УДК 517.958

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Каланчук И.В., Попов Н.И.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь, e-mail: igor.kalanchuk@gmail.com

Приведены обзор и систематизация, а так же рассмотрены методы решения задач в математической физике посредством дифференциальных уравнений первого и второго порядков, классификация дифференциальных уравнений. Такой подход дал возможность получить необходимые условия оптимальности. Математические модели естественнонаучных явлений и процессов зачастую представляют собой задачи, содержащие дифференциальные уравнения с частными производными первого и второго порядков. Дифференциальные уравнения существенные для физики, механики техники называют дифференциальными уравнениями математической физики. Рассмотрено квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Рассмотрено линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. Для получения общего решения уравнения рассмотрена характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведен пример применения дифференциальных уравнений к решению различных прикладных, в том числе инженерно-технических задач.

Ключевые слова: методы решения, математическая физика, дифференциальные уравнения

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Kalanchuk I.V., Popov N.I.

Stavropol State Agrarian University, Stavropol, e-mail: igor.kalanchuk@gmail.com

Provides an overview and systematization, as well as the methods of solving problems in mathematical physics by differential equations of first and second order, classification of differential equations. This approach provided the opportunity to obtain necessary optimality conditions. The mathematical models of science phenomena and processes often represent tasks containing a differential equation with partial derivatives of first and second order. Differential equations are essential in physics, mechanics technique called differential equations of mathematical physics. Considered a quasilinear differential equation in partial derivatives of first order. We consider linear partial differential equations of second order with two independent variables. To obtain the General solution of the equation considered characteristic system of ordinary differential equations. The example of application of differential equations to the solution of various applications, including engineering tasks.

Keywords: methods of solution, mathematical physics, differential equations

Основными уравнениями математической физики для случая, когда искомая функция u зависит от двух независимых переменных, являются следующие дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.

I. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это уравнение является простейшим уравнением с частными производными второго порядка гиперболического типа. К решению такого уравнения сводятся задачи о поперечных колебаниях струны и продольных колебаниях стержней, о звуковых и электромагнитных колебаниях, о колебаниях газа и т.д.

II. Волновое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это уравнение является простейшим уравнением параболического типа. К решению такого уравнения сводятся задачи о распространении тепла в однородной среде, о фильтрации жидкостей и газов, некоторые вопросы теории вероятностей и т.д.

III. Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

представляющее простейшее уравнение эллиптического типа. К решению этого уравнения сводятся задачи о свойствах стационарных электрических и магнитных полей, о стационарном распределении тепла в однородном теле, задачи гидродинамики, диффузии и т.д.

Замечание 1. В общем при постановке задачи исследования следует учитывать, что физическое явление может носить одномерный, двухмерный и трёхмерный характер, а также быть стационарным (не меняющимся во времени).

Двухмерное волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

которое описывает колебания мембраны и поверхности несжимаемой жидкости.

В конкретных задачах, сводящихся к уравнениям математической физики, всегда ищется не общее, а частное решение уравнения, удовлетворяющее некоторым дополнительным определённым условиям, вытекающим из физических соображений и особенностей данной задачи.

Такими дополнительными условиями являются:

а) начальные условия, относящиеся обычно к начальному моменту времени ($t = 0$), с которого начинается изучение данного явления;

б) граничные условия, то есть условия, заданные на границе рассматриваемой среды (области), внутри которой находится решение составленного ими данного дифференциального уравнения.

Совокупность начальных и граничных условий называется краевыми условиями.

Задача, состоящая в нахождении частного решения уравнений при начальных условиях называется задачей Коши.

Задача математической физики, в которой учитываются как начальные, так и граничные условия, называется смешанной задачей (задачей Коши общего вида).

Для решения уравнений математической физики обычно применяются:

а) метод Даламбера (метод характеристик),

б) метод Фурье (метод разделения переменных).

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$a(x,y)\frac{du}{dx} + b(x,y)\frac{du}{dy} = c(x,y,u) \,. \quad (1)$$

Для получения общего решения уравнения (1) рассматривают характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений [3]:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}. \quad (2)$$

Если c=0, то система сводится к одному уравнению

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}.$$

Если $f(x,y) = C$ общий интеграл уравнения, тогда

$u = w(f(x,y))$ – общее решение.

Само дифференциальное уравнение содержит в себе только самую общую информацию об описываемом процессе. Необходимо задание начальных и граничных условий, для конкретизации.

Дифференциальные уравнения математической физики второго порядка. Большое количество процессов и явлений в физике описывается с помощью дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, это связано с тем, что фундаментальные законы физики – законы сохранения – записываются в терминах вторых производных [2, 5].

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$a(x,y)\frac{d^2x}{dx^2} + 2b(x,y)\frac{d^2w}{dxdy} + c(x,y)\frac{d^2w}{dy^2} = \\ = F\left(x,y,w,\frac{dw}{dx},\frac{dw}{dy}\right), \quad (3)$$

где a, b, c – это некоторые функции от x, y, которые имеют непрерывные производные до второго порядка включительно.

Для того чтобы привести уравнение (3) к каноническому виду, необходимо записать так называемое характеристическое уравнение (4):

$$ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0, \quad (4)$$

из которого выходят два уравнения:

$$ady - \left(b + \sqrt{b^2 - acdx}\right) = 0\,;$$

$$ady - \left(b - \sqrt{b^2 - acdx}\right) = 0$$

и найти их общие интегралы.

В общем случае линейное уравнение с частными производными второго порядка параболического типа с n независимых переменных можно записать в виде:

$$\frac{dw}{dt} - L_{x,t}[w] = \Phi(x,t),$$

где

$$L_{x,t}[w] \equiv \sum_{j-1}^{n} a_{i,j}(x,t)\frac{d^2w}{dx_i dx_j} + \\ + \sum_{i-1}^{n} b_i(x,t)\frac{dw}{dx_i} + c(x,t)w.$$

Уравнения параболического типа описывают неустановившиеся диффузионные, тепловые процессы, зависящие от времени [1, 6].

Методы решения уравнений математической физики

Все методы решения этих уравнений можно разделить на две группы:

1. Аналитические методы решения уравнений, которые основаны на сведении

2. Уравнения в частных производных к обыкновенному или системе обыкновенных уравнений;

3. Численные методы решения (с помощью ЭВМ).

Пример: Найдите функцию w=w(x,t), как решение уравнения $w_t = -aw_x$, где a>0, a=const, при начальном условии

$$w\left(x,0\right) = f\left(x\right) = \cos x\,.$$

Решение $w_t + aw_x = 0$ – это уравнение (уравнение переноса) в частных производных:

$$\frac{dw}{wt} + a\frac{dw}{dx} = 0\,. \qquad (1.1)$$

Характеристическое уравнение для (1.1) имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a} \qquad (1.2)$$

$$d\left(x - at\right) = 0 \rightarrow x - at = C\,,$$

где C – произвольная постоянная. Общее решение уравнения (1.1), имеет вид бегущей волны:

$$w\left(x,t\right) = \varphi\left(x - at\right)\,. \qquad (1.3)$$

Из (1.3) видно, что a – скорость переноса. Так как a >0, то волна бежит слева направо. Подставим начальное условие, получим:

$$w\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right) = f\left(x\right)\,. \qquad (1.4)$$

Получаем:

$$w\left(x,t\right) = f\left(x - a\right) = \cos(x - at)\,.$$

Ответ: Функция $w\left(w,t\right) = \cos(x - at)$, является решением уравнения переноса при заданном начальном условии.

Список литературы

1. Бондаренко В.А., Мамаев И.И. Профессиональная направленность в обучении математике студентов биологических факультетов // Вестник АПК Ставрополья. – 2014. – № 1 (13). – С. 6–9.

2. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Задачи с экономическим содержанием на занятиях по дифференциальному исчислению // Актуальные вопросы теории и практики бухгалтерского учета, анализа и аудита: ежегодная 75-я научно-практическая конференция / Редколлегия: В.З. Мазлоев, А.В. Ткач, И.С. Санду, И.Ю. Скляров, Е.И. Костюкова; отв. за вып. А.Н. Бобрышев. – 2011. – С. 124–127.

3. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Некоторые аспекты интегрированного подхода изучения математического анализа // Учетно-аналитические и финансово-экономические проблемы развития региона: ежегодная 76-я научно-практическая конференция Ставропольского государственного аграрного университета «Аграрная наука – Северо-Кавказскому региону». – 2012. – С. 280–283.

4. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Долгополова А.Ф. Применение операционного исчисления в моделировании экономических систем // Аграрная наука, творчество, рост. 2013.

5. Перспективный облик отказоустойчивых цифровых систем управления маневренных ла / В.В. Косьянчук, С.В. Константинов, Т.А. Колодяжная, П.Г. Редько, И.П. Кузнецов // Полет: Общероссийский научно-технический журнал. – 2010. – № 2. – С. 20–27.

6. Попова С.В., Смирнова Н.Б. Элементы алгоритмизации в процессе обучения математике в высшей школе // Современные проблемы развития экономики и социальной сферы: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., посвященной 75-летию Ставропольского государственного аграрного университета. – 2005. – С. 526–531.