УДК 621.316.5

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦЫ И ЕЕ ДЕТЕРМИНАНТА

Искандарова К.Р., Чубанов А.А.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь, e-mail: alav26@mail.ru

Статья посвящена матричному методу расчета электрических цепей. В ней рассмотрены основные теоретические понятия. На примере показана практичность и рациональность матричного метода в электротехнической инженерной практике. Использование матричных методов расчета позволяет оформить процесс составления уравнений электромагнитного баланса цепи, а также упорядочить ввод данных в ЭВМ, что особенно существенно при расчете сложных разветвленных схем. Также поднимаются вопросы взаимодействия математики и техники в целом. В этой статье мы разберем расчет электрических цепей с использованием матрицы и ее детерминанта, который применяется на практике. Для этого необходимо вспомнить, что такое матрица и ее детерминанты. Рассмотрим, с какой целью в электротехнике применяют матричные методы расчёта сложных электрических цепей.

Ключевые слова: матричный метод, электрическая цепь, матрица и ее детерминант

CALCULATION OF ELECTRICAL CIRCUITS WITH THE USE OF A MATRIX AND ITS DETERMINANT

Iskandarova K.R., Chubanov A.A.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: alav26@mail.ru

The article is devoted to the matrix method for calculating electrical circuits. In it the basic theoretical concepts are considered. The practicality and rationality of the matrix method in electrical engineering practice are shown on an example. The use of matrix calculation methods makes it possible to formalize the process of drawing up the equations of the electromagnetic balance of a circuit, and also to order the input of data into a computer, which is especially important in the calculation of complex branched circuits. Questions of interaction of mathematics and engineering in general are also raised. In this article, we will analyze the calculation of electrical circuits using the matrix and its determinant, which is used in practice. For this, it is necessary to recall what the matrix and its determinants are. Let's consider, for what purpose in electrotechnology apply matrix methods of calculation of complex electric circuits.

Keywords: Matrix method, the electric circuit, matrix and its determinant

В настоящее время трудно переоценить значение инженерной практики в современном мире науки и техники. Инженеры пользуются огромными познаниями в математике, стимулируют научно-технический прогресс, результаты которого определяют поступательное развитие общества. Однако стоит отметить, что данное развитие имеет место, только при тесном взаимодействии математики и технической практики. Инженерное дело, как область интеллектуальной деятельности человека, не может быть реализовано без математического аппарата, на основе которого решаются основные научно-технические задачи. Соответственно и математика не имела бы возможности интенсивного развития, если бы не являлась основным инструментом в научно-технической деятельности. Это значит, что математика и инженерное дело взаимно дополняют друг друга. Таким образом, мы приходим к выводу, что современный инженер, воплощающий инновационные идеи, не может обойтись без уверенных знаний математики [3, 8].

Например, инженер-электротехник для решения основных задач в своей области, в частности расчет параметров электрических цепей, использует уравнения Кирхгофа в матричной форме. В данном случае мы наблюдаем, как благодаря линейной алгебре и ее методам, значительно упрощается процесс длительных расчетов, а значит, увеличивается эффективность инженерной деятельности.

Рассмотрим базовую теорию. Матрица – это прямоугольная таблица чисел, в которой содержатся m строк (или n столбцов) идентичной длины [7].

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

сокращенно можно записать, где $i = 1,\overline{m}$ (то есть $i = 1,2,3\dots,m$) – номер строки, j=1, n (то есть j=1,2,3,… n) – номер столбца [6].

Матрицу размером $m \times n$ называют матрицу A и обозначают $A_{m\times n}$. Элементами составляющие матрицу, называются числа a_{ij}. Элементы, стоящие на диагонали и идущие из верхнего угла, образуют главную диагональ. Матрица, имеющая одинаковое количество столбцов и строк, называется квадратной [1, 2].

Квадратной матрице A n-го порядка можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее детерминантом, таким образом:

$$n=1.\ A=(a_1);\ \det A=a_1.$$

$$n=2.\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

$$n=3.\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{13}+a_{21}a_{32}a_{13}-$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}--a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Минором некоторого элемента a_{ij} детерминанта n-го порядка называется детерминант n–1-го порядка, получившийся из исходного с помощью вычеркивания столбца и строки, на пересечении которых находится выбранный элемент [2].

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij}, детерминанта называется минор, взятый со знаком «+», если сумма i+j – четное число, и со знаком «-», если сумма нечетная. Обозначается как A_{ij}: $A_{ij}=(-1)^{i+j}\,m_{ij}$.

Метод Крамера – это способ решения систем линейных алгебраических уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных с нулевым главным детерминантом матрицы коэффициентов системы [5].

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},\ i=1,\overline{n}\ \text{(Формула Крамера)}$$

На примере продемонстрируем расчет электрической цепи с помощью данной теории.

Пример 1.

Дана электрическая цепь (рисунок). Надо определить токи в ветвях, с помощью законов Кирхгофа. Параметры элементов электрической цепи следующие: R_1=45 Ом, R_2=15 Ом, R_3=45 Ом, R_1=75 Ом, E_1=60 В, E_2=450 В.

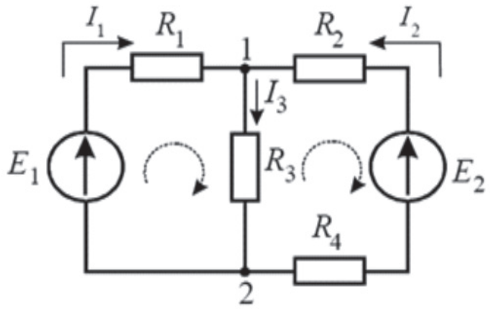

Схема электрической цепи

Решение. Необходимо выбрать положительные направления искомых токов ветвей и обозначить их на схеме.

Составим уравнение, используя первый закон Кирхгофа для узла 1. Выбрав направления обходов контуров, можно записать уравнение по второму закону Кирхгофа. В итоге можно получить систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} I_1+I_2-I_3=0 \\ I_1R_1+I_3R_3=E_1 \\ -I_2(R_2+R_4)-I_3R_3=-E_2 \end{cases}$$

Решаем полученную систему по методу Крамера с помощью детерминантов:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & -90 & -45 \end{vmatrix}=10125;$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 60 & 0 & 45 \\ -450 & -90 & -45 \end{vmatrix}=12150;$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 45 & 60 & 45 \\ 0 & -450 & -45 \end{vmatrix}=37800;$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 45 & 0 & 60 \\ 0 & -90 & -450 \end{vmatrix}=25650;$$

Находим значения токов по формуле Крамера

$$I_1 = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{12150}{10125} = 1,2\,\text{А};$$

$$I_2 = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{37800}{10125} = 3,73\,\text{А};$$

$$I_3 = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{25650}{10125} = 2,53\,\text{А}.$$

Пример 2.

Второй закон Кирхгофа используется для метода контурных токов. С помощью этого метода можно уменьшить число уравнений в системе на n–1. Достигается это разделением схемы на ячейки (независимые контуры) и введением для каждого контура-ячейки своего тока – контурного тока, являющегося расчетной величиной. В заданной системе рассмотрим три контура-ячейки и введем для них контурные токи I_{k1}, I_{k2}, $I_{k3.}$ Смежными ветвями называются ветви, принадлежащие двум смежным контурам. В них действительный ток равен алгебраической сумме контурных токов смежных контуров, с учетом их направления. При составлении этих уравнений по второму закону Кирхгофа алгебраически суммируются ЭДС источников в левой части равенства, входящих в контур-ячейку. В правой части равенства алгебраически суммируются напряжения на сопротивлениях, входящих в этот контур, а также учитывается падение напряжения на сопротивлениях смежной ветви, определяемое по контурному току соседнего контура. На основании ранее приведенного материала контурные токи рассчитываются следующим образом:

$$E_1 = I_{k1}(r_{01}+R_1+R_3+R_4)+I_{k2}R_3-I_{k3}R_4;$$

$$E_2 = I_{k1}R_3+I_{k2}(r_{02}+R_2+R_3+R_5)+I_{k3}R_5;$$

$$0 = -I_{k1}R_4+I_{k2}R_5+I_{k3}(R_4+R_5+R_6).$$

Подставляем в уравнение численные значения ЭДС и сопротивлений:

$$40 = 102I_{k1}+24I_{k2}-41I_{k3};$$

$$20 = 24I_{k1}+93I_{k2}+16I_{k3};$$

$$0 = -41I_{k1}+16I_{k2}+118I_{k3.}$$

Решим систему с помощью определителей. Вычислим определитель системы Δ и частные определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 102 & 24 & -41 \\ 24 & 93 & 16 \\ -41 & 16 & 118 \end{vmatrix} = 1119348 - 15744 - 15744 -$$
$$-156333 - 67968 - 26112 = 837447.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 40 & 24 & -41 \\ 20 & 93 & 16 \\ 0 & 16 & 118 \end{vmatrix} = 438960 - 13120 - 56640 - 10240 = 358960;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 102 & 40 & -41 \\ 24 & 20 & 16 \\ -41 & 0 & 118 \end{vmatrix} = 240720 - 26240 - 33620 - 113280 = 67580;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 102 & 24 & 40 \\ 24 & 93 & 20 \\ -41 & 16 & 0 \end{vmatrix} = -19680 + 111360 + 152520 - 236640 = 115560;$$

Вычисляем контурные токи:

$$I_{k1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{358960}{837447} = 0,429\,\text{А}.$$

$$I_{k2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{67580}{837447} = 0,081\text{А}.$$

$$I_{k3} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{115560}{837447} = 0,138\text{А} .$$

Действительные токи ветвей:

$$I_1=I_{k1}=0,429 \text{ А};$$

$$I_6=I_{k3}=0,138 \text{ А};$$

$$I_1=I_{k1}=0,081 \text{ А};$$

$$I_3=I_{k1}+I_{k2}=0,429+0,081=0,510 \text{ А};$$

$$I_4=I_{k1}–I_{k3}=0,429–0,138=0,291 \text{ А};$$

$$I_5=I_{k2}+I_{k3}=0,081+0,138=0,219 \text{ А}.$$

Список литературы

1. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Задачи с экономическим содержанием на занятиях по дифференциальному исчислению // Актуальные вопросы теории и практики бухгалтерского учета, анализа и аудита: ежегодная 75-я научно-практическая конференция. – 2011. – С. 124–127.

2. Гулай Т.А., Гатауллина К.Р., Фурсов Д.И., Применение классического метода при математическом расчете переходных процессов // Международный студенческий научный вестник. – 2017. – № 4–4. – С. 511–513.

3. Гулай Т.А., Желтяков В.И., Применение систем линейных алгебраических уравнений при расчете электрических цепей // Международный студенческий научный вестник. – 2017. – № 4–4. – С. 522–524.

4. Гулай Т.А., Жукова В.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А., Математика: рабочая тетрадь. – Ставрополь, 2015.

5. Гулай Т.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А., Применение технических средств обучения в процессе математической подготовки студентов инженерных направлений // Вестник АПК Ставрополья. – 2014. – № 1 (13). – С. 10–13.

6. Долгополова А.Ф., Колодяжная Т.А. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 1 // Международный журнал экспериментального образования. – 2011. – № 12. – С. 62–63.

7. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 2 // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – №2. – С. 81–82.

8. Мелешко С.В., Зорина Е.Б., Попова С.В., Гулай Т.А., Самостоятельная работа как важнейшее средство повышения профессионально-познавательной и творческой активности будущих специалистов // Theoretical & Applied Science. – 2016. – № 11 (43). – С. 135–138.