

*Секция «Математика и ее практические приложения»,
научный руководитель – Долгополова А.Ф., канд. эклн. наук, доцент*

УДК [517.972+519.633]:504.3.054

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ

Агаджанян И.Д., Коростылёва А.Е., Лопатина Д.В.

*ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,
e-mail: inf@stgau.ru*

Выполнен анализ современных методов экспериментального исследования динамики распространения примесей в атмосфере и изменений ее показателей. Для математической модели оценки концентрации аэрозольных примесей, полученной на основе фундаментальной системы решений однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами выполнено построение вычислительного алгоритма, его программная реализация, а также проведены численные исследования вычислительного алгоритма на сходимость и устойчивость получаемых решений к погрешностям в исходных данных. В связи с ростом антропогенной нагрузки на экологические системы, в том числе и на атмосферу, увеличивается актуальность развития методов и средств исследования ее состояния для решения экологических проблем.

Ключевые слова: загрязнение атмосферы, математическое моделирование, уравнение переноса, дифференциальное уравнение, аналитическое решение, вычислительный алгоритм, численные исследования

DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE PROBLEM OF MATHEMATICAL MODELING OF TRANSPORT OF POLLUTANTS IN THE ATMOSPHERE

Aghajanian I.D., Korostyleva A.E., Lopatina D.V.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru

The analysis of modern methods of experimental studies of dynamics of spreading of impurities in the atmosphere and changes its indicators. For the mathematical model evaluation of aerosol impurities, derived from the fundamental system of solutions of the homogeneous differential equation of second order with constant coefficients carried out the construction of the computational algorithm, its software implementation and numerical studies the computational algorithm on the convergence and stability of the solutions to the errors in the source data.

Keywords: air pollution, mathematical modeling, transport equation, differential equation, analytical solution, computational algorithm and numerical investigations

В связи с ростом антропогенной нагрузки на экологические системы, в том числе и на атмосферу, увеличивается актуальность развития методов и средств исследования ее состояния для решения экологических проблем. В рамках обозначенной задачи необходимы анализ процессов и прогнозирование последствий распространения загрязняющих веществ в атмосфере [1, 2].

Исследование динамики распространения примесей в атмосфере и изменений ее показателей экспериментально, значительно затруднено в силу сложного характера диффузионного и конвективного массопереноса. Помимо этого определенную сложность вызывает как наблюдение за ходом эксперимента, так и интерпретация полученных данных с целью выявления структуры движения вследствие значительных масштабов объектов исследования и длительности процессов конвекции и диффузии. Известно, что существующие современные методы

экспериментального исследования требуют использования дорогостоящего измерительного оборудования и экспериментальных установок. В тех случаях, когда масштабы возможных техногенных нарушений исключают натурные испытания, а лабораторные исследования в силу ограниченных возможностей обеспечения подобия дают лишь неполную информацию, математическое моделирование и вычислительный эксперимент становятся основными способами изучения процессов переноса вещества в турбулентной атмосфере [1, 2].

Современная вычислительная техника позволяет создавать эффективные вычислительные алгоритмы и комплексы программ для решения указанной задачи [9, 10, 13]. Однако численное моделирование на ЭВМ предъявляет к исследователю серьезные требования, помимо отличной подготовки по вычислительной математике и программированию, он должен хорошо разбираться

в физических особенностях решаемой задачи, а также верно интерпретировать результаты моделирования.

В решении данных задач особое внимание уделяется моделированию с помощью дифференциальных уравнений, так как рассматриваемые процессы протекают как во времени, так и в пространстве. Дифференциальные уравнения описывают динамику процесса переноса примесей в режиме реального времени, однако следует отметить ряд возникающих на пути имитаций с помощью дифференциальных уравнений, трудностей. Во – первых, систематических правил получения самих уравнений не существует, их составление основано на полуэмпирических закономерностях, аналогиях, рассуждениях и навыках моделирующего, о чем уже упомянуто выше. Во – вторых, решаемые задачи имеют большую размерность, что определяет технические трудности. В связи с этим можно утверждать, что реализация описываемых моделей на параллельных компьютерных системах является актуальной научной задачей.

Математическая модель переноса загрязняющих примесей в атмосфере использует уравнения математической физики для установления взаимосвязей между неизвестными функциями, характеризующими исследуемый объект. Уравнения дополняются неравенствами и другими ограничениями, связанными с моделью. Математические вопросы корректности моделей (существование и единственность решения, его устойчивость) являются очень важными, но не всегда решаемыми.

Перенос загрязняющей субстанции q в пограничном слое атмосферы описывается нестационарным уравнением переноса (с учетом его параметризации) [3, 6, 14]:

$$\frac{\partial \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{t}} + \hat{\alpha}(\hat{t}) \cdot \hat{q}(\hat{x}, \hat{t}) + \beta \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{V}(\hat{x}, \hat{t}) \cdot \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})) - \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\hat{K}(\hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}} \right) = \xi \cdot \hat{S}(\hat{x}, \hat{t}), \quad (1)$$

$$q(x, t = 0) = q_0(x), \quad q(x = 0, t) = q_1(t), \quad q(x = X, t) = q_2(t), \quad (2)$$

где $q(x, t)$ – поле концентрации примесей (загрязняющей субстанции), $V(x, t)$ – скорость ветра, $K(x, t)$ – атмосферная турбулентность, $S(x, t)$ – источник примесей.

В данной работе помимо известных двух итерационных схем решения уравнения

переноса субстанции в турбулентной среде [4, 5] рассматриваются другие формы интегральных уравнений и соответствующие им преобразования интегральной модели [11, 12]. Настоящий метод носит исключительно качественный характер, его основное назначение состоит в разработке методик качественной оценки значений параметров в задачах математического моделирования явления переноса загрязняющей примеси в турбулентной атмосфере.

Уравнение (1) запишем следующим образом:

$$\dot{q} + \alpha q + \beta V'q + \beta Vq' - \theta K'q' - \theta Kq'' = \xi S, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{t}}; \\ q' &= \frac{\partial \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}}; \\ q'' &= \frac{\partial^2 \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}^2}; \\ \hat{\alpha}(\hat{t}) &= \alpha = \text{const}; \\ V' &= \frac{\partial \hat{V}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}}; \\ K' &= \frac{\partial \hat{K}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}}; \\ V &= \hat{V}(\hat{x}, \hat{t}); \\ K &= \hat{K}(\hat{x}, \hat{t}); \\ S &= \hat{S}(\hat{x}, \hat{t}). \end{aligned}$$

В результате последующих преобразований уравнения (3) приходим к параметризованной модели:

$$q'' + \frac{\theta K' - \beta V}{\theta K} q' - \frac{\alpha + \beta V'}{\theta K} q = \frac{\dot{q} - \xi S}{\theta K}, \quad (4)$$

где далее примем следующие обозначения:

$$p_1(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{\theta K' - \beta V}{\theta K},$$

$$p_2(\hat{x}, \hat{t}) = -\frac{\alpha + \beta V'}{\theta K},$$

$$f(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{\dot{q} - \xi S}{\theta K},$$

в соответствии с чем уравнение (4) получим в виде:

$$\hat{q}'' + p_1 \hat{q}' + p_2 \hat{q} = f(\hat{x}|\hat{t}). \quad (5)$$

Уравнение (5), как известно [2, 7], представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и имеет аналитическое решение.

Далее в работе выполняется построение вычислительного алгоритма решения уравнения переноса (5) с использованием рекурсивной вычислительной схемы:

$$\tilde{q}_{i,j} = \mu \sum_{k=0}^i \omega_k \tilde{K}_{i,k} q_{k,j} - \mu \sum_{k=0}^i \omega_k \tilde{K}_{i,k} q_{k,j-1} + \varphi_{i,j},$$

$$\varphi_{i,j} = q_{0,j} - \eta \sum_{k=0}^i \omega_k \tilde{K}_{i,k} S_{k,j},$$

$$\mu = \lambda \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

$$\eta = \lambda \xi \Delta x,$$

$$\lambda = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{r_2 - r_1},$$

$$\tilde{K}_{i,k} = e^{r_2(x_i - x_k)} - e^{r_1(x_i - x_k)},$$

$$x_k \leq x_i,$$

$$r_{1,2} = \frac{\beta}{2\theta} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\theta^2} + \frac{\alpha}{\theta}},$$

$$i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}; \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (6)$$

Алгоритм вычислительной модели (6) достаточно прост, в то же время, погрешность получаемых с его помощью решений зависит от погрешностей аппроксимации искомого решения и полей исходных данных, а также их производных [8, 15]. В силу указанных обстоятельств далее проводятся численные исследования рекурсивного алгоритма (6) на сходимость и устойчивость получаемых решений. Для проведения вы-

числительного эксперимента, кроме алгоритма, разработано программное обеспечение (в системе Maple) и тестовые задачи [11, 12, 14]. Установлено, что увеличение размерности расчетной сетки приводит к росту погрешности, что хорошо объясняется ростом вычислительных погрешностей, которые несут в себе исходные данные. Так, в случае размерности $(m \times n) = (15 \times 20)$ погрешность решения составила $\sigma = 0,0818$. Анализ результатов вычислительного эксперимента показывает, что, если погрешность в данных экологического мониторинга до 8%, то вычислительный алгоритм (6) сохраняет свойство устойчивости при соответствующем выборе исходных данных.

Список литературы

1. Наац В.И. Качественная модель оценки концентрации аэрозольных примесей в атмосфере, основанная на интегральном представлении решения уравнения турбулентной диффузии / В.И. Наац, Е.П. Ярцева // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2012. – № 1. – С. 38 – 43.
2. Наац В.И. Математические модели и вычислительный эксперимент в проблеме контроля и прогноза экологического состояния атмосферы / В.И. Наац, И.Э. Наац, Р.А. Рыскаленко, Е.П. Ярцева. – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2016. – 376 с.
3. Наац В.И. Обратные задачи и качественные модели в проблеме мониторинга атмосферы / В.И. Наац, Р.А. Рыскаленко, Е.П. Ярцева. – LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2015. – 405 с.
4. Наац В.И. Построение рекурсивно-итерационного алгоритма для трехмерного нестационарного уравнения переноса примесей в атмосфере / В.И. Наац, Е.П. Ярцева // Вестник Северо – Кавказского федерального университета. – 2014. – № 2 (41). – С. 9 – 14.
5. Наац В.И. Разработка качественной модели и итерационного алгоритма для оценки концентрации загрязняющих примесей в атмосфере / В.И. Наац, Е.П. Ярцева // Вестник Северо – Кавказского федерального университета. – 2013. – № 1 (34). – С. 15 – 21.
6. Наац В.И. Численное исследование рекурсивных и итерационных алгоритмов в задаче моделирования переноса аэрозолей в атмосфере / В.И. Наац, Е.П. Ярцева // Вестник Ставропольского государственного университета. – 2011. – Выпуск 75 [4]. – С. 44 – 50.
7. Наац И.Э. Операторы потенциального типа в задачах прикладного анализа / И.Э. Наац, В.И. Наац, Р.А. Рыскаленко, Е.П. Ярцева // Наука. Инновации. Технологии: Научный журнал Северо-Кавказского федерального университета. – Ставрополь, 2017. – № 3. – С. 43 – 60.
8. Ярцева Е.П. Программа для реализации рекурсивных и итерационных вычислительных алгоритмов для пространственной задачи переноса загрязняющих примесей в турбулентной атмосфере. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014661580. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 31 октября 2014.
9. Ярцева Е.П. Качественная модель оценки концентрации аэрозольных примесей в атмосфере на основе итерационного метода / Е.П. Ярцева // Наука и устойчивое развитие: материалы VII Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых. – Нальчик. – 2013. – С. 176 – 178.
10. Ярцева, Е.П. Построение модульной системы «Математические модели и вычислительные алгоритмы оценки концентрации загрязняющих примесей в турбулентной атмосфере» / Е.П. Ярцева // Наука и образование XXI века: сборник статей Международной научно – практической конференции. – Уфа. – 2014. – Часть 2. – С. 5 – 7.