and the correct formulation of the mathematical model are the central link in solving linear optimization problems.

**Keywords:** linear optimization, decision-making, the simplex method, mathematical model

Актуальность выбранной темы обусловлена тем, что использование методов оптимизации, в том числе и линейного программирования, позволяет с максимальной выгодой и минимальными расходами решить задачу о производстве определенной продукции, найти более выгодный вариант, составить наиболее оптимальный план, а также сбалансированный режим работы. Решение оптимизационной производственной задачи играет важную роль в развитии производства в целом и обосновании эффективности производственных процессов [2].

В управлении производством методы оптимизации влияют на нахождение наилучших хозяйственных решений, которые могут обеспечивать максимальное значение целевой функции и минимальное значение затрат. Необходимость поиска подобного рода решений объясняется наличием различных ограничений на факторы производства, позволяющие предприятиям полноценно и бесперебойно функционировать. Отсутствие подобных ограничений привело

бы к недостаточному количеству вариантов решений [1].

Качество решения большинства экономических задач зависит от наиболее эффективного способа использования ресурсов (сырья, денег, оборудования). Именно эффективностью использования ограниченных ресурсов определяется конечный результат деятельности предприятия [4].

Экономическая суть методов оптимизации заключается в том, что, выбирается такой способ распределения ресурсов предприятия, при котором обеспечивается максимум (или минимум) интересующего ЛПР показателя.

Задачи нахождения значений параметров, обеспечивающих экстремум функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при наличии ограничений, наложенных на аргументы  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , носят общее название – задач математического программирования [5].

Среди задач математического программирования самыми простыми и наиболее

хорошо изученными являются так называемые задачи линейной оптимизации. Для них характерно то, что целевая функция линейно зависит от  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а также то, что ограничения, накладываемые на независимые переменные, имеют вид линейных равенств или неравенств относительно этих переменных [7].

Такие задачи часто встречаются на практике при решении проблем, связанных с распределением ресурсов, планированием производства, организацией работы транспорта. Во многих случаях расходы и доходы линейно зависят от количества закупленных или утилизированных средств.

Как уже отмечалось, оптимизация, включающая теорию и методы решения задач, в которых критерий оптимальности (целевая функция) линейно зависит от параметров задачи, является наиболее разработанным разделом информационных технологий оптимальных решений. Линейные модели широко используются в теории и практике принятия управленческих решений.

Общая задача линейной оптимизации заключается в нахождении максимума (минимума) линейной целевой функции. Функция  $f(x)$  называется целевой функцией, критерием оптимальности или линейной формой.

Вектор значений неизвестных  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих условию задачи, называется допустимым решением или допустимым планом задачи линейной оптимизации. Совокупность всех допустимых планов называется множеством допустимых планов. Допустимое решение называется оптимальным, если оно обеспечивает максимальное (или, в зависимости от условий задачи, – минимальное) значение целевой функции.

Решение задач линейной оптимизации может быть получено без особых затруднений. Классическим методом решения задач данного типа является симплекс-метод. В случае лишь двух переменных успешно может использоваться также графический метод решения, обладающий преимуществом наглядности [6].

Рассмотрим пример решения задачи на нахождение оптимальных значений функции.

Для производства однородной продукции используется три вида сырья – сталь, железо, медь и две технологии – выплавка и ковка. Производительность первой технологии (выплавки) составляет 20 ед. продукции в час, производительность второй технологии (ковки) составляет 30 ед. про-

дукции в час. Необходимое количество сырья (в кг) каждого вида, которое расходуется за 1 час при использовании первой и второй технологий и общие запасы сырья – стали, меди и железа имеющиеся на складе, приведены в таблице.

| Технология   | Потребляемое сырье за 1 час |        |      |
|--------------|-----------------------------|--------|------|
|              | Сталь                       | Железо | Медь |
| Выплавка     | 10                          | 20     | 15   |
| Ковка        | 20                          | 10     | 15   |
| Запасы сырья | 100                         | 100    | 90   |

Определить план производства с использованием первой и второй технологий, при которых выпуск будет максимальным.

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – время использования первой и второй технологий соответственно. Тогда объем выпуска продукции с учетом производительности технологий равен:

$$Z = 20x_1 + 30x_2.$$

Учитывая ограничения на запасы сырья, получаем следующие неравенства:

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 \leq 100; \\ 20x_1 + 10x_2 \leq 100; \\ 15x_1 + 15x_2 \leq 90. \end{cases}$$

В результате имеем задачу:

$$Z = 20x_1 + 30x_2 \rightarrow \max;$$

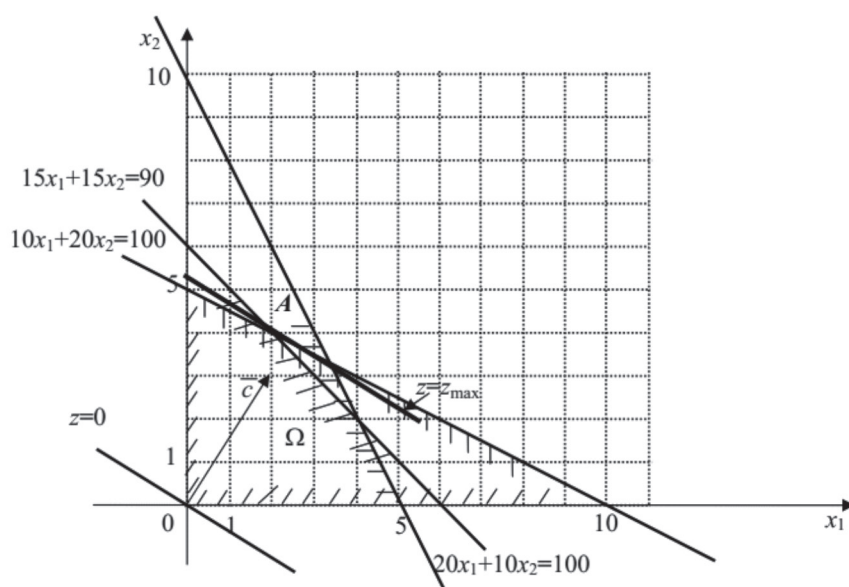
$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 \leq 100; \\ 20x_1 + 10x_2 \leq 100; \\ 15x_1 + 15x_2 \leq 90; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Построим область допустимых решений (рисунок).

Так как, данная задача является задачей на максимум, то прямую  $Z = 0$  нужно перемещать в направлении вектора  $\vec{c}$ . В результате опорная прямая проходит через точку  $A$  и координаты этой точки можно получить, как точку пересечения прямых линий на плоскости [3]:

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 = 100; \\ 15x_1 + 15x_2 = 90. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10; \\ x_1 + x_2 = 6. \end{cases}$$



Получаем  $x_1 = 2, x_2 = 4$ .

Значение целевой функции в оптимальной точке

$$Z_{\max} = 20 \cdot 4 + 30 \cdot 2 = 80 + 60 = 140.$$

В результате расчетов можно сделать вывод о том, что максимальный объем продукции будет получен в результате использовании первой технологии в течении 2 часов и второй технологии в течение 4 часов их работы.

Таким образом, в результате проведенного исследования можно сделать вывод о том, что применение методов оптимизации приводит к рациональному использованию ресурсов и, следовательно, к более эффективному функционированию предприятия.

#### Список литературы

1. Долгополова А.Ф. Моделирование стратегии управления в социально-экономических системах с использованием

Марковских процессов // Вестник АПК Ставрополя. – 2011. – № 1 (1). – С. 67–69.

2. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Особенности применения методов математического моделирования в экономических исследованиях // Kant: Экономика и управление. – 2013. – № 1. – С. 62–66.

3. Линейная алгебра / Крон Р.В., Попова С.В., Смирнова Н.Б., Долгих Е.В. // учебное пособие для студентов вузов сельскохозяйственных, инженерно-технических и экономических направлений. – М., 2015.

4. Логинова Я.А., Долгополова А.Ф. Использование элементов линейной алгебры в экономических расчетах // Международный студенческий научный вестник. – 2016. – № 3–3. – С. 393–395.

5. Манько А.И., Гулай Т.А., Жукова В.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А. Обзор методов социально-экономического прогнозирования и их применение в реальной экономике // Наука и образование: современные тренды. – 2015. – № 2 (8). – С. 438–448.

6. Немцова А.В., Попова С.В. Применение средств матричной алгебры для решения задач экономического содержания // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5–2. – С. 171 – 172.

7. Цысь Ю.В., Долгополова А.Ф. Элементы линейной алгебры и их применение при решении экономических задач // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 6. – С. 91–93.

**ГИДРОМЕХАНИКА МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ****Шуляк М.Д., Яновский А.А.***ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,  
e-mail: mikhail.shulyak.1998@mail.ru*

Гидромеханика обычных жидкостей, не проявляющих существенных магнитных свойств, хорошо описано в классической научной литературе. Магнитные жидкости представляют собой высокодисперсную гетерогенную систему способную существенно взаимодействовать с магнитными полями, сохраняя жидкое состояние. Гидромеханика магнитных жидкостей существенно более сложна, ввиду необходимости учета факторов влияния магнитного поля, как при ее статике, так и в динамике. Например, эффективность плотности магнитной жидкости, сила поверхностного натяжения, анизотропия вязкости и оптических свойств зависят от приложенного магнитного поля. Соответствующие взаимодействия представляют интерес для физики магнитных явлений. В последние годы были выполнены обширные фундаментальные исследования в области магнитных жидкостей; одновременно активно проводились работы по их практическому применению. Одним из главных этапов исследования магнитной жидкости, является изучение ее гидромеханической функции.

**Ключевые слова:** анизотропия вязкости, сила поверхностное натяжение, оптические свойства магнитная жидкость, гидромеханическая функция

**HYDROMECHANICS OF MAGNETIC LIQUID****Shulyak M.D., Yanovsky A.A.***Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: mikhail.shulyak.1998@mail.ru*

Hydromechanics of ordinary liquids that do not exhibit significant magnetic properties are well described in the classical scientific literature. Magnetic fluids are a highly disperse heterogeneous system capable of substantially interacting with magnetic fields while maintaining a liquid state. Hydromechanics of magnetic fluids is much more complicated, in view of the necessity to take into account the factors influencing the magnetic field, both in its static state and in dynamics. For example, the efficiency of the density of a magnetic fluid, the force of surface tension, the anisotropy of viscosity and optical properties depend on the applied magnetic field. The corresponding interactions are of interest for the physics of magnetic phenomena. In recent years, extensive fundamental research has been carried out in the field of magnetic liquids; At the same time, work was actively carried out on their practical application. One of the main stages in the investigation of a magnetic fluid is the study of its hydromechanical function.

**Keywords:** viscosity anisotropy, surface tension, optical properties, magnetic fluid, hydromechanical function

Магнитная жидкость это – искусственный материал, основой которой является жидкость, содержащая взвешенные в ней микроскопические магнитные частицы, покрытые поверхностно-активным веществом. На практике такие системы ведут себя как жидкости, обладающие магнитными свойствами и в них обнаружены ранее не наблюдавшиеся разнообразные физические эффекты. Гидромеханика магнитная жидкости отличается от обычных магнитных материалов в следующих двух стадиях:

В первом случае, если при воздействии внешней силы на жидкость происходят изменения, необходимо учитывать изменения ее деформации и плотности. При действии на жидкость магнитного поля, происходит изменение внутренней энергии (включая и энергию поля, действующего на жидкость), в жидкости происходит изменение этой внутренней энергии, обусловленные изменениями плотности и деформации. Поэтому, действующие силы на жидкость

не могут быть получены на основе замкнутой системы уравнений. Данная система уравнений описывает электромагнитное поле в среде [1].

Второй этап заключается в степенях свободы. Необходимо учитывать внутренние степени свободы, поскольку магнитные коллоидные частицы, обладают моментом импульса и, соответственно, импульсом.

Рассмотрим один из примеров, гидромеханики магнитной жидкости без учета внутренних степеней свободы. Попробуем представить внутри самой магнитной жидкости, бесконечно малый прямоугольный параллелепипед. К параллелепипеду зададим систему координат  $x, y, z$  и обозначим длины сторон, для каждого значения через  $a, b$ , и  $h$ .

Сперва находим объем параллелепипеда:

$$V = (ab)h = Sh.$$

$S$  – площадь верхней и нижней грани параллелепипеда. Теперь можно рассмотреть



деформацию, приводящая к параллельному смещению  $DD'$  верхней плоскости параллелепипеда, дав положение  $D'E'F'G'$ :

$$DD' = \xi$$

С помощью этой формулы находят-ся второй параллелепипед  $OABCD'E'F'G'$  с объемом  $V'$ :

$$h' = h + \delta h.$$

Отсюда объем  $V'$  составляет:

$$V' = Sh'.$$

$$(\tilde{F} - \rho \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \rho}) \delta_{ij} + H_i B_j = \sigma_{ij}.$$

В результате произведенных расчетов мы получили уравнение тензора напряжений в магнитной жидкости. Это всего лишь один из многих примеров, предлагаю рассмотреть обратный опыт, т.е. уже с использованием внутренних сил степеней свободы, а именно экспериментальное исследование вязкости магнитных жидкостей.

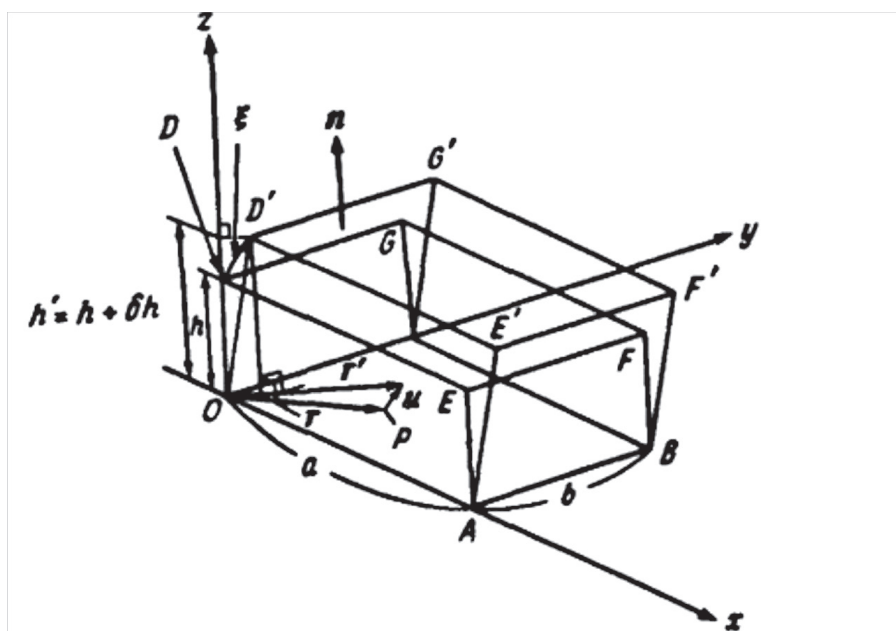


Рис. 1. Деформация элементарного прямоугольного параллелепипеда  $OABCDEFG$

Изменение свободной энергии прямоугольного параллелепипеда происходит с участием объема  $V$ , то мы можем получить уравнение баланса энергии, рассчитав:

$$S[(\tilde{F} - \rho \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \rho})(\xi n) + (\xi H)(Bn)] = S\xi \sigma n.$$

$\xi$  и  $n$  способны принимать произвольные значения, для этого необходимо равенство сделать тождеством, получим:

Проводя экспериментальные исследования, Мак-Тэйг решил пропустить через цилиндрическую трубу магнитную жидкость и измерить ее вязкость (течение Пуазейля). Мак-Тэйг решил провести экспериментальные расчеты для двух случаев: для первого, магнитное поле параллельно оси трубы и для второго магнитное поле перпендикулярно оси трубы. На рисунке проведены экспериментальные измерения зависимости вязкости от напряженности магнитного поля, полученные Мак-Тэйгом.

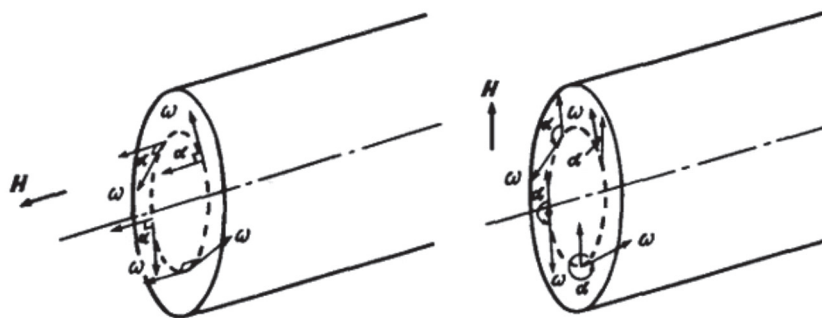


Рис. 2. Взаимная ориентация векторов гидродинамического вихря при течении магнитной жидкости в цилиндрической трубе и магнитного поля  $H$

При экспериментальных исследованиях турбулентного течения магнитной жидкости в трубе учеными Камиямой и другими, было замечено небольшое отклонение характеристик течения по сравнению с обычными жидкостями принимающие участие в опыте. Те же исследователи, проводящие этот эксперимент, при аналогичных расчетах с ферромагнитными жидкостями наблюдали аномальное увеличение вязкости, что связано с образованием агрегатов из магнитной жидкости под воздействием магнитного поля. Отсюда, авторы после завершения эксперимента, выполнили анализ экспериментальных результатов по вязким характеристикам магнитной жидкости.

Существует два подхода к построению гидромеханики с учетом взаимодействий

между магнитными частицами. В рамках первого подхода учитывается тот факт, что взаимодействие происходит между магнитными частицами на уровне микроструктуры, а уравнения гидромеханики, описывающие взаимодействия на макроуровне, входят в усредненные значения. В самом процессе проведения исследований, попытки предпринимались Сано и другими.

Как известно, жидкие кристаллы представляют собой систему, обладающую внутренними степенями свободы. Из нескольких типов жидких кристаллов были выбраны нематические жидкие кристаллы, состоящие из одноосных молекул. Схематически связи между молекулами могут быть представлены в виде пружин, как показано на рис. 3.

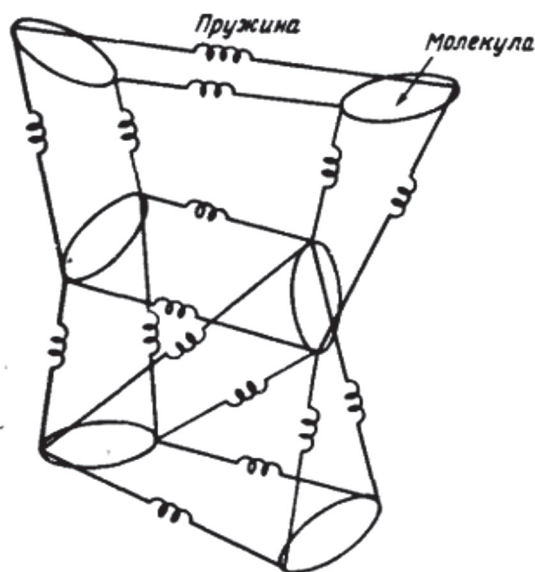


Рис. 3. Схема взаимодействия между молекулами

Перспективы развития фундаментальных исследований в области магнитной жидкостей связаны с использованием компьютерного моделирования и численных методов. Задача такого уровня является достаточно сложным. Прежде всего, всегда сложно предсказать будущее какого-либо направления исследований. Также актуальной проблемой является разработка принципов прогнозирования свойств магнитной жидкости по известным свойствам компонентов и исследование управляемых процессов теплообмена [2–6].

#### Список литературы

1. Игропуло В.С., Яновский А.А. Математическое моделирование некоторых ориентационных процессов на наноповерхностях // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. – 2008. – Т. 15; № 3. – С. 484–485.
2. Математическое моделирование и разработка систем охлаждения процессоров персональных компьютеров / А.А. Яновский, Я.В. Каньгин // *Международный студенческий научный вестник*. – 2015. – № 3–4. – С. 496–498.
3. Моделирование отрыва пузырьков пара в кипящей магнитной жидкости / А.А. Яновский, А.Я. Симоновский, В.Л. Холопов // *Физико-химические и прикладные проблемы магнитных дисперсных наносистем: V Всероссийская научная конференция с международным участием: сборник научных трудов*, 2015. – С. 239–246.
4. Перспективы развития и моделирования систем охлаждения процессоров ПК с использованием магнитной жидкости в качестве охлаждающей среды / А.А. Яновский, А.Я. Симоновский, П.А. Хаустов // *Международный студенческий научный вестник*. – 2015. – № 3–4. – С. 498–499.
5. Такетоми С., Тикадзуми С. Магнитные жидкости // *Гидромеханика магнитной жидкости как системы без учета внутренних степеней свободы* / пер. с японского М.К. Овечкина; А.Д. Мидкевича. – М.: Мир, 1993. – 272 с.
6. Фертман В.Е. Магнитные жидкости: Справочное пособие. – Минск: Высш. шк., 1988. – 184 с.

*Секция «Математика и ее приложения»,  
научный руководитель – Ермолаева В.И., канд. пед. наук, доцент*

УДК 004.932

## АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ НА ПРИМЕРЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ 3D МОДЕЛИ

**Руденко Е.А., Семусева А.Ю.**

*ГОУ ВО «Сибирский федеральный университет», Красноярск,  
e-mail: rudenko.rudenko2017@yandex.ru*

Рассмотрены классические определения аффинного преобразования и однородных координат, их применение к изображениям и основные свойства. Решается задача преобразования изображения в растровой графике. Для этого составлена программа на языке Паскаль – вращение трехмерного объекта вокруг своей оси (логотипа университета «СФУ»). В статье представлен фрагмент программы, который при помощи операторов осуществляет вращение самого объекта, а также осевое вращение векторных деталей логотипа. В этом фрагменте выделено и подписано построение букв «С», «Ф» и «У», что позволяет заменять их на другие и, таким образом, делает программу универсальной для применения. В программе также описаны процедуры создания матрицы проекции, матрицы преобразования и применение матрицы вращения к матрице преобразования.

**Ключевые слова:** аффинное преобразование, однородные координаты

## AFFINE TRANSFORMATIONS OF OBJECTS IN COMPUTER GRAPHICS BY THE EXAMPLE OF ROTATING 3D MODELS

**Rudenko E.A., Semusheva A.Y.**

*Siberian Federal University, Krasnoyarsk, e-mail: rudenko.rudenko2017@yandex.ru*

Classical definitions of affine transformation and homogeneous coordinates, their application to images and basic properties are considered. To solve the task of image transform in raster we created the graphics Pascal program – axial rotation of the three-dimensional object (the logo «SFU»). The article presents a fragment of the program that, with the help of operators, rotates the object itself, as well as the axial rotation of the vector details of the logo. In this fragment, the construction of the letters «C», «F» and «U» is selected and signed, which allows them to be replaced with others and, thus, makes the program universal for use. The program also describes the procedures for creating a projection matrix, a transformation matrix, and applying a rotation matrix to a transformation matrix.

**Keywords:** affine transformation, homogeneous coordinates

Типовая задача, решаемая при помощи растровой изобразительной графики – преобразование изображения в целом и его отдельных фрагментов: перемещение, поворот вокруг заданного центра, изменение линейных размеров и т.п. Такая задача решается использованием *аффинных преобразований* [1, 2, 3].

Введем несколько определений.

**Определение 1.** Преобразование плоскости называется аффинным, если оно взаимно однозначно и образом любой прямой является прямая.

**Определение 2.** Преобразование называется взаимно однозначным, если оно разные точки переводит в разные, и в каждую точку переходит какая-то точка.

**Определение 3.** Аффинное преобразование – отображение плоскости или пространства в себя, при котором параллельные прямые переходят в параллельные прямые,

пересекающиеся в пересекающиеся, скрещивающиеся в скрещивающиеся.

Аффинные преобразования используются в следующих ситуациях:

1. Для составления плоского изображения или трехмерной сцены путем компоновки из однотипных элементов с помощью их копирования, преобразования и перемещения в различные места изображения.

2. Для просмотра трехмерных объектов с различных точек зрения.

3. Для проецирования трехмерных объектов на плоскость и отображения сцены в окне.

Аффинные преобразования на плоскости в общем виде описываются следующими формулами:

$$\begin{cases} X = Ax + By + C \\ Y = Dx + Ey + F \end{cases} \quad (1)$$

где  $A, B, C, D, E, F$  – константы.

Преобразование (1) можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аффинным преобразованиям может подвергаться как сама система координат, так и объекты на плоскости. Если преобразование производится над системой координат, то значения  $(x, y)$  в выражении (1) интерпретируются как координаты точки в старой системе координат, а значения  $(X, Y)$  – координаты точки в новой системе координат.

Частным случаем аффинных преобразований являются просто движения (без какого-либо сжатия или растяжения). Движения – это преобразования, которые сохраняют расстояние между любыми двумя точками неизменным, а именно параллельные переносы, повороты, различные симметрии и их комбинации.

Перемещение в пространстве задается с помощью матрицы размера  $3 \times 3$ . Для этого необходимо использование однородных координат.

Определение 4. Однородные координаты – координаты, обладающие тем свойством, что определяемый ими объект не меняется при умножении всех координат на одно и то же число.

Однородными координатами вектора  $(x, y)$  является тройка чисел  $(x', y', h)$ , где  $x = x' / h, y = y' / h$ , а  $h$  – некоторое вещественное число (случай, когда  $h = 0$  является особым).

Аналогичные преобразования происходят и для трехмерных объектов. Приведем пример программы, написанной на языке Pascal, которая вращает аббревиатуру «СФУ» и ее части.

```
program program1;
uses GraphABC;
type
  TVector = array [1..4] of Real;
  TMatrix = array [1..4, 1..4] of Real;
function Vector(x, y, z: Real): TVector;
begin
  Result[1]:=x;
  Result[2]:=y;
  Result[3]:=z;
  Result[4]:=1;
end;
function Vector(x, y: Real): TVector;
begin
```

```
  Result[1]:=x;
  Result[2]:=y;
  Result[3]:=0;
  Result[4]:=1;
end;
....
procedure DrawLine(a, b: TVector;
transform: TMatrix);
begin
  ApplyTransform(a, transform);
  ApplyTransform(b, transform);
  Line(Round(a[1]), Round(a[2]),
Round(b[1]), Round(b[2]));
end;
procedure DrawLine(x1, y1, x2, y2: Real;
transform: TMatrix);
begin
  DrawLine(Vector(x1, y1), Vector(x2, y2),
transform);
end;
procedure DrawArc(x, y, r, alf, bet: Real;
m: TMatrix);
var
  x1, y1, x2, y2: Real;
  i, b, e: Integer;
begin
  b:=Round(alf/Pi*180);
  e:=Round(bet/Pi*180);
  if b > e then
    begin
      i:=b; e:=b; b:=i;
    end;
  for i:=b to e do
    begin
      x2:=x+r*cos(i/180*Pi);
      y2:=y-r*sin(i/180*Pi);
      if i > b then
        DrawLine(x1, y1, x2, y2, m);
      x1:=x2;
      y1:=y2;
    end;
  end;
  var// t – матрица преобразования // p –
матрица проекции // m – временная матрица
  t, p, m: TMatrix;
  //picture: Integer;
  begin// Создание матрицы проекции
  SetWindowSize(600, 600);
  //picture:=CreatePicture(600, 600);
  //SetDrawingSurface(picture);
  SetPenColor(rgb(255, 128, 0));
  SetPenWidth(50);
  // Создание матрицы проекции
  CreateSimpleProjectionMatrix(100, p);
  // Матрица переноса в центр изображения
  CreateTranslationMatrix(300, 300, 0, m);
  MatrixProduct(p, m); // применение матрицы
m // Создание матрицы преобразования
```



```

IdentityMatrix(t);
CreateScaleMatrix(100, 100, 100, m);
MatrixProduct(t, m); // Создание и применение матрицы масштабирования к матрице преобразования
CreateZAxisRotationMatrix(-PI / 8, m);
MatrixProduct(t, m); // Создание и применение матрицы вращения к матрице преобразования
CreateTranslationMatrix(0, 0, 200, m);
MatrixProduct(t, m);
// Объединение матриц преобразования и проекции
CopyMatrix(t, m); // копировать матрицу преобразования в m
MatrixProduct(m, p); // применить матрицу проекции к матрице m // m – готовая матрица преобразования // C
DrawArc(-4, -2, 1, 0, Pi/2, m);
DrawLine(-4, -3, -6, -3, m);
DrawArc(-6, -2, 1, Pi/2, Pi, m);
DrawLine(-7, -2, -7, +2, m);
DrawArc(-6, +2, 1, Pi, Pi*3/2, m);
DrawLine(-6, +3, -4, +3, m);

```

```

DrawArc(-4, +2, 1, Pi*3/2, Pi*2, m);
// Ф
DrawLine(+0, +3, +0, -3, m);
DrawArc(-sqrt(2)/2*3/2, -1.5, 3/2, pi*1/4, pi*7/4, m);
DrawArc(+sqrt(2)/2*3/2, -1.5, 3/2, -pi*3/4, pi*3/4, m);
// У
DrawLine(+3, +3, +7, -3, m);
DrawLine(+3, -3, +5, +0, m);
//RestoreDrawingSurface;
//DrawPicture(picture, 0, 0);
//SavePicture(picture, 'Картинка.bmp');
end.

```

### Список литературы

1. Кудрина М.А., Мурзин А.В. Аффинные преобразования объектов в компьютерной графике // Труды Международного симпозиума «Надежность и качество», 2014.
2. Бубенчиков А.М., Базаров К.Л., Буянтуева З.Г. Компьютерная графика, порожденная линейными преобразованиями координат // Вестник Бурятского государственного университета, 2013.
3. Дорофеев С.Н. Геометрические преобразования в примерах и задачах, 2002.

*Секция «Математические методы решения инженерных задач»,  
научный руководитель – Светличная В.Б., канд. техн. наук, доцент*

УДК 519.6:656.02

## **УЧИМСЯ МИНИМИЗИРОВАТЬ РАСХОДЫ НА ПЕРЕВОЗКУ**

**Пушка В.С., Матвеева Т.А., Светличная В.Б.,  
Соколова А.В.**

*Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического  
университета, Волжский, e-mail: tam583726@mail.ru*

К транспортным задачам относится широкий круг задач с общей математической моделью, они определяются как задачи линейного программирования специального вида и решаются оптимальными методами. В классическом виде транспортной задачи выделяют два типа: по критерию стоимости (минимизируются затраты на перевозку) и по критерию времени (минимизируется время на перевозку грузов). Мы рассматриваем класс задач по минимизации общей стоимости перевозок грузов из пунктов отправления в пункты потребления. По теории сложности вычислений транспортная задача входит в класс сложности P. В работе рассмотрены методы решения транспортных задач. Существует ряд методов построения начального опорного решения, наиболее простым из них является метод северо-западного угла. Далее для анализа полученного плана и его последующего улучшения вводятся дополнительные характеристики пунктов отправления и назначения, называемые потенциалами. Такой метод улучшения плана перевозок называется методом потенциалов. При этом на каждом этапе строится разгрузочный цикл, который позволяет снижать расходы на перевозку. Транспортная задача применяется в случаях: оптимизации поставок сырья и материалов на производственные предприятия; оптимизации доставок товаров со складов в розничные магазины; оптимизации пассажирских перевозок, и т.п.

**Ключевые слова:** транспортная задача, метод северо-западного угла, метод потенциалов, план перевозок

## **LEARNING TO MINIMIZE TRANSPORTATION COSTS**

**Pushka V.S., Matveeva T.A., Svetlichnaya V.B.,  
Sokolova A.V.**

*Volzhsky Polytechnical institute, branch of Volgograd State Technical University, Volzhsky,  
e-mail: tam583726@mail.ru*

Transport problems include a wide range of problems with a general mathematical model, they are defined as linear programming problems of a special kind and are solved by optimal methods. In the classical form of the transport problem, two types are distinguished: by the criterion of cost (transportation costs are minimized) and by the time criterion (the time for cargo transportation is minimized). We are considering a class of tasks to minimize the total cost of transporting goods from points of government to points of consumption. According to the theory of computational complexity, the transport problem is included in the complexity class P. In work methods of the decision of transport problems are considered. There are a number of methods for constructing an initial support solution, the simplest of them is the northwestern angle method. Further, to analyze the obtained plan and its subsequent improvement, additional characteristics of the departure and destination points, called potentials, are introduced. This method of improving the transportation plan is called the method of potentials. At the same time, an unloading cycle is built at each stage, which allows reducing transportation costs. The transport task is applied in the following cases: optimization of the supply of raw materials and materials to production enterprises; optimization of deliveries of goods from warehouses to retail stores; optimization of passenger transportation, etc.

**Keywords:** transport problem, north-west corner method, potential method, transportation plan

Транспортная компания занимается перевозкой зерна специальными зерновозами от трёх элеваторов к четырём мельницам. В табл. 1 показаны возможности отгрузки зерна элеваторами, а также стоимость перевозки зерна одним зерновозом от элеваторов к мельницам. Стоимость перевозок приведена в ден. ед. [1].

Требуется определить структуру перевозок между элеваторами и мельницами с минимальной стоимостью. Для этого необходимо найти матрицу перевозок, при которой стоимость всех расходов на доставку груза окажется минимальной. Заполним транспортную таблицу (табл. 1).

Начальное решение получим, например, методом северо-западного угла (табл. 2) [3].

Таблица 1

| Спрос / Предложение |    | Мельница 1             | Мельница 2             | Мельница 3             | Мельница 4             |
|---------------------|----|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|                     |    | 5                      | 15                     | 15                     | 15                     |
| Элеватор 1          | 15 | $x_{11}$ <sup>10</sup> | $x_{12}$ <sup>2</sup>  | $x_{13}$ <sup>20</sup> | $x_{14}$ <sup>11</sup> |
| Элеватор 2          | 25 | $x_{21}$ <sup>12</sup> | $x_{22}$ <sup>7</sup>  | $x_{23}$ <sup>9</sup>  | $x_{24}$ <sup>20</sup> |
| Элеватор 3          | 10 | $x_{31}$ <sup>4</sup>  | $x_{32}$ <sup>14</sup> | $x_{33}$ <sup>16</sup> | $x_{34}$ <sup>18</sup> |

Таблица 2

| Спрос / Предложение |    | Мельница 1             | Мельница 2             | Мельница 3             | Мельница 4              |
|---------------------|----|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|
|                     |    | 5                      | 15                     | 15                     | 15                      |
| Элеватор 1          | 15 | <b>5</b> <sup>10</sup> | <b>10</b> <sup>2</sup> | — <sup>20</sup>        | — <sup>11</sup>         |
| Элеватор 2          | 25 | — <sup>12</sup>        | <b>5</b> <sup>7</sup>  | <b>15</b> <sup>9</sup> | <b>5</b> <sup>20</sup>  |
| Элеватор 3          | 10 | — <sup>4</sup>         | — <sup>14</sup>        | — <sup>16</sup>        | <b>10</b> <sup>18</sup> |

Суммарная стоимость перевозок равна

$$L_0 = 5 \cdot 10 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 18 = 520 \text{ (ден. ед.)}.$$

Для нахождения оптимального решения используем метод потенциалов [1, 2]. Вычисления обычно выполняются непосредственно в транспортной таблице (табл. 3). Положим  $u_1 = 0$ . Поскольку все потенциалы определены, далее вычислим косвенные

стоимости  $c'_{ij} = u_i + v_j$  для всех свободных клеток и запишем найденные значения в левом верхнем углу каждой незанятой клетки. В левом нижнем углу записываем разности  $\Delta_{ij} = c'_{ij} - c_{ij}$  для каждой небазисной переменной  $x_{ij}$ .

Таблица 3

| Спрос / Предложение |    | M-1                    | M-2                    | M-3                    | M-4                     | $u_i$       |
|---------------------|----|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|-------------|
|                     |    | 5                      | 15                     | 15                     | 15                      |             |
| Э-1                 | 15 | <b>5</b> <sup>10</sup> | <b>10</b> <sup>2</sup> | — <sup>4</sup>         | — <sup>15</sup>         | $u_1 = 0$   |
| Э-2                 | 25 | — <sup>3</sup>         | <b>5</b> <sup>7</sup>  | <b>15</b> <sup>9</sup> | — <sup>20</sup>         | $u_2 = 5$   |
| Э-3                 | 10 | — <sup>9</sup>         | — <sup>5</sup>         | — <sup>7</sup>         | <b>10</b> <sup>18</sup> | $u_3 = 3$   |
| $v_j$               |    | $v_1 = 10$             | $v_2 = 2$              | $v_3 = 4$              | $v_4 = 15$              | $L_0 = 520$ |

Определив вводимую в базис переменную  $x_{31}$ , найдём исключаемую из базиса переменную. Необходимо, чтобы перевозки по маршруту, соответствующему переменной  $x_{31}$ , уменьшили общую стоимость перевозок. Какой объём груза можно перевезти по этому маршруту? Обозначим через  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) количество груза, перевозимого по маршруту (3;1) (т. е.  $x_{31} = \varepsilon$ ). Сначала построим замкнутый цикл, который начинается и заканчивается в ячейке, соответствующей вводимой переменной  $x_{31}$ . Для ячейки (3;1) определим цикл, включающий клетки с базисными поставками: (3;1), (1;1), (1;2), (2;2), (2;4) и (3;4) (табл. 4).

Для перераспределения поставок по найденному циклу необходимо определить минимальный перевозимый груз  $\varepsilon$  [1]. Чтобы выполнялись ограничения по спросу и предложению, надо поочерёдно отнимать

и прибавлять величину  $\varepsilon$  к значениям базисных переменных, расположенных в угловых ячейках найденного цикла (табл. 5).

Искомую величину следует выбирать среди клеток, содержащих знак «минус», т.е.

$$\varepsilon = \min_{\leftarrow} \{x_{ij}\} = \min_{\leftarrow} \{5; 10; 5\} = 5.$$

Переменные  $x_{11}$  и  $x_{22}$  обращаются в нуль. Поскольку только одна переменная исключается из базиса, то в качестве исключаемой можно выбрать как  $x_{11}$ , так и  $x_{22}$ . Остановим свой выбор на  $x_{11}$ . Тогда  $x_{22} = 0$ . Определив значение для вводимой переменной ( $x_{31} = \varepsilon = 5$ ), и выбрав исключаемую переменную, откорректируем значения базисных переменных, соответствующих угловым ячейкам замкнутого цикла (табл. 6).

Таблица 4

| Спрос \ Предложение |    | $M-1$      | $M-2$     | $M-3$     | $M-4$      | $u_i$       |
|---------------------|----|------------|-----------|-----------|------------|-------------|
|                     |    | 5          | 15        | 15        | 15         |             |
| Э-1                 | 15 | 5          | 10        | 2         | 4          | 11          |
| Э-2                 | 25 | 15         | 12        | 5         | 7          | 20          |
| Э-3                 | 10 | 13         | 4         | 5         | 14         | 18          |
| $v_j$               |    | $v_1 = 10$ | $v_2 = 2$ | $v_3 = 4$ | $v_4 = 15$ | $L_0 = 520$ |

Таблица 5

| Спрос \ Предложение |    | $M-1$           | $M-2$            | $M-3$     | $M-4$      | $u_i$       |
|---------------------|----|-----------------|------------------|-----------|------------|-------------|
|                     |    | 5               | 15               | 15        | 15         |             |
| Э-1                 | 15 | $5-\varepsilon$ | $10+\varepsilon$ | 2         | 4          | 11          |
| Э-2                 | 25 | 15              | $12-\varepsilon$ | 5         | 7          | 20          |
| Э-3                 | 10 | 13              | 4                | 5         | 14         | 18          |
| $v_j$               |    | $v_1 = 10$      | $v_2 = 2$        | $v_3 = 4$ | $v_4 = 15$ | $L_0 = 520$ |

Таблица 6

| Спрос<br>Предложение |    | $M-1$                                    | $M-2$                                    | $M-3$                                    | $M-4$                                | $u_i$       |
|----------------------|----|------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------|-------------|
|                      |    | 5                                        | 15                                       | 15                                       | 15                                   |             |
| Э-1                  | 15 | <sup>1</sup> <sub>-9</sub> <sup>10</sup> | <sup>2</sup> <sub>-16</sub> <b>15</b>    | <sup>4</sup> <sub>-20</sub> <b>15</b>    | <sup>15</sup> <sub>4</sub> <b>11</b> | $u_1 = 0$   |
| Э-2                  | 25 | <sup>6</sup> <sub>-6</sub> <sup>12</sup> | <sup>7</sup> <sub>-</sub> <b>0</b>       | <sup>9</sup> <sub>-</sub> <b>15</b>      | <sup>20</sup> <sub>-</sub> <b>10</b> | $u_2 = 5$   |
| Э-3                  | 10 | <sup>4</sup> <sub>-</sub> <b>5</b>       | <sup>5</sup> <sub>-9</sub> <sup>14</sup> | <sup>7</sup> <sub>-9</sub> <sup>16</sup> | <sup>18</sup> <sub>-</sub> <b>5</b>  | $u_3 = 3$   |
| $v_j$                |    | $v_1 = 1$                                | $v_2 = 2$                                | $v_3 = 4$                                | $v_4 = 15$                           | $L_1 = 475$ |

Перевозка единицы груза по маршруту (3;1) уменьшает общую стоимость перевозок на  $\Delta_{31} = 9$  ден. ед. Суммарная стоимость перевозок будет на  $\Delta_{31} \cdot \varepsilon = 9 \cdot 5 = 45$  ден. ед. меньше, чем в предыдущем решении.

Так как  $L_{\text{новое}} = L_{\text{предыдущее}} - \Delta_{ij} \cdot \varepsilon$ , то получим

$$L_1 = L_0 - \Delta_{31} \cdot \varepsilon = 520 - 45 = 475 \text{ ден. ед.}$$

Продолжим анализ оптимальности. Вычислим потенциалы нового базисного решения (табл. 7). Новой вводимой в базис переменной будет  $x_{14}$ . Замкнутый цикл позволяет найти её значение  $x_{14} = 10$  и исключить переменную  $x_{24}$ .

Новое решение, представленное в табл. 8, уменьшает значение целевой функции на 40 (ден. ед.). Тогда  $L_2 = 475 - 40 = 435$  ден. ед.

Таблица 7

| Спрос<br>Предложение |    | $M-1$                                    | $M-2$                                                 | $M-3$                                    | $M-4$                                                | $u_i$       |
|----------------------|----|------------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------|
|                      |    | 5                                        | 15                                                    | 15                                       | 15                                                   |             |
| Э-1                  | 15 | <sup>1</sup> <sub>-9</sub> <sup>10</sup> | <sup>2</sup> <sub>-16</sub> <b>15</b> - $\varepsilon$ | <sup>4</sup> <sub>-20</sub> <b>15</b>    | <sup>15</sup> <sub>4</sub> <b>11</b> + $\varepsilon$ | $u_1 = 0$   |
| Э-2                  | 25 | <sup>6</sup> <sub>-6</sub> <sup>12</sup> | <sup>7</sup> <sub>-</sub> <b>0</b> + $\varepsilon$    | <sup>9</sup> <sub>-</sub> <b>15</b>      | <sup>20</sup> <sub>-</sub> <b>10</b> - $\varepsilon$ | $u_2 = 5$   |
| Э-3                  | 10 | <sup>4</sup> <sub>-</sub> <b>5</b>       | <sup>5</sup> <sub>-9</sub> <sup>14</sup>              | <sup>7</sup> <sub>-9</sub> <sup>16</sup> | <sup>18</sup> <sub>-</sub> <b>5</b>                  | $u_3 = 3$   |
| $v_j$                |    | $v_1 = 1$                                | $v_2 = 2$                                             | $v_3 = 4$                                | $v_4 = 15$                                           | $L_1 = 475$ |

Таблица 8

| Спрос<br>Предложение |    | $M-1$                                     | $M-2$                                   | $M-3$                                    | $M-4$                               | $u_i$       |
|----------------------|----|-------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------------|-------------|
|                      |    | 5                                         | 15                                      | 15                                       | 15                                  |             |
| Э-1                  | 15 | <sup>1</sup> <sub>-13</sub> <sup>10</sup> | <sup>2</sup> <sub>-16</sub> <b>5</b>    | <sup>4</sup> <sub>-20</sub> <b>10</b>    | <sup>11</sup> <sub>-</sub>          | $u_1 = 0$   |
| Э-2                  | 25 | <sup>6</sup> <sub>-10</sub> <sup>12</sup> | <sup>7</sup> <sub>-</sub> <b>10</b>     | <sup>9</sup> <sub>-4</sub> <b>15</b>     | <sup>20</sup> <sub>-</sub>          | $u_2 = 5$   |
| Э-3                  | 10 | <sup>4</sup> <sub>-5</sub> <b>5</b>       | <sup>5</sup> <sub>-</sub> <sup>14</sup> | <sup>7</sup> <sub>-5</sub> <sup>16</sup> | <sup>18</sup> <sub>-</sub> <b>5</b> | $u_3 = 7$   |
| $v_j$                |    | $v_1 = -3$                                | $v_2 = 2$                               | $v_3 = 4$                                | $v_4 = 11$                          | $L_2 = 435$ |



Теперь для всех небазисных переменных  $x_{ij}$  оценки  $\Delta_{ij} < 0$ . Т.е. выполнен критерий оптимальности на минимум [2]. Таким образом, найденное решение является оптимальным.

$$X_{\min} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$L_{\min} = 435.$$

Полученное решение, изложенное в терминах исходной задачи перевозки зерна от элеваторов до мельниц, имеет следующий смысл:

| От элеватора | До мельницы | Количество зерновозов |
|--------------|-------------|-----------------------|
| 1            | 2           | 5                     |
| 1            | 4           | 10                    |
| 2            | 2           | 10                    |
| 2            | 3           | 15                    |
| 3            | 1           | 5                     |
| 3            | 4           | 5                     |

Суммарная стоимость перевозок  $L = 435$  ден. ед.

#### Список литературы

1. Агишева Д.К., Зотова С.А., Светличная В.Б., Матвеева Т.А. Транспортные и сетевые модели управления. Часть 2: учебное пособие / С.А. Зотова, Д.К. Агишева, В.Б. Светличная, Т.А. Матвеева; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Волгоград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2012. – 160 с.
2. Агишева Д.К., Зотова С.А., Матвеева Т.А., Светличная В.Б. Линейное программирование (учебное пособие) // Успехи современного естествознания. – 2010. – № 9 – С. 61–62 URL: [www.rae.ru/use/?section=content&op=show\\_article&article\\_id=7785125](http://www.rae.ru/use/?section=content&op=show_article&article_id=7785125).
3. Казачков А.Д., Агишева Д.К., Светличная В.Б., Зотова С.А. Реализация метода северо-западного угла на Mathcad 15 // Материалы VIII Международной студенческой электронной научной конференции «Студенческий научный форум» [www.scienceforum.ru/2016/1762/23702](http://www.scienceforum.ru/2016/1762/23702).

*Секция «Математическое моделирование  
социально-экономических процессов»,  
научный руководитель – Полежаев В.Д., д-р пед. наук, профессор*

УДК 519.22

# ИССЛЕДОВАНИЕ НАЛИЧИЯ КОНКУРЕНЦИИ МЕЖДУ РОССИЙСКИМИ ТЕЛЕВИЗИОННЫМИ КАНАЛАМИ И ИНТЕРНЕТ-САЙТАМИ НА ОСНОВЕ КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ИХ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ АУДИТОРИИ

**Юсупова К.О.**

*Московский государственный технический университет им Н.Э. Баумана, Москва,  
e-mail: uko2304@mail.ru*

Рассматриваются вопросы наличия конкуренции между проектами и сервисами, разработанными для пользователей Интернета российскими компаниями Yandex, Mail.Ru Group, Rambler&Co, а также исследуется динамика популярности российских телевизионных каналов и факторы, влияющие на этот процесс. Проведен анализ статистических данных исследовательской компании Mediascope по численности пользовательской аудитории Интернета и телевидения. В качестве объекта сбора и обработки информации выбран один город, которому из года в год характерно приблизительно одинаковое поведение аудитории (без аномальных изменений). Выявление конкурентной связи проводилось путем расчета корреляционной зависимости между долей людей, ежемесячно посещающих самые крупные интернет-проекты. Аналогичные расчеты выполнены и для аудитории ведущих телеканалов России, но в качестве исходных данных формировался массив данных с динамикой среднесуточной доли зрителей относительно каждой предыдущей недели.

**Ключевые слова:** доля населения, рейтинг, статистика, корреляция, медиапланирование, конкуренция, моделирование

## INVESTIGATION OF COMPETITION BETWEEN RUSSIAN TELEVISION CHANNELS AND INTERNET SITES BASED ON QUANTITATIVE ANALYSIS OF THEIR USER AUDIENCE

**Yusupova K.O.**

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow,  
e-mail: uko2304@mail.ru*

The issues of the existence of competition between projects and services developed for Internet users by Russian companies Yandex, Mail.Ru Group, Rambler&Co are examined, as well as the dynamics of the popularity of Russian television channels and the factors that influence this process. The analysis of statistical data of the research company Mediascope on the number of the Internet and television audience has been carried out. The information will be gathered and processed in one chosen city characterized by nearly identical behaviour of the audience each year (without abnormal changes). The identification of competitive links was carried out by calculating the correlation between the percentage of people who visit the largest Internet projects every month. Similar calculations were made for the audience of the leading Russian TV channels, but as an initial data, an array of data was formed with the dynamics of the average daily share of viewers relative to each previous week.

**Keywords:** population proportion, rating, statistics, correlation, media planning, competition, modeling

По данным компании Alexa по состоянию на январь 2018 года в топ-20 веб-сайтов по посещаемости в Российском Интернете входят сайты таких IT-корпораций как: Google Inc., Yandex, Mail.RuGroup, Rambler&Co. В связи с тем, что ряд проектов и сервисов, разработанных для пользователей Интернета российскими компаниями, являются конку-

рирующими, возникает естественный интерес к тому, какие информационные продукты наиболее активно используются жителями России [1]. Для проведения анализа предпочтений аудитории в тот или иной временной период были выбраны следующие проекты Рунета – русскоязычного сегмента Глобальной Сети (табл. 1).

**Таблица 1**

Холдинги и их проекты

| Yandex                       | Mail.Ru Group                 | Rambler&Co                    |
|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| Яндекс//<br>Главная страница | Mail.ru//<br>Главная страница | Rambler//<br>Главная страница |
| Яндекс//Почта                | Mail.ru//Почта                | Rambler//Почта                |
| Яндекс//Новости              | Mail.ru//Новости              | Rambler//Новости              |

Такая подборка сайтов, очевидно, имеет пересечения по тематикам (почта, новости, видео и т.д.), что подразумевает под собой наличие некоторой конкурентной взаимосвязи по доле посетителей от общего числа пользователей Интернета. Проверка этого предположения является первой задачей данной работы. Данные, используемые в работе для расчетов, взяты из отчетов проекта WEB-Index компании Mediascope. Этот проект предоставляет детальную информацию

об объемах аудитории интернета в крупнейших городах РФ и России в целом [2].

Рассмотрим имеющийся массив данных по количеству москвичей (Reach'000) в социально-демографической возрастной группе 12–64 (от 12 лет до 64), которые составляли аудиторию каждого проекта ежемесячно на протяжении 2015–2017 гг. Фрагмент с данными за 2015 год в качестве примера представлен в табл. 2 [3].

**Таблица 2**

Ежемесячная аудитория проектов в 2015 году (тыс. чел.)

| Год                     | 2015   |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Месяц                   | Янв    | Фев    | Мар    | Апр    | Май    | Июн    | Июл    | Авг    | Сен    | Окт    | Ноя    | Дек    |
| Проект                  |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| Mail.ru // Почта        | 4443,9 | 4386,4 | 4445,9 | 4483,4 | 4320,3 | 4395,8 | 4099,1 | 3998,6 | 4089,6 | 4107,0 | 4094,1 | 4068,7 |
| Mail.ru // Гл. страница | 4256,5 | 4165,7 | 4177,6 | 4266,5 | 4119,7 | 4168,2 | 3977,8 | 3843,9 | 3975,3 | 4018,8 | 4012,1 | 4022,1 |
| Mail.ru // Новости      | 2208,2 | 2126,2 | 2379,7 | 2132,4 | 2082,9 | 2041,6 | 1786,3 | 1844,2 | 1861,7 | 1865,5 | 2076,4 | 1887,0 |
| Яндекс // Гл. страница  | 5734,0 | 5649,4 | 5637,1 | 5748,6 | 5720,6 | 5696,3 | 5546,3 | 5544,6 | 5513,3 | 5541,9 | 5654,2 | 5628,0 |
| Яндекс // Новости       | 3531,4 | 3391,7 | 3437,6 | 3461,6 | 3358,7 | 3462,3 | 3183,5 | 3309,8 | 3331,8 | 3444,0 | 3732,4 | 3719,2 |
| Яндекс // Почта         | 3496,3 | 3419,3 | 3384,0 | 3528,1 | 3360,0 | 3314,8 | 3114,2 | 3226,8 | 3365,7 | 3199,7 | 3271,5 | 3272,9 |
| Rambler // Гл. страница | 1639,4 | 1648,6 | 1319,9 | 1380,1 | 1278,8 | 1279,2 | 1161,9 | 1126,2 | 1286,3 | 1266,7 | 1332,6 | 1248,1 |
| Rambler // Новости      | 1488,8 | 1464,5 | 1210,3 | 1168,4 | 1042,7 | 1135,6 | 1007,2 | 1021,9 | 1097,2 | 1279,2 | 1345,8 | 1209,4 |
| Rambler // Почта        | 724,5  | 641,4  | 664,5  | 717,1  | 713,1  | 667,5  | 570,5  | 651,2  | 672,4  | 688,5  | 599,8  | 630,6  |

Расчеты зависимостей между сайтами показали вполне очевидный факт: проекты, которые находятся в пределах одного холдинга (например, Yandex), сильно зависят друг от друга по посещаемости. Объясняется это достаточно просто: при переходе на главную страницу любого поискового сайта мы автоматически видим раздел с новостями, и нам доступен удобный переход на любой из его проектов, среди которых обычно самый необходимый – это почта. Так интерес к одному из разделов сайта влечет за собой прибавление в аудитории других его разделов. В табл. 3 отображены результаты расчетов коэффициентов корреляции между числом посетителей каждого из рассматриваемых проектов [4].

между данными сайтами нет. Подтвердим сделанные выводы аналогичным методом, но на основе данных по другому показателю. Возьмем относительный показатель Reach Column% – доля аудитории проекта от всех пользователей Интернета в социально-демографической группе (%).

Данная статистика удобна тем, что рассматривается ограниченный круг людей (только аудитория Интернета), поэтому отношения аудиторий двух сайтов к одному и тому же числу в определенной степени должны быть зависимы. Проверка этого предположения представлена на табл. 4. На нем мы видим, что посещаемость абсолютно всех сайтов не имеет сильной зависимости с другими сайтами. Таким образом, расчеты показыва-

Таблица 3

Матрица коэффициентов корреляции между числом посетителей проектов

|                         | Mail.ru // Почта | Mail.ru // Гл. страница | Mail.ru // Новости | Яндекс // Гл. страница | Яндекс // Новости | Яндекс // Почта | Rambler // Гл. страница | Rambler // Новости | Rambler // Почта |
|-------------------------|------------------|-------------------------|--------------------|------------------------|-------------------|-----------------|-------------------------|--------------------|------------------|
| Mail.ru // Почта        | 1,0000           |                         |                    |                        |                   |                 |                         |                    |                  |
| Mail.ru // Гл. страница | 0,9816           | 1,0000                  |                    |                        |                   |                 |                         |                    |                  |
| Mail.ru // Новости      | 0,8440           | 0,8054                  | 1,0000             |                        |                   |                 |                         |                    |                  |
| Яндекс // Гл. страница  | 0,9480           | 0,9652                  | 0,7551             | 1,0000                 |                   |                 |                         |                    |                  |
| Яндекс // Новости       | 0,5491           | 0,6114                  | 0,5535             | 0,6183                 | 1,0000            |                 |                         |                    |                  |
| Яндекс // Почта         | 0,8554           | 0,8849                  | 0,7058             | 0,8923                 | 0,6150            | 1,0000          |                         |                    |                  |
| Rambler // Гл. страница | 0,7488           | 0,7200                  | 0,7179             | 0,6710                 | 0,3874            | 0,6684          | 1,0000                  |                    |                  |
| Rambler // Новости      | 0,5513           | 0,5236                  | 0,5755             | 0,4963                 | 0,3478            | 0,4872          | 0,8091                  | 1,0000             |                  |
| Rambler // Почта        | 0,1035           | 0,1645                  | 0,0044             | 0,1785                 | 0,3036            | 0,3496          | 0,0421                  | 0,0334             | 1,0000           |

Из значений коэффициентов корреляции видно, что для рассматриваемого показателя (количества москвичей, Reach) наблюдается слабая зависимость между сайтами разных холдингов, а это свидетельствует о том, что конкуренции (отрицательной корреляции)

ют, что между выбранными крупными сайтами конкуренции нет. Аудитория Интернета с каждым месяцем растет, и интерес ко всем проектам известных холдингов увеличивается примерно с одинаковой скоростью и независимо друг от друга [5].

Таблица 4

Матрица коэффициентов корреляции по показателю Reach Column (%)

|                         | Mail.ru // Почта | Mail.ru // Гл. страница | Mail.ru // Новости | Яндекс // Гл. страница | Яндекс // Новости | Яндекс // Почта | Rambler // Гл. страница | Rambler // Новости | Rambler // Почта |
|-------------------------|------------------|-------------------------|--------------------|------------------------|-------------------|-----------------|-------------------------|--------------------|------------------|
| Mail.ru // Почта        | 1                |                         |                    |                        |                   |                 |                         |                    |                  |
| Mail.ru // Гл. страница | 0,8424           | 1                       |                    |                        |                   |                 |                         |                    |                  |
| Mail.ru // Новости      | 0,3382           | 0,4945                  | 1                  |                        |                   |                 |                         |                    |                  |
| Яндекс // Гл. страница  | -0,0146          | 0,4114                  | 0,5803             | 1                      |                   |                 |                         |                    |                  |
| Яндекс // Новости       | -0,3592          | 0,0636                  | 0,5338             | 0,8340                 | 1                 |                 |                         |                    |                  |
| Яндекс // Почта         | 0,3218           | 0,6321                  | 0,6159             | 0,7799                 | 0,5336            | 1               |                         |                    |                  |
| Rambler // Гл. страница | 0,1953           | 0,4332                  | 0,6198             | 0,5598                 | 0,4729            | 0,7071          | 1                       |                    |                  |
| Rambler // Новости      | 0,1456           | 0,4303                  | 0,6950             | 0,6583                 | 0,6596            | 0,6903          | 0,8712                  | 1                  |                  |
| Rambler // Почта        | 0,1305           | 0,3136                  | 0,4721             | 0,5425                 | 0,5681            | 0,5956          | 0,4959                  | 0,4892             | 1                |

Выше изложенные рассуждения и сопровождающие их расчеты демонстрируют следующие ситуации. Достаточно частым явлением стало закрепление за одним лицом нескольких адресов электронной почты разных сервисов. Таким образом, человек имеет возможность относиться к аудитории сразу нескольких однопрофильных проектов. Также часто встречается стандартная настройка веб-браузеров на стартовую страницу (как правило, это главные страницы поисковых сайтов), не соответствующую интересам посетителя, что добавляет веса к ее аудитории автоматически и к аудитории сайта, на который потом посетитель перенаправляется.

Немного другая ситуация наблюдается для следующего сегмента – ТВ. Рассмотрим данные по доле зрителей следующих каналов: Россия 1, Первый, НТВ, СТС, ТНТ. Первые три канала относятся к самым крупным по размеру аудитории каналам на телевидении. ТНТ и СТС относятся к самым крупным развлекательным кана-

лам, которые на первый взгляд вполне могут конкурировать. Данные, используемые в работе, предоставляются в рамках проекта TV-INDEX компании Mediascope. В таблице 5 приведены значения среднесуточной доли зрителей за каждую неделю III-IV кварталов 2017 года для каждого из каналов [6]. Данная таблица – пример структуры имеющихся данных. Расчеты по телевидению проводились за 2015–2017 гг.

Используя методы корреляционного анализа, было выявлено, что между каналами Россия 1 и Первый канал наблюдается сильная отрицательная связь ( $R \approx -0,895$ ). Другими, словами выявлена некая закономерность: с увеличением аудитории одного канала, уменьшается аудитория другого. Для канала НТВ не было получено интересующих нас значений коэффициентов корреляции. Поэтому, говоря подробно в дальнейшем о конкуренции крупнейших каналов, мы в первую очередь будем рассматривать зависимость количества телезрителей на каналах Россия 1 и Первый канал.

**Таблица 5**

Динамика (%) доли зрителей ТВ по сравнению с предыдущей неделей, 2017 год

| ПЕРВЫЙ КАНАЛ | РОССИЯ 1 | НТВ   | ТНТ   | СТС   | Недели               |
|--------------|----------|-------|-------|-------|----------------------|
| -14,0        | 7,1      | 3,3   | 0,0   | 14,3  | <b>3.07 – 9.07</b>   |
| 11,5         | -13,3    | 1,1   | 2,5   | -16,7 | <b>10.07 – 16.07</b> |
| -5,2         | 3,1      | 2,1   | 4,9   | 2,5   | <b>17.07 – 23.07</b> |
| 3,6          | 7,5      | 2,0   | -2,3  | -2,4  | <b>24.07 – 30.07</b> |
| -0,9         | 0,0      | -8,0  | -2,4  | 12,5  | <b>31.07 – 6.08</b>  |
| 1,8          | -6,9     | -3,3  | 9,8   | 2,2   | <b>7.08 – 13.08</b>  |
| 0,0          | -4,5     | 2,2   | 0,0   | 10,9  | <b>14.08 – 20.08</b> |
| -11,3        | -1,6     | 6,6   | 15,6  | -13,7 | <b>21.08 – 27.08</b> |
| 10,8         | 4,8      | -6,2  | -9,6  | 20,5  | <b>28.08 – 3.09</b>  |
| 3,5          | -6,1     | -7,7  | 19,1  | -11,3 | <b>4.09 – 10.09</b>  |
| -4,3         | 0,8      | 9,5   | 0,0   | -6,4  | <b>11.09 – 17.09</b> |
| 1,8          | 0,8      | 9,8   | 1,8   | 15,9  | <b>18.09 – 24.09</b> |
| 8,8          | -1,6     | -6,9  | -5,3  | 2,0   | <b>25.09 – 1.10</b>  |
| -0,8         | -0,8     | 6,4   | 14,8  | -3,8  | <b>2.10 – 8.10</b>   |
| -1,6         | 4,9      | 5,0   | -12,9 | -2,0  | <b>9.10 – 15.10</b>  |
| 0,0          | -5,4     | 0,0   | -11,1 | 12,2  | <b>16.10 – 22.10</b> |
| 0,8          | -0,8     | -3,8  | 16,7  | -10,9 | <b>23.10 – 29.10</b> |
| -1,6         | 7,4      | -19,8 | -5,4  | 6,1   | <b>30.10 – 5.11</b>  |
| 2,5          | -3,1     | 21,0  | -9,4  | -3,8  | <b>6.11 – 12.11</b>  |
| -1,6         | 9,5      | -3,1  | -2,1  | -4,0  | <b>13.11 – 19.11</b> |
| -5,8         | 2,9      | 1,1   | -2,1  | 4,2   | <b>20.11 – 26.11</b> |
| 6,1          | -5,6     | -2,1  | 0,0   | -6,0  | <b>27.11 – 3.12</b>  |
| 0,0          | 10,4     | -4,3  | 6,5   | 0,0   | <b>4.12 – 10.12</b>  |
| -2,5         | 3,4      | -2,2  | -6,1  | 8,5   | <b>11.12 – 17.12</b> |
| -0,8         | -0,7     | -6,8  | -2,2  | -2,0  | <b>18.12 – 24.12</b> |
| 12,0         | 5,3      | -6,1  | 2,2   | -2,0  | <b>25.12 – 31.12</b> |



Для каналов СТС и ТНТ не было выявлено существенной зависимости и закономерности в изменении динамики пользовательской аудитории. Коэффициент корреляции для этих каналов равен  $-0,396$ . То есть наблюдается очень слабая (стоит заметить, отрицательная) связь. Влияние одних каналов на популярность других выявлена только в одном из рассмотренных случаев. Объяснить это, по нашему мнению, можно тем, что, в отличие от Интернета, полноценный одновременный просмотр двух каналов на одном устройстве не возможен. Поэтому, действительно, размер аудитории каналов варьируется, оказывая воздействие на другие каналы в той или иной степени.

#### Список литературы

1. Назайкин, А.Н. Медиапланирование: учеб. пособие / А.Н. Назайкин. – М.: Эксмо, 2010. – 400 с.
2. Результаты исследований аудитории СМИ. Описание исследования: [Электронный ресурс] // Медиаскоп. – URL: <http://mediascope.net/services/media/media-audience/internet/description/>. (Дата обращения: 21.02.2018).
3. Результаты исследований аудитории СМИ. Интернет: [Электронный ресурс] // Медиаскоп. – URL: <http://mediascope.net/services/media/media-audience/internet/information/>. (Дата обращения: 15.12.2017).
4. Полежаев, В.Д. Обоснование выбора вида функций, применяемых для аппроксимации данных в экономико-математическом моделировании / В.Д. Полежаев, Л.Н. Полежаева // Информационные технологии и математические методы в экономике и управлении (ИТиММ-2016). – 2016. – С. 18–25.
5. Полежаев, В.Д. Определение значимости факторов и механизмов социализации личности на основе теории измерения латентных переменных / В.Д. Полежаев, М.В. Полежаева // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 6. – С. 357.
6. Результаты исследований аудитории СМИ. Телевидение [Электронный ресурс] // Медиаскоп. – URL: <http://mediascope.net/services/media/media-audience/tv/national-and-regional/audience/>. (Дата обращения: 21.02.2018).

*Секция «Моделирование и исследование реальных процессов с помощью дифференциальных уравнений и их систем»,  
научный руководитель – Елецких И.А., канд. физ.-мат. наук*

УДК 517.9

**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ ПРОИЗВОЛЬНО МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ  
ПАРАМЕТРОВ**

**Кузнецов В.В.**

*ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина», Елец,  
e-mail: kuznetso.vadik2014@yandex.ru*

В статье рассмотрена теория бифуркаций систем дифференциальных уравнений, проанализированы изменения фазовых портретов систем дифференциальных уравнений при малом изменении их параметров. Автор остановился на детальном изучении случая семейства систем дифференциальных уравнений, имеющего одномерное пространство параметров, в котором бифуркации являются точечными. В случае нулевого бифуркационного значения прослежено изменение фазовых портретов. С точки зрения приложений наиболее интересными являются аттракторы (бифуркации устойчивых предельных множеств). В статье рассмотрены однопараметрические локальные бифуркации регулярных аттракторов, в частности бифуркации устойчивых особых точек: транскритическая, седло-узловая, типа вилки и Андронова-Хопфа. Наиболее подробно с изучением решений нормальных форм исследованы мягкая и жесткая бифуркации Андронова-Хопфа. Программная реализация данной бифуркации осуществлена в Math Cad 14.

**Ключевые слова:** фазовое пространство, динамическая система, аттрактор, бифуркация, фазовый портрет

**STABILITY ANALYSIS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS WITH  
PROVISION FOR ARBITRARY SMALL PERTURBATIONS OF PARAMETERS**

**Kuznetsov V.V.**

*Bunin Yelets State University, Yelets,  
e-mail: kuznetso.vadik2014@yandex.ru*

The article considers the bifurcation theory of the differential equation systems, analyzes the changes in phase portraits of the differential equation systems for a small varying in their parameters. The author dwelled on a detailed study of the case of a family of the differential equation systems having a one-dimensional parameter space in which bifurcations are pointlike. In the case of a zero bifurcation value, the change in phase portraits is traced. From the point of view of applications, the most interesting are attractors (bifurcations of stable limit sets). In this paper we consider one-parameter local bifurcations of regular attractors, in particular bifurcations of stable singular points: transcritical, saddle-node, fork type and Andronov-Hopf type. The soft and hard bifurcations of Andronov-Hopf are studied most closely with the study of solutions of normal forms. The software implementation of this bifurcation is carried out in Math Cad 14.

**Keywords:** phase space, dynamical system, attractor, bifurcation, phase portrait

Одним из направлений исследований теории дифференциальных уравнений и их систем было изучение нелинейных динамических систем, позволяющее рассматривать с общих позиций системы, описываемые как дискретными отображениями, так и обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных. С геометрической точки зрения динамическая система это однопараметрическая непрерывная или дискретная группа (или полугруппа) преобразований фазового метрического пространства в себя. Непрерывные группы также называются потоками, а дискретные – отображениями или каскадами [2, 3]. Активное применение геометрического подхода к анализу динамических систем дифференциальных

уравнений началось со знаменитой работы американского математика С. Смейла, предложившего конструкцию отображения, которое впоследствии получило название подкова Смейла (пример динамической системы, имеющей бесконечное число периодических точек и хаотическую динамику, не разрушающуюся при малых возмущениях системы). В дальнейшем были найдены и другие хаотические динамические системы, описываемые дискретными отображениями и обладающие странными аттракторами, такие, например, как логистическое отображение, отображение Хенона, соленид Смейла-Вильямса и др.

Так как анализ свойств непрерывных динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, может быть

сведен к анализу свойств некоторого отображения – отображения Пуанкаре (А. Пуанкаре (1854–1912 гг.), то обнаруженное в непрерывных динамических системах нерегулярное, хаотическое поведение траекторий, стали связывать с наличием в системе странного аттрактора. Однако доказательство этого факта непосредственно для знаменитой системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений Лоренца [4], в которой впервые было обнаружено нерегулярное поведение траекторий, столкнулось со значительными трудностями. Многочисленные попытки в течение длительного времени обосновать методами геометрической теории динамических систем наличие странного аттрактора в окрестностях петель сепаратрис седло-узла и седло-фокуса в системе Лоренца закончились неудачей.

Более того, задача показать, совпадает ли поведение решений системы Лоренца с динамикой геометрического аттрактора Лоренца была сформулирована С. Смейлом как одна из 18 наиболее значительных математических проблем XXI века. А результаты недавних работ позволили определенно утверждать, что геометрический подход, развитый для дискретных отображений и позволивший получить для них ряд блестящих результатов, является не совсем адекватным применительно к непрерывным динамическим системам, описываемым дифференциальными уравнениями. Сложилось впечатление, что само определение сложного (нерегулярного) аттрактора непрерывной динамической системы как странного аттрактора, а также такие традиционные разделы хаотической динамики, как вычисление размерности аттрактора, сценарии перехода к хаосу и критерии динамического хаоса требуют значительной корректировки. Тем не менее использование геометрического аппарата дает наглядное представление о поведении решений систем в зависимости от значений параметра. Остановимся на рассмотрении более простого случая однопараметрических локальных бифуркаций.

Целями нашего исследования являются: анализ устойчивости систем дифференци-

альных уравнений по отношению к произвольным малым возмущениям параметров таких систем; исследование процесса изменения фазовых портретов систем дифференциальных уравнений при изменении параметров этих систем.

Нами ставились следующие задачи:

- 1) изучение однопараметрических локальных бифуркаций;
- 2) проведение анализа решений соответствующих им систем в зависимости от значений параметра;
- 3) получение графического представления результатов исследования.

Структурная устойчивость систем дифференциальных уравнений является устойчивостью по отношению к произвольным малым гладким возмущениям векторных полей. Однако системы дифференциальных уравнений, получающиеся из различных приложений, всегда содержат то или иное число системных параметров. Поэтому с точки зрения приложений более естественным и интересным является анализ устойчивости систем дифференциальных уравнений по отношению к более узкому классу возмущений – произвольным малым возмущениям параметров таких систем. В этом случае само пространство параметров будем интерпретировать как конечномерное пространство систем дифференциальных уравнений некоторого специального вида, а возмущение конкретной системы – как некоторое возмущение ее параметров.

Теория бифуркаций систем дифференциальных уравнений, берущая свое начало в работах А. Пуанкаре, описывает качественные, скачкообразные изменения фазовых портретов систем дифференциальных уравнений при непрерывном, плавном изменении их параметров. Значения параметров, при которых происходят эти качественные изменения фазовых портретов, называются бифуркационными значениями или точками бифуркации.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать гладкое семейство нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, \mu), x \in M \subset \mathbb{R}^m, \mu \in L \subset \mathbb{R}^k, F \in C^\infty, \quad (1)$$

заданных в фазовом пространстве  $M$  гладкими векторными полями  $F$ , зависящими от координат векторов системных параметров  $\mu$ , лежащих в области  $L$  пространства  $\mathbb{R}^k$ .

Пусть значение  $\mu = 0$  является бифуркационным значением параметра  $\mu$ , то есть именно при этом значении параметра качественно меняется фазовый портрет семейства систем дифференциальных уравнений (1). Наиболее интересными с точки зрения различных приложений являются бифуркации устойчивых предельных множеств (аттракторов), так как они приводят к изменениям наблюдаемых в реальных экспериментах установившихся режимов. Бифуркации аттракторов принято разделять на мягкие (внутренние) и жесткие (кризисы аттракторов). Мягкие бифуркации приводят к топологическим изменениям самих аттракторов, но не приводят к их исчезновению. Жесткие бифуркации приводят к исчезновению аттракторов [3]. В дальнейшем будут рассмотрены однопараметрические локальные бифуркации устойчивых особых точек.

Пусть системы дифференциальных уравнений из (1) при всех значениях параметра  $\mu$ , лежащих в некоторой окрестности  $U$  бифуркационного значения параметра  $\mu = 0$ , имеют своими решениями особые точки. Особая точка (положение равновесия)  $x_0(\mu)$  однопараметрического семейства (1) удовлетворяет условию  $F(x_0(\mu), \mu) = 0$ . Линеаризуя систему (1) в окрестности особой точки, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящую от параметра  $\mu$ :

$$\dot{y} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0(\mu), \mu)y + O(|y|^2), \quad (2)$$

где  $y(t) = x(t) - x_0(\mu)$ . Вектор  $y = 0$  является решением системы (2) для всех  $\mu \in U$ . Введем обозначение: положим

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0(\mu), \mu) = A(\mu).$$

Бифуркации, связанные с потерей устойчивости особой точки семейства (1), определяются исключительно теми координатами системы (2), которые соответствуют собственным значениям матрицы  $A(0)$ , лежащим на мнимой оси. Систему уравнений, записанную в этих координатах, называют нормальной формой семейства (1) в окрестности особой точки. Наиболее распространены следующие типы бифуркаций.

### 1. Транскритическая бифуркация (бифуркация обмена устойчивостью)

Нормальная форма бифуркации имеет вид  $\dot{y} = \mu y + y^2$  (или  $\dot{y} = \mu y - y^2$ ). В этом случае оба стационарные решения  $y = 0$  и  $y = -\mu$  ( $y = \mu$ ) сосуществуют вместе и обмениваются устойчивостью при переходе параметра через бифуркационное значение  $\mu = 0$  (рис.1 а).

### 2. Седло-узловая бифуркация

Нормальная форма седло-узловой бифуркации имеет вид  $\dot{y} = \mu + y^2$ . Это уравнение при  $\mu < 0$  имеет два стационарных решения  $y_{1,2} = \pm\sqrt{-\mu}$ , одно из которых является асимптотически устойчивым, а другое – нет. При  $\mu = 0$  оба решения сливаются в одно стационарное решение  $y = 0$ , являющееся асимптотически устойчивым для траекторий, начинающихся слева от нуля и неустойчивым для траекторий, начинающихся справа от нуля. При  $\mu > 0$  уравнение не имеет особых точек, т.е. рассмотренная бифуркация является кризисом (рис.1 б). Одновременное рождение устойчивой и неустойчивой особых точек происходит в случае обратной седло-узловой бифуркации с нормальной формой  $\dot{y} = \mu - y^2$  (рис. 1 в).

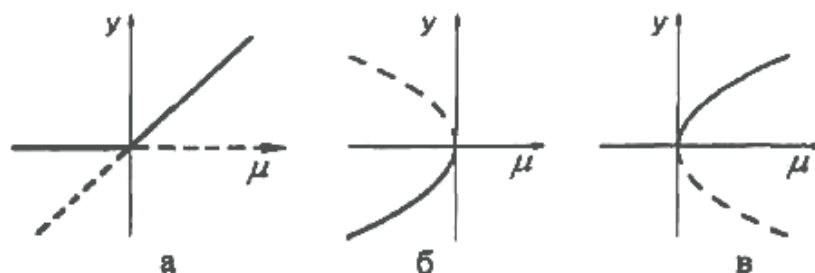


Рис. 1

### 3. Бифуркация типа вилки

Существуют два вида этой бифуркации:  $\dot{y} = \mu y - y^3$  – надкритическая и  $\dot{y} = \mu y + y^3$  – подкритическая. Для надкритической бифуркации стационарные решения имеют вид:  $y = 0$  и  $y_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$  ( $\mu > 0$ ). Устойчивое стационарное решение, становясь неустойчивым, порождает два других устойчивых стационарных решения (рис. 2 а).

мягкая) бифуркация и субкритическая (или жесткая) бифуркация. Нормальная форма суперкритической бифуркации имеет вид

$$\dot{y} = (\mu + iv)y - y|y|^2,$$

где  $y = y_1 + iy_2$  или более подробно в виде

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -vy_2 + [\mu - (y_1^2 + y_2^2)]y_1, \\ \dot{y}_2 = vy_1 + [\mu - (y_1^2 + y_2^2)]y_2 \end{cases} \quad (3)$$

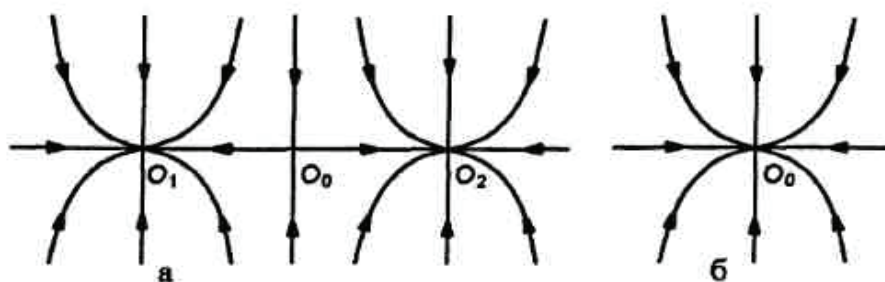


Рис. 2

На рис. 2б изображен один устойчивый узел до бифуркации.

В случае подкритической бифуркации стационарные решения имеют вид:  $y = 0$  и  $y_{1,2} = \pm\sqrt{-\mu}$  ( $\mu < 0$ ). Поэтому устойчивое стационарное решение (узел) становится неустойчивым (седлом, седло-узлом, седло-фокусом). Бифуркация является кризисом.

### 4. Бифуркация Андронова-Хопфа (бифуркация рождения цикла)

Данный тип бифуркации соответствует случаю, когда при возрастании значений параметра  $\mu$  два комплексно сопряженных собственных значения  $\mu \pm iv$  матрицы  $A(\mu)$  переходят при  $\mu = 0$  слева направо через мнимую ось комплексной плоскости, а все остальные собственные значения имеют при этом отрицательные вещественные части [1, 5].

Существует два вида бифуркации Андронова-Хопфа: суперкритическая (или

Решение системы (3) можно записать в виде

$$y_1(t) = u(t) \cos vt, \quad y_2(t) = u(t) \sin vt,$$

где функция  $u(t)$  удовлетворяет уравнению  $\dot{u} = \mu u - u^3$ . При  $\mu \leq 0$  система имеет устойчивое решение – фокус. Программная реализация данной бифуркации осуществлена в Math Cad 14 (рис. 3).

При  $\mu > 0$  помимо неустойчивого фокуса – стационарного решения  $y_1 = y_2 = 0$  система (3) имеет еще другое решение

$$y_1(t) = \sqrt{\mu} \cos vt, \quad y_2(t) = \sqrt{\mu} \sin vt,$$

траекторией которого на фазовой плоскости является предельный цикл – окружность радиуса  $\sqrt{\mu}$ . С помощью Math Cad 14 получим фазовый портрет для этого случая (рис. 4).



$$\mu \leq 0 \quad \nu := 15 \quad \mu := -1$$

$$f(t, y) := \begin{bmatrix} -\nu \cdot y_1 + \lfloor \mu - \lfloor (y_0)^2 + (y_1)^2 \rfloor y_0 \\ \nu \cdot y_0 + \lfloor \mu - \lfloor (y_1)^2 + (y_0)^2 \rfloor y_1 \end{bmatrix}$$

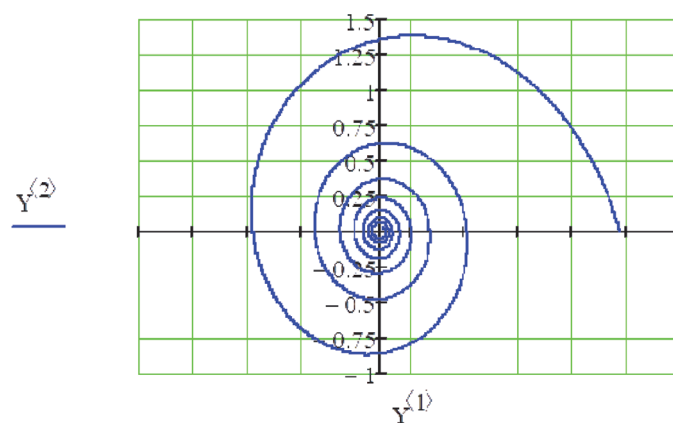


Рис. 3

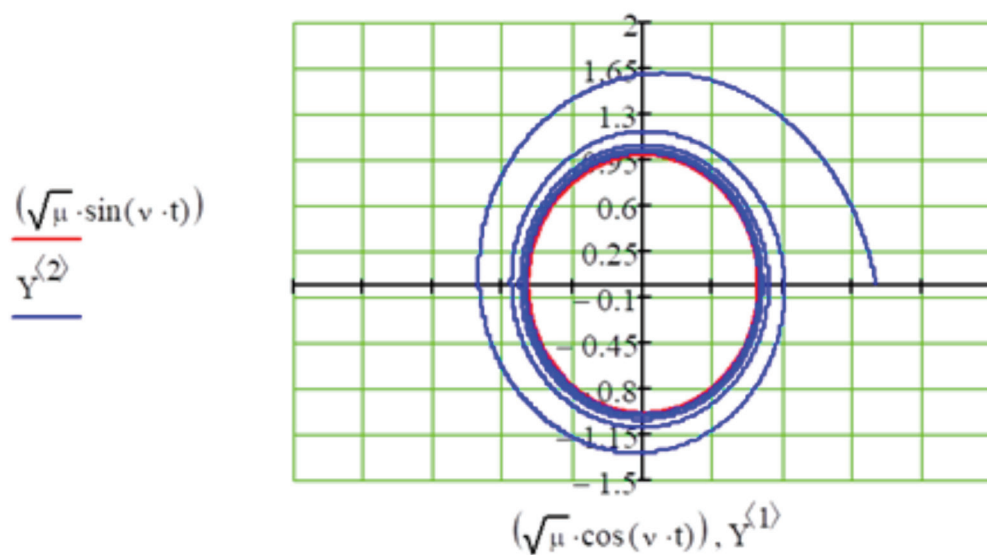
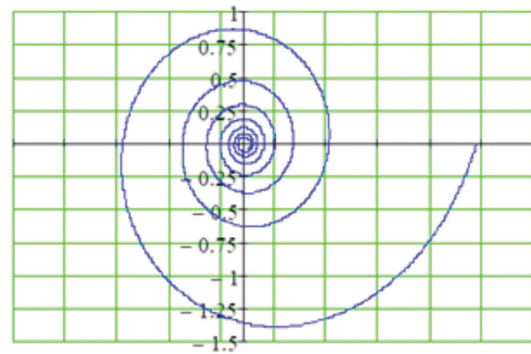
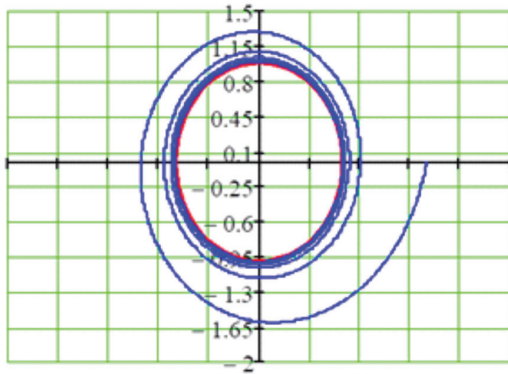


Рис. 4



Субкритическая (жесткая) бифуркация Андронова-Хопфа имеет нормальную форму

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\nu y_2 + [\mu + (y_1^2 + y_2^2)] y_1, \\ \dot{y}_2 = \nu y_1 + [\mu + (y_1^2 + y_2^2)] y_2. \end{cases}$$

Решение можно записать в виде:

$$y_1(t) = u(t) \cos \nu t, \quad y_2(t) = u(t) \sin \nu t,$$

где функция  $u(t)$  удовлетворяет уравнению  $\dot{u} = \mu u + u^3$ . Используя возможности Math Cad 14 построим фазовые портреты субкритической бифуркации для случаев  $\mu < 0$  и  $\mu \geq 0$ .

Бифуркация Андронова-Хопфа играет важную роль в теории нелинейных ди-

намических систем как самостоятельный математический объект, присутствующий практически во всех классических системах с нерегулярной динамикой, например, таких как системы Лоренца, Ресслера [5].

#### Список литературы

1. Елецких К.С. Однопараметрическая локальная бифуркация Андронова-Хопфа. // Современные проблемы математики, механики, информатики: Материалы региональной научной студенческой конференции. – Тула.: ТулГУ, 2009. – С. 5–11.
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2001. – 296 с.
3. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. – М.: УРСС, 2004. – 320 с.
4. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Переход к хаосу в системе Лоренца через полный двойной гомоклинический каскад бифуркаций. // Нелинейная динамика и управление. Вып. 2 / под ред. С.В. Емельянова, С.К. Корovina. – М.: Физматлит, 2002. – С. 179–194.
5. Марсен Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – 368 с.

УДК 517.9:51-77

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА  
В МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ****Редкина Л.А.***ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина», Елец,  
e-mail: laba\_redkina@mail.ru*

Многочисленные наблюдения и исследования показывают, что в окружающем нас мире величины (например, цена товара и величина спроса на него, прибыль фирмы и объем производства этой фирмы, инфляция и безработица) существуют не изолированно друг от друга, а связаны определенным образом. Такие связи приводят к установлению функциональной зависимости между экономическими объектами. В статье рассмотрены вопросы приложения математического анализа к решению экономических задач с использованием дифференциального исчисления. Кратко изложен теоретический материал и дана его экономическая интерпретация. Разобраны примеры использования теории функций одной и нескольких переменных для оптимизации процесса производства. Показана роль математического анализа в управлении производством, что приводит к изменению механизма хозяйствования, принципов и методов управления.

**Ключевые слова:** математическая модель, функция полезности, производственная функция, функция спроса, потребления и предложения

**APPLICATION OF MATHEMATICAL ANALYSIS METHODS IN MODELING OF  
ECONOMIC PROCESSES****Redkina L.A.***Bunin Yelets State University, Yelets,  
e-mail: laba\_redkina@mail.ru*

Numerous observations and studies are show that the quantities in the world around us (for example, the price of a good and the amount of demand for it, the firm's profit and the volume of production, the inflation and the unemployment) are exist not in isolation from each other but are connected in a certain way. Such relates lead to the establishment of a functional connection between economic units. The questions of application of the mathematical analysis to the decision of business problems with use of a differential calculus are considered in the article. The theoretical material is briefly presented and its economic interpretation is given. Examples of the use of the function theory of one and several variables for the optimization of the production process are examined. The role of mathematical analysis in the management of production is shown, which leads to a change in the management mechanism, principles and methods of management.

**Keywords:** mathematical model, function of utility, function of production, function of demand, consumption and estimate

Математические методы все большее применение находят в анализе экономической деятельности организаций. В результате их использования становится возможным исследование влияния отдельных факторов на экономические показатели деятельности предприятий разного уровня собственности, что способствует уменьшению сроков анализа этой деятельности, повышению точности осуществления экономических расчетов. С помощью математических методов становится возможным решение многомерных аналитических задач, которые не могут быть выполнены традиционными методами. В процессе использования методов математического анализа осуществляется построение и изучение экономико-математических моделей, описывающих влияние отдельных факторов на экономические показатели деятельности организаций.

В большинстве литературных источников [1, 2] под экономико-математической

моделью понимают математическое описание экономического объекта или процесса с целью их исследования и управления ими. Это математическая запись решаемой экономической задачи.

Остановимся на использовании математического анализа в моделировании экономических процессов. Для наглядного изображения зависимостей между экономическими величинами широкое применение находят функции. С помощью функций и функциональных зависимостей моделируются взаимосвязи между различными величинами, количественные и качественные отношения между различными экономическими характеристиками и показателями. Набор используемых функций весьма широк: от простейших линейных до функций, зависящих от нескольких переменных, определяющих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени. В экономике наиболее часто используются следующие

функции: функция полезности, производственная функция, функция спроса, потребления и предложения [3, 4].

Функция полезности (функция предпочтения) задает зависимость результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.

Производственная функция устанавливает зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов. Производственная функция характеризует техническую зависимость между ресурсами и выпуском и описывает всю совокупность технологически эффективных способов.

С помощью функции потребления, спроса и предложения определяется зависимость объема потребления, спроса и предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (например, цены, дохода и т.п.).

Все перечисленные выше функции чаще всего зависят не от одной переменной, а от нескольких переменных. Поэтому геометрическое представление данных зависимостей затруднено. В более простых случаях графики функции полезности, производственной функции, функции спроса, потребления и предложения, а также анализ зависимостей экономических переменных можно найти в [5]. В своем исследовании мы остановимся на приложении классических методов математического анализа, которые используются как самостоятельно (дифференцирование и интегрирование), так и в рамках других методов. Остановимся на методе, который основывается на определении производной и её приложениях. Рассмотрим сначала функцию одной переменной  $y = f(x)$ . С точки зрения математического анализа производной функции  $y = f(x)$  называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Экономический смысл производной может быть получен при рассмотрении понятий производительности труда, издержек производства и т.п. Проведем соответствующие рассуждения на примере задачи о производительности труда. Пусть функция  $V = V(t)$  выражает зависимость объема  $V$  произведенной продукции от времени  $t$ .

Требуется найти производительность труда в момент времени  $t_0$ . Объем произведенной продукции с момента времени  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$  составит  $\Delta V = V(t_0 + \Delta t) - V(t_0)$ . Величина  $\frac{\Delta V}{\Delta t}$  есть средняя производительность за этот период времени. Тогда производительность труда в момент времени  $t_0$  можно определить как предельное значение средней производительности при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$V'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Получаем экономический смысл производной: производная объема произведенной продукции по времени  $V'(t_0)$  есть производительность труда в момент времени  $t_0$ .

Если мы рассмотрим задачу про издержки производства, то формула

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где издержки производства  $y$  есть функция количества выпускаемой продукции  $x$ , выражает предельные издержки производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительно продукции.

Аналогичным образом определяются предельная выручка, предельный продукт, предельная полезность и другие предельные величины. Применение дифференциального исчисления для исследования экономических процессов на основе анализа предельных величин получило название предельного анализа. Таким образом, предельные величины характеризуют процесс изменения экономического объекта, т.е. производная выступает как скорость изменения некоторого экономического процесса по времени или относительно другого исследуемого фактора.

**Пример 1.** Функция полных затрат в зависимости от объема выпускаемой продукции задана соотношением  $y = x^3 - 2x^2 + 96$ . При каком объеме производства предельные и средние затраты совпадают?

**Решение.** Средние затраты вычисляются по формуле

$$y_{\text{ср.}} = \frac{y}{x} = x^2 - 2x + \frac{96}{x}.$$

Для нахождения предельных затрат воспользуемся экономическим смыслом производной  $y' = 3x^2 - 4x$ . Значение  $x$ ,

при котором предельные и средние затраты совпадают, находим из уравнения:

$$y'_{cp} = y' \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{96}{x} = 3x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - x - \frac{48}{x} = 0.$$

Решая последнее уравнение, найдем значение  $x = 4$ . Таким образом, предельные и средние затраты совпадают при объеме производства равном 4.

При решении экономических задач часто используется известная теорема Ферма, которая утверждает, что если дифференцируемая на некотором промежутке функция  $y = f(x)$  достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке  $x_0$  этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е.  $f'(x_0) = 0$ .

Экономической интерпретацией теоремы Ферма является базовый закон теории производства, который утверждает, что оптимальный для производителя уровень выпуска товара определяется равенством предельных издержек и предельного дохода.

**Пример 2.** Найти максимальную прибыль, которую может получить фирма-производитель, при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене  $p=10,5$  за единицу, а функция издержек имеет вид

$$C(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 10.$$

**Решение.** Так как  $x$  количество производимого товара, то доход фирмы выражается формулой:

$$D(x) = 10,5x.$$

Функция прибыли

$$P(x) = D(x) - C(x) = 10,5x - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - 10,$$

$$\text{т.е. } P(x) = 10x - \frac{x^2}{4} - 10.$$

Найдем производную в точке, подозрительные на экстремум:

$$P'(x) = 10 - \frac{x}{2};$$

$$P'(x) = 0$$

тогда и только тогда, когда  $10 - \frac{x}{2} = 0$ ,

т.е.  $x = 20$ . Исследуя знак производной

в окрестности точки  $x = 20$ , заключаем, что она является точкой максимума. Значит  $P_{max} = P(20) = 90$ . Следовательно, максимальная прибыль фирмы равна 90 ден. ед.

В экономической теории очень часто встречаются задачи, в которых используются функции нескольких переменных. Примерами таких функций являются: функция полезности  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от  $n$  приобретенных товаров; производственная функция, выражающая результат производственной деятельности от обусловивших его факторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Мы остановимся на рассмотрении случая функции двух переменных  $z = f(x, y)$ . Для решения экономических задач, содержащих в условии функции двух переменных, требуется знание понятия частных производных по переменным  $x$  и  $y$  первого и второго порядков, необходимое и достаточное условия экстремума.

Напомним, что частной производной функции  $z = f(x, y)$  по независимой переменной  $x$  называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y).$$

Аналогично производной по переменной  $y$  называется предел

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y).$$

Необходимым условием существования экстремума дифференцируемой функции  $z = f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  является равенство нулю её частных производных:  $f'_x(x_0, y_0) = 0$  и  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ .

Для того чтобы функция  $z = f(x, y)$  имела экстремум в точке  $(x_0, y_0)$ , достаточно выполнения следующих условий:

существования непрерывных частных производных второго порядка в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ ;

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

причем, если  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , то  $(x_0, y_0)$  – точка максимума, если  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , то  $(x_0, y_0)$  – точка минимума.

**Пример 3.** Найти величины используемых ресурсов  $(x, y)$ , при которых фир-



ма-производитель получит максимальную прибыль, если заданы производственная функция

$$K(x, y) = 30\sqrt[3]{x}\sqrt{y}$$

и цены  $p_1 = 6$  ден. ед. и  $p_2 = 5$  ден. ед. первого и второго ресурсов.

**Решение.** Производственная функция в денежном выражении равна доходу от использования ресурсов. При этом издержки  $C(x, y) = 6x + 5y$ . Функция прибыли имеет вид:

$$P(x, y) = 30\sqrt[3]{x}\sqrt{y} - 6x - 5y.$$

Найдем её максимум.

$$P'_x(x, y) = \frac{10\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x^2}} - 6; \quad P'_y(x, y) = \frac{15\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}} - 5.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{10\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x^2}} - 6 = 0, \\ \frac{15\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}} - 5 = 0, \end{cases}$$

найдем стационарную точку (125, 225). Исследуем её на экстремум:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{20}{3}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{1}{2}} & 5x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}} \\ 5x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}} & -\frac{15}{2}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = 25x^{-\frac{4}{3}}y^{-1}$$

$$\Delta(125, 225) > 0,$$

следовательно, (125, 225) – точка экстремума;  $P''_{xx}(125, 225) < 0$ , следовательно, (125, 225) – точка максимума. Таким образом, максимальная прибыль будет при  $x=125, y=225$ .

Из рассмотренных задач можно сделать вывод, что методы математического анализа и в частности дифференциальное исчисление широко применяются для решения экономических задач. Математический анализ позволяет выявить резервы повышения эффективности производства. Роль анализа в управлении производством возрастает вследствие того, что меняется механизм хозяйствования, меняются принципы и методы управления. Ограниченность ресурсов и необходимость выбора заставляют руководителей постоянно проводить исследования в области рынков сбыта, источников сырья, изучения спроса, ценообразования, что должно обеспечить повышение эффективности производства.

#### Список литературы

1. Багриновский К.А., Матюшок В.М. Экономико-математические методы и модели (микроэкономика): Учебное пособие. – М.: РУДН, 1999. – 183 с.
2. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 432 с.
3. Замков О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков, А.В. Толстопащенко, Ю.Н. Черемных. – М.: «Дело и Сервис», 2001. – 365 с.
4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – М.: «Дело» АНХ, 2008. – 720 с.
5. Окунева Е.О., Моисеев С.И. Математические методы исследования экономики. – Воронеж: ВФ МГЭИ, 2013. – 73 с.

*Секция «Прикладная физика»,  
научный руководитель – Давлетишина М.Р., канд. сельхоз. наук, доцент*

УДК 537.8

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА ЗДОРОВЬЕ ЧЕЛОВЕКА

**Гайзетдинова А.М., Гайсина Г.А.**

*Башкирский государственный аграрный университет, Уфа, e-mail: alsu.gayzetdinova@mail.ru*

В статье рассматривается воздействие электромагнитного поля на здоровье человека. Спектр этих частот весьма широк – от гамма-излучения до низкочастотных электрических колебаний, поэтому вызванные ими изменения могут быть весьма разнообразными. На характер последствий влияет не только частота, но и интенсивность, а также время облучения. Некоторые частоты вызывают тепловое и информационное воздействие, другие оказывают разрушительное действие на клеточном уровне. При этом продукты распада могут вызывать отравление организма. В ходе работы затронуты основные отрицательные стороны влияния бытовой техники и мобильных телефонов на человека. В работе приведены разнообразные примеры воздействия электромагнитного поля и побочные эффекты этих действий. При работе лазерных установок на организм человека могут воздействовать следующие вредные факторы: инфракрасное излучение, шум, вибрация. Опасно попадание лазерного луча на кожу человека, в результате чего могут возникнуть ожоги различной степени тяжести. В заключении даны рекомендации по уменьшению вреда электромагнитного излучения.

**Ключевые слова:** электромагнитное поле, источники электромагнитных волн, инфракрасное излучение, лазерное излучение.

## ELECTROMAGNETIC FIELD AND ITS IMPACT ON HUMAN HEALTH

**Gaizetdinova A.M., Gaisina G.A.**

*Bashkir State Agrarian University, Ufa, e-mail: alsu.gayzetdinova@mail.ru*

The article considers the effect of the electromagnetic field on human health. The spectrum of these frequencies is very wide – from gamma radiation to low-frequency electric oscillations, so the changes caused by them can be very diverse. The nature of the consequences is affected not only by the frequency, but also by the intensity, as well as by the time of irradiation. Some frequencies cause thermal and informational impact, while others have a destructive effect on the cellular level. At the same time, decay products can cause poisoning of the body. During the work, the main negative aspects of the influence of household appliances and mobile phones on a person are mentioned. The paper gives a variety of examples of the effects of the electromagnetic field and the side effects of these actions. When working laser installations on the human body can affect the following harmful factors: infrared radiation, noise, vibration. It is dangerous to hit the laser beam on the human skin, resulting in burns of varying severity. In conclusion, recommendations are given to reduce the harm of electromagnetic radiation.

**Keywords:** electromagnetic field, sources of electromagnetic waves, infrared radiation, laser radiation

Электромагнитные поля пагубно влияют на здоровье человека. Но в нынешнем этапе развития человек уже не сможет без этого прожить. Ведь сейчас даже маленьких детей не отпускают на улицу без телефонов, а телефон первый в списке пагубных влиятелей на здоровье человека. Уровень биологического воздействия электромагнитных полей не зависит от длительности его воздействия. При воздействии электромагнитного поля у человека может наблюдаться повышенная утомляемость, вялость, изменение кровяного давления и пульса, возникновение болей в сердце, боли.

### **Влияние физических факторов на организм человека (на примере электромагнитных волн)**

Люди подвергаются различным опасностям, под которыми обычно понимают

явления, которые наносят ущерб здоровью человека, т.е. вызывают различные нежелательные последствия.

В настоящее время в быту, люди пользуются различными приборами- источниками электромагнитных волн, которые излучают энергию и тем самым оказывают значимое влияние на организм человека.

Источниками естественных электромагнитных полей являются атмосферное электричество, космические лучи, излучение солнца, а искусственные источники: различные генераторы, лазерные установки, линии электропередач, измерительные приборы, и др.

Жизнь на нашей планете возникла в тесном взаимодействии с электромагнитным полем Земли. К земному полю люди приспособились в процессе своего развития эволюции. Земное поле стало не-

обходимым и важным фактором в жизни человека. Любое действие полей, как увеличенная, так и уменьшенная может повлиять на человека.

Электромагнитная сфера нашей планеты определяется в основном электрическим и магнитным полями, атмосферным электричеством, радиоизлучением, а также полями искусственных источников.

Перед грозой и во время грозы у человека появляется плохое самочувствие из-за усиления электрического поля, а одним из причин ДТП на дорогах являются магнитные бури, которые возникают из-за солнечной активности, которые так же ухудшают здоровье больных людей в пожилом возрасте.

В быту электрические поля пользуются большим спросом для производства домашних утварей, детских игрушек, мужских и женских одежд, обуви, для конструкции общественных точек и жилых домов, так же и строй материалов являющимися синтетическими полимерами.

Все промышленные и бытовые электро- и радиоустановки являются источниками искусственных полей разной силы.

По мере убывания длины волны в диапазон включаются инфракрасное излучение, видимый свет, ультрафиолетовое излучение, рентгеновское излучение и гамма-излучение.

Электростатические поля возникают при работе легко электризующимися материалами. В радиотехнике используются электромагниты с постоянным током и металлокерамические магниты- они и являются постоянными источниками магнитных полей.

Источниками электрических полей промышленной частоты являются: линии электропередачи, специальные устройства защиты, автоматики, измерительные приборы, высоковольтные установки промышленной частоты.

Источниками электромагнитных излучений радиочастот являются мощные радиостанции, антенны, генераторы, установки индукционного и диэлектрического устройства, высокочастотные приборы в медицине и в быту.

Источником повышенной опасности в быту являются микроволновые печи, телевизоры, мобильные телефоны. В настоящее время признаются источником риска электроплиты, электрические чайники, утюги, холодильники (при работающем компрессоре) и другие бытовые электроприборы.

Особым видом магнитного излучения является лазерное излучение, которое генерируется в лазере [1].

### **Воздействия электромагнитных волн на человека**

Механизм воздействия электромагнитных волн на биологические объекты недостаточно изучен. В постоянном электрическом поле молекулы, из которых состоит тело человека, поляризуются.

Частоты электромагнитных излучений широки, и используются в телерадиовещании, радионавигации и др. При повышении частоты электростатические свойства живых тканей сильно изменяются. Электромагнитные поля оказывают на организм человека тепловое и биологическое воздействие. Переменное поле вызывает нагрев тканей человека. Энергия проникшего в организм многократно преломляется в многослойной структуре тела с разной толщиной слоев тканей [2].

Тепловая энергия, возникшая в тканях человека, увеличивает тепловыделение. Если механизм терморегуляции тела не сможет рассеять избыточное тепло, то неизбежно повышение температуры тела. Выделение теплоты может приводить к перегреванию тканей и органов, которые недостаточно хорошо снабжены кровеносными сосудами. Например, хрусталик глаза, желчный пузырь.



Такие органы как мозг, глаза, почки и ткани человека, которые обладают слабо выраженной терморегуляцией, более чувствительны к облучению. Перегревание тканей и органов ведет к их заболеваниям. Отрицательное воздействие электромагнитного поля может привести к торможению рефлексов, понижению кровяного давления, замедлению сокращений сердца, изменению состава крови, помутнению хрусталика глаза (катаракта) [3].

Воздействие сверхвысоких частот – излучения интенсивностью может привести к потере зрения. При длительном облучении умеренной интенсивности возможны нарушения со стороны эндокринной системы, так же изменение углеводного и жирового обмена, сопровождающееся похудением, повышением возбудимости.

При работе лазерных установок на организм человека могут воздействовать следующие вредные факторы: инфракрасное излучение, шум, вибрация. При воздействии лазерного излучения на организм человека возникают биологические эффекты. Всего различают первичные и вторичные эффекты. Первичные изменения происходят в тканях человека непосредственно под действием излучения (ожоги, кровоизлияния), а вторичные (побочные явления) вызываются различными нарушениями в человеческом организме, развившимися вследствие облучения.

а также свертывания крови. Все это указывает на неоднозначность реакций организма на воздействие электромагнитного поля.

### Заключение

Люди довольно часто подвергаются воздействию различных видов электромагнитного излучения. Для уменьшения воздействия излучения на организм человека существуют различные методы, например, рациональное размещение облучающих объектов, ослабляющее воздействие излучения на людей; ограничение времени нахождения человека в электромагнитном поле; использование поглощающих экранов или же применение средств индивидуальной защиты.

Для защиты глаз от воздействия электромагнитного излучения применяются специальные очки.



Наиболее чувствителен к воздействию лазерного излучения глаз человека. Опасно попадание лазерного луча на кожу человека, в результате чего могут возникнуть ожоги различной степени тяжести. Лазерные лучи высокой интенсивности вызывают поражение различных внутренних тканей и органов человека, что выражается в виде кровоизлияний, отеков,

### Список литературы

1. Основы безопасности жизнедеятельности: Учебник для общеобразовательных учреждений. 9 кл. / Министерство общего и профессионального образования РФ и др. – 3-е изд., перераб. – М.: АСТ, 1999. – 319 с.
2. Экология и безопасность жизнедеятельности: Учебное пособие для вузов/ Д.А. Кривошеин, Л.А. Муравей, Н.Н. Роева и др.; под ред. Л.А. Муравья. – М.: ЮНИТИ-ДА-НА, 2000. – 447 с.
3. Безопасность жизнедеятельности: Учебник / под ред. С.В. Белова. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2002. – 358 с.

**Секция «Современные проблемы комплексного анализа»,  
научный руководитель – Беднаж В.А., канд. физ.-мат. наук, доцент**

УДК 517.53

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

**Беднаж В.А., Моргунова Е.Ю.**

*Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского, Брянск,*

*e-mail: kowalewa.catia2013@yandex.ru*

Теория функций одного переменного является одним из важнейших направлений в комплексном анализе и играет значительную роль как в классической, так и в современной математике. В теории функций одного комплексного переменного и ее многочисленных приложениях существенную роль играют пространства аналитических функций в единичном круге комплексной плоскости. Методы, разработанные в процессе решения задач, связанных с этими пространствами, нашли существенные приложения в теории рядов и интегралов Фурье, в теории сингулярных и интегральных операторов и других разделах комплексного и гармонического анализа. В представленной заметке приведен обзор некоторых результатов, касающихся весовых пространств в комплексной плоскости, рассмотрены некоторые аспекты теории весовых пространств аналитических в круге функций, а именно их интегральные представления.

**Ключевые слова:** измеримые функции, положительные функции, ограниченные функции, интегральное представление

## INTEGRAL INTRODUCTION OF WEIGHT FUNCTIONS

**Bednazh V.A., Morgunova E.Y.**

*Bryansk State University n.a. Academician I.G. Petrovsky, Bryansk,*

*e-mail: kowalewa.catia2013@yandex.ru*

The theory of functions of one variable is one of the most important directions in complex analysis and plays a significant role in both classical and modern mathematics. In the theory of functions of one complex variable and its numerous applications, the spaces of analytic functions in the unit circle of the complex plane play an essential role. The methods developed in the process of solving problems related to these spaces have found significant applications in the theory of series and Fourier integrals, the theory of singular and integral operators and other sections of complex and harmonic analysis. In the present note provides an overview of some results concerning the weight spaces in the complex plane, we consider some aspects of the theory of weight spaces of analytic in terms of functions and their integral representations.

**Keywords:** measurable functions, positive functions, bounded functions, integral representation

Пусть  $\Omega$  множество измеримых положительных функций  $\omega$  на  $\Delta = (0, 1]$ , для которых существуют числа  $m_\omega, M_\omega, q_\omega$ , причем  $m_\omega, q_\omega \in (0, 1]$ , такие, что

$$m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \leq M_\omega,$$

$$\forall x \in \Delta, \lambda \in [q_\omega, 1] \quad [1].$$

Очевидно, что произвольная положительная измеримая на  $[0, 1]$  функция  $\omega$ , отделенная от нуля и бесконечности на отрезке  $[0, 1]$ , принадлежит классу  $\Omega$ . Отметим также, что функции вида

$$\omega(x) = x^\alpha \underbrace{\left( \ln \ln \dots \ln \frac{c}{x} \right)^\beta}_n, x \in (0, 1],$$

при всех  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  также принадлежат классу  $\Omega$ , а функции вида

$$\exp \left\{ -\frac{1}{x^\sigma} \right\}, x \in (0, 1], \sigma > 0,$$

не принадлежат данному классу [2].

В дальнейшем для краткости изложения будем опускать индексы чисел  $m_\omega, M_\omega, q_\omega$ . Рассмотрим класс  $\Omega$  при

$$q = \frac{1}{2}.$$

В следующей теореме мы получим интегральное представление функции из класса

$$\Omega, \quad q = \frac{1}{2}.$$

**Теорема 1.1.** Класс  $\Omega$  совпадает с классом функций  $\omega$ , допускающих на  $\Delta$  представление

$$\omega(x) = \exp \left\{ \eta(x) + \int_x^1 \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\}, x \in \Delta,$$



где  $\eta$  и  $\varepsilon$  – ограниченные измеримые функции на  $\Delta$ , причем справедливо

$$\frac{\ln m}{\ln 2} \leq \varepsilon(x) \leq \frac{\ln M}{\ln 2}.$$

Доказательство теоремы основано на ряде вспомогательных утверждений. [3]

**Лемма 1.1.** Если

$$\omega \in \Omega, \quad \lambda \in \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^p, \left( \frac{1}{2} \right)^{p-1} \right],$$

$$\text{то } m^p \leq \frac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \leq M^p, \quad x \in \Delta.$$

Доказательство. При  $p = 1$  оценка следует непосредственно из определения класса  $\Omega$ .

Предположим, что оценка установлена для некоторого  $n \in N$ , то есть для

$$\lambda \in \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^p, \left( \frac{1}{2} \right)^{p-1} \right]$$

Но поскольку  $\lambda = \frac{1}{2} \tau$ , и

$$\frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega(x)} = \frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)} \frac{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)}{\omega(x)} \leq M \frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)},$$

то

$$\begin{aligned} m \frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)} &\leq \frac{\omega\left(\frac{1}{2} \tau x\right)}{\omega(x)} = \\ &= \frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)} \frac{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)}{\omega(x)} \leq M \frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega\left(\frac{1}{2} x\right)}. \end{aligned}$$

Используя предположение индукции, получим оценку

$$m^{n+1} \leq \frac{\omega\left(\tau \frac{1}{2} x\right)}{\omega(x)} \leq M^{n+1},$$

$$\text{то есть } m^{n+1} \leq \frac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \leq M^{n+1}, \quad \lambda \in \left[ \frac{1}{2}^{n+1}, \frac{1}{2}^n \right].$$

$$m^n \leq \frac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \leq M^n, \quad x \in \Delta.$$

Докажем аналогичную оценку при  $n + 1$ .

Пусть

$$\lambda \in \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^n, \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Положим  $\tau = 2\lambda$ , очевидно, что

$$\tau \in \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^n, \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \right].$$

По предположению

$$m^n \leq \frac{\omega(\tau x)}{\omega(x)} \leq M^n,$$

$$\tau \in \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^n, \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \right].$$

**Лемма 1.2.** Пусть  $r \in \Delta$  тогда существуют положительные числа  $A = A(r)$ ,  $B = B(r)$ , такие, что

$$A(r) \leq \omega(x) \leq B(r), x \in [r, 1].$$

Доказательство. Пусть

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p \leq r < 1, p \in N.$$

По лемме 1.1.

$$m^p \leq \frac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \leq M^p,$$

при

$$\lambda \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^p, \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right], x \in \Delta.$$

Докажем, что аналогичная оценка верна и при всех

$$\lambda \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], 1 \leq k \leq p.$$

Действительно, поскольку

$$0 < m \leq 1, 1 \leq M < +\infty,$$

то  $m^p \leq m^k \leq M^k \leq M^p$ .

Записывая теперь аналогичную оценку для произвольного  $k$ , получим:

$$m^p \leq \frac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \leq M^p,$$

при всех

$$\lambda \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], x \in \Delta, k = 1, 2, \dots, p.$$

Положив далее

$$x = 1, \lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

получим:

$$m^p \leq \frac{\omega(\lambda)}{\omega(1)} \leq M^p,$$

то есть

$$\omega(1)m^p \leq \omega(\lambda) \leq M^p \omega(1),$$

$$\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

или

$$A(r) \leq \omega(\lambda) \leq B(r), \lambda \in [r, 1],$$

где  $A(r) = m^p, B(r) = M^p$ .

**Доказательство теоремы 1.1.**

Положим

$$\delta(x) = \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln \left( \frac{\omega(tx)}{\omega(x)} \right) \frac{dt}{t}, x \in \Delta. \quad (1.1)$$

Очевидно, что функция  $\delta$  измерима и ограничена. Действительно,

$$m \leq \frac{\omega(tx)}{\omega(x)} \leq M,$$

$$t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$x \in \Delta,$$

поэтому, интегрируя по отрезку  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , получим:

$$\frac{\ln m}{\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t} \leq \delta(x) \leq \frac{\ln M}{\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t},$$

$$x \in \Delta, \text{ или } \ln m \leq \delta(x) \leq \ln M.$$

Из равенства (1.1) непосредственно следует, что

$$\ln \omega(x) = -\delta(x) + \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln \omega(tx)}{t} dt.$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln \omega(tx)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}x}^x \frac{\ln \omega(u)}{u} du.$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}x}^x \frac{\ln \omega(u)}{u} du &= \int_{\frac{1}{2}x}^q \frac{\ln \omega(u)}{u} du + \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln \omega(u)}{u} du - \int_x^1 \frac{\ln \omega(u)}{u} du = \end{aligned}$$

$$= \int_x^1 \frac{\ln \omega\left(\frac{1}{2}t\right)}{t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln \omega(t)}{t} dt - \int_x^1 \frac{\ln \omega(t)}{t} dt$$

$$= \int_x^1 \frac{\ln \omega\left(\frac{1}{2}t\right)}{\omega(t)} \frac{dt}{t} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln \omega(t)}{t} dt,$$

имеем:

$$\begin{aligned} \ln \omega(x) = & -\delta(x) + \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln \omega(t)}{t} dt + \\ & + \frac{1}{\ln 2} \int_x^1 \ln \frac{\omega\left(\frac{1}{2}t\right)}{\omega(t)} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Положив далее

$$\begin{aligned} \eta(x) = & -\delta(x) + \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln \omega(t)}{t} dt, \\ \varepsilon(t) = & \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\omega\left(\frac{1}{2}t\right)}{\omega(t)}, \quad t \in \Delta, \end{aligned}$$

получим нужное представление, причем

$$\ln \frac{m\omega(1)}{M} \leq \eta(x) \leq \ln \frac{M\omega(1)}{m},$$

$$x \in \Delta,$$

$$\frac{\ln m}{\ln 2} \leq \varepsilon(x) \leq \frac{\ln M}{\ln 2}, \quad x \in \Delta. \quad (1.2)$$

В дальнейшем положим

$$h_\omega = \frac{\ln m}{\ln 2}, \quad H_\omega = \frac{\ln M}{\ln 2}. \quad (1.3)$$

Очевидно, что

$$h_\omega \leq \varepsilon(x) \leq H_\omega,$$

при этом  $H_\omega > 0$ ,  $h_\omega < 0$ .

**Следствие 1.1.** Пусть

$$\alpha_\omega = -h_\omega = \frac{\ln \frac{1}{m}}{\ln 2},$$

$$\beta_\omega = H_\omega = \frac{\ln M}{\ln 2}.$$

Тогда при  $0 < x < 1$  справедлива оценка

$$x^{\alpha_\omega} \leq \omega(x) \leq \frac{1}{x^{\beta_\omega}}.$$

**Доказательство.** Из оценок (1.2), (1.3) имеем

$$\omega(x) = \exp \int_x^1 \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \leq \exp H_\omega \ln \frac{1}{x},$$

то есть

$$\omega(x) \leq \frac{1}{x^{\beta_\omega}}.$$

Аналогично, учитывая ограниченность функции  $\varepsilon$  снизу и оценку (1.2), получим

$$x^{\alpha_\omega} \leq \omega(x), \quad 0 < x < 1.$$

#### Список литературы

1. Шамоян Ф.А., Родикова Е.Г. О характеристике корневых множеств одного весового класса аналитических в круге функций // Владикавказский математический журнал. – 2014. – Т. 16: № 3. – С. 64–75.
2. Шамоян Ф.А., Шубабко Е.Н. Введение в теорию весовых  $L^p$ -классов мероморфных функций. – Брянск: Группа компаний «Десяточка», 2009.
3. Benedek A., Panzone R. The spaces  $L_p$  with mixed norm // Duke Math. – 1961. – V.28, №3. – PP.301–324.