УДК 51-72

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Богомолов А.А., Жуков Д.А.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь, e-mail: inf@stgau.ru

В данной статье мы рассмотрим на конкретных примерах применения дифференциального уравнения первого и второго порядка в решении задач по физике. Очень часто в дифференциальное уравнение входят производные функции, а иногда и сама функция, а также независимая переменная и параметры. Так же порядок производных в уравнении может быт хаотичен и могут существовать такие уравнения, в которых и вовсе отсутствуют производные функции, параметры и независимые переменные. Но в любом уравнении должна присутствовать хотя бы одна производная функция. Но не любое уравнение, которое содержит в себе производные неизвестной функции, будет являться дифференциальным уравнением. Главным отличием дифференциальных уравнений от алгебраических является, то что мы ищем не число, а функцию.

Ключевые слова: математика, физика, дифференциальные уравнения, условие, применение

APPLICATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS TO SOLUTIONS OF PHYSICS PROBLEMS

Bogomolov A.A., Zhukov D.A.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru

In this article, we will look at specific examples of applications of first-order and second-order differential equations in solving problems in physics. Very often, the differential equation includes derivative functions, and sometimes the function itself, as well as the independent variable and parameters. Similarly, the order of the derivatives in the equation can be chaotic and there can exist equations in which there are no derivative functions, parameters and independent variables. But in any equation there must be at least one derived function. But not every equation that contains the derivatives of an unknown function will be a differential equation. The main difference between differential and algebraic equations is that we are looking for a function rather than a number.

Keywords: mathematics, physics, differential equations, the condition of the application

Большинство задач по физике приводят к необходимости решения дифференциальных уравнений. Это можно объяснить тем, что многие физические законы являются дифференциальными уравнениями, относительно некоторых функций, которые характеризуют эти процессы. Физические законы представляют собой теоретическое обобщение многих экспериментов и описывают эволюцию искомых величин, как в пространстве, ток и во времени. К примеру второй закон Ньютона является дифференциальным уравнением второго порядка [3, 6]:

$$m\frac{d^2 * r}{dt^2} = F\left(r, v, t\right).$$

Учитывая огромную важность дифференциальных уравнений в общей и теоретической физики, рассмотрим основные понятия и приёмы интегрирования некоторых видов, которые часто встречаются в задачах.

Дифференциальное уравнение – это уравнение, которое помимо независимых переменных и неизвестных функции данных переменных, содержит ещё и производные неизвестных функции [1, 4].

Наивысший порядок производных неизвестной функции, входящих в дифференциальное уравнение называется порядком дифференциального уравнения.

Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение, которое связывает независимую переменную, искомую функцию и её производную 1-го порядка [2].

Для составления дифференциальных уравнении часто применяют эти способы:

1) Записать условие на производную искомой величины, используя известные законы физики и физический смысл производной;

2) Определить, какая их величин будет независимой переменной, а какая зависимой;

3) Затем находят линейное приближение для приращения D_y, когда независимая величина переменная получила приращение D_x;

4) Разделив D_y на D_x и переходя к пределу при $D_x \to 0$, получают дифференциальное уравнение.

Рассмотрим конкретный пример применения дифференциального уравнения 1–го порядка:

Чаша в форме параболоида вращения в начальный момент заполнена водой. В самой нижней части чаши имеется отверстие радиуса r_1, через которое вытекает вода. Найти зависимость $h(t)$ уровня воды в чаше от времени, если известно, что высота чаши H, радиус верхнего края R. За какой промежуток времени t из чаши вытечет вся вода?

Решение.

Зависимость между уровнемhводы и в чаше и радиусом r горизонтальной поверхности воды имеет вид

$$h = \frac{H}{R^2} r^2 .$$

Пусть за промежуток времени $(t; t + D_t)$ уровень воды изменится на D_h, тогда изменение объёма воды в чаше

$$DV = pr^2 Dh = p\frac{R^2}{H} hDh \cdot \qquad (1)$$

С другой стороны, это изменение равно

$$DV = -vpr_1^2 Dt = -0,6\sqrt{2gh}\,pr_1^2 Dt , \qquad (2)$$

где $v = 0,6\sqrt{2gh}$ – скорость истечения воды из отверстия.

Приравнивая уравнения (1) и (2) и переходя к пределу при $D_t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{R^2}{H} hdh = -0,6\sqrt{2gh} r_1^2 Dt . \qquad (3)$$

После разделения переменных в 3 и интегрирования, имеем:

$$\frac{2R^2}{3H} h^{1,5} = -0,6\sqrt{2g} r_1^2 t + C . \qquad (4)$$

Найдём константу C из начальных условий. Так как $h(0) = H$, то

$$C = \frac{2R^2}{3H} H^{1,5} ,$$

поэтому уравнение 4 будет иметь вид

$$\frac{2R^2}{3H}\left(H^{1,5} - h^{1,5}\right) = 0,6\sqrt{2g} r_1^2 t . \qquad (5)$$

Выражая h из формулы 5, получим искомую зависимость:

$$h(t) = cH^{1,5} - 0,9\sqrt{2g}\,\frac{Hr_1^2 t}{R^2} .$$

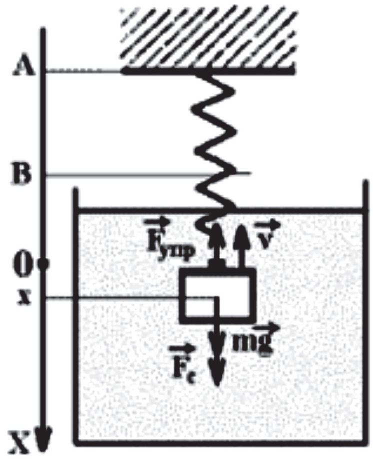
Поскольку $h(t_1) = 0$, то из 5 найдём время, за которое вытечет вся вода:

$$t_1 = \frac{R^2\sqrt{H}}{0,9\sqrt{2g} r_1^2} .$$

Дифференциальное уравнение 2–го порядка – это уравнение, в которое входят независимая переменная, неизвестная функция, первая и вторая производные этой функции.

Рассмотрим пример задачи, который приводит к решению линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Тело массы 5 кг подвешено к концу пружины жёсткости 20 Н/м и помещено в вязкую среду. Период его колебаний в этом случае равен 10 с. Найти постоянную демпфирования, логарифмический декремент колебаний и период свободных колебаний [5].



Решение. Выберем начало координат в положении статического равновесия тела и расставим силы, действующие на тело в процессе колебаний. Если AB обозначает длину не растянутой пружины, то отрезок OB представляет статическое удлинение пружины под действием силы тяжести.

По закону Гука

$$mg = kOB .$$

Записываем второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \overrightarrow{F_{óïð}} + \overrightarrow{F_c} + m\vec{g} .$$

Проектируем это равенство на ось OX, учитывая, что

$$F_{xc} = -av_x = -ax, F_{xупр} = -k\left(x + OB\right) .$$

В результате получим уравнение колебаний

$$m\ddot{x} = -a\dot{x} - k\left(x + OB\right) + mg = -a\dot{x} - kx$$

или $\qquad \ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 , \qquad (1)$

где $n = \frac{a}{2m}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Уравнение (1) – это дифференциальное уравнение второго порядка.

Составляем характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2nr + \omega_0^2 = 0 \cdot \qquad (2)$$

Вычисляем дискриминант уравнения (2):

$$D = n^2 - \omega_0^2 \cdot \qquad (3)$$

Поскольку в данном случае движение тела носит колебательный характер, то его координата должна изменяться по гармоническому закону.

$$x = e^{-\lambda t}\left(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\right) \qquad (4)$$

В случае отсутствия затухания, $\omega = \omega_0$, и тело совершает свободные колебания с периодом

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - n^2}} \cdot$$

Выражаем отсюда

$$n = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2},$$

и определяем постоянную деформирования a:

$$a = 2mn = 2m\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot$$

Подставляя данный задачи, получим ответ

a=19 (Н·с)/м.

Логарифмический декремент затухания есть натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд,

$$\Delta = n\frac{T}{2} \cdot$$

Вычисляя n и подставляя значение T, получим

$$\Delta = 9,5 \, .$$

Список литературы

1. Бондаренко В.А., Ханларов С.Т. Применение определенного интеграла в геометрических и физических задачах // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5–2. – С. 143–146.

2. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Некоторые аспекты интегрированного подхода изучения математического анализа // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона: ежегодная 76-я научно-практическая конференция Ставропольского государственного аграрного университета «Аграрная наука – Северо-Кавказскому региону», 2012. – С. 280–283.

3. Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б. Государственное регулирование в системе агробизнеса // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона Ежегодная 76-я научно-практическая конференция Ставропольского государственного аграрного университета «Аграрная наука – Северо-Кавказскому региону», 2012. – С. 202–207.

4. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Долгополова А.Ф. Коррекция динамического диапазона статистических данных // Статистика вчера, сегодня, завтра Международная научно-практическая конференция, посвященная 155–летию образования Ставропольского губернского комитета статистики, 150–летию образования в России Центрального статистического комитета и Международному году статистики, 2013. – С. 148–152.

5. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Жукова В.А., Мамаев И.И. Модель экономического роста с распределенным запаздыванием в инвестиционной сфере // Вестник АПК Ставрополья. – 2017. – № 2 (26). – С. 225–228.

6. Мелешко С.В., Невидомская И.А., Гулай Т.А. Самостоятельная работа студентов и ее организация при изучении теории вероятностей // Финансово-экономические и учетно-аналитические проблемы развития региона: Материалы Ежегодной 78-й научно-практической конференции, 2014. – С. 246–251.